

Familia de Mapas del Panadero Como Ambiente Caótico de la Caminata Cuántica

Leonardo Ermann

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2005

TEMA: Mapas cuánticos caóticos aplicables a computación cuántica

ALUMNO: Leonardo Ermann

L.U. N: 505/00

LUGAR DE TRABAJO: Grupo de Caos Cuántico, Laboratorio Tandara, CAC, CNEA.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Marcos Saraceno

FECHA DE INICIACIÓN: Abril 2004

FECHA DE FINALIZACIÓN: Marzo 2005

FECHA DE EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Director

Profesor de Tesis de Licenciatura

Resumen

En esta tesis proponemos una familia de mapas caóticos como ambiente de un sistema cuántico utilizado en algoritmos de computación cuántica. Este sistema, conocido como caminata cuántica, difiere notablemente de su versión clásica.

En primer lugar estudiamos cada uno de estos sistemas como sistemas cerrados. El mapa del panadero es re-formulado y se obtienen nuevas interpretaciones. Analizamos ambos sistemas utilizando herramientas de caos cuántico y representaciones en espacios de fases.

Luego acoplamos ambos sistemas y trazamos sobre el ambiente con el fin de estudiar la pérdida de coherencia y la transición clásica-cuántica del caminante.

Se analizan magnitudes como la varianza, la entropía, la distancia variacional y la distancia entre funciones de Wigner. Los resultados son contrastados con los de otro modelo de decoherencia que traza sobre el ambiente en cada paso.

Por último caracterizamos los miembros de las familias del panadero con distintas dimensiones en su rol de entorno de la caminata cuántica.

Índice general

Introducción	6
1. Universo Cuántico	8
1.1. Computación Cuántica	8
1.1.1. El Qubit	9
1.1.2. Circuitos Cuánticos	10
1.1.3. Transformada de Fourier Cuántica	11
1.1.4. Entropía e Información	12
1.2. Mecánica Cuántica en Espacios de Fases	13
1.2.1. Espacios de Fases Discretos	14
2. Caminata Cuántica	18
2.1. Caminata Aleatoria Clásica	18
2.2. Caminata Cuántica	19
2.2.1. Resolución de Caminata Cuántica en la Línea	20
2.2.2. Caminata Cuántica vs. Clásica	22
2.2.3. Matriz Densidad en la Caminata	24
2.3. Decoherencia en el Caminante	25
2.3.1. Modelos de Decoherencia	26
2.3.2. Caminante con Decoherencia	27
2.4. Conclusiones de la Caminata	27
3. Mapa del panadero	30
3.1. Sistemas Dinámicos	30
3.2. Mapa del Panadero	32
3.3. Cuantización del Mapa del Panadero	33
3.3.1. Cuantización del Espacio de Fases	34
3.3.2. Cuantización de la Dinámica	35
3.4. Familias de Mapas del Panadero	36
3.4.1. Interpretación Como Corrimientos de Bernoulli	37
3.4.2. Interpretación Circuitual	37
3.4.3. Interpretación Como Nueva Cuantización	38
4. Evolución del Caminante y del Panadero	42
4.1. Análisis de la Caminata Hadamard	42
4.1.1. Probabilidad	42
4.1.2. Función de Wigner	44

4.2. Análisis del Panadero	47
4.2.1. Representaciones en el Espacio de Fases	47
4.2.2. Matriz del Panadero en Coordenadas	48
4.2.3. Espectro	48
4.2.4. Entrelazamiento	50
5. Caminata acoplada a Panadero	52
5.1. Panadero como Ambiente de la Caminata	53
5.2. Multibaker	54
5.3. Caminata en la Línea	54
5.4. Probabilidad	56
5.4.1. Distancia Variacional	56
5.5. Varianza	58
5.6. Entropía	61
5.6.1. Entropía con Moneda	66
5.7. Comparación con Modelo de Decoherencia	68
5.7.1. Distancia Entre Wigners	69
Conclusiones	70
A. Implementación del Panadero con ángulos de Floquet	72
Agradecimientos	74
Bibliografía	76

Introducción

El desarrollo de la computación cuántica en los últimos años se debe en gran medida a las ventajas que presenta en la resolución de problemas relevantes a la computación. Esta capacidad de ahorro de recursos computacionales está basada en fenómenos puramente cuánticos como son la superposición y el entrelazamiento.

Las prioridades de esta rama de la física son, por un lado explorar el potencial de este nuevo paradigma de computación, y por otro estudiar y desarrollar la implementación en diversos sistemas físicos. Una de las principales complicaciones que surgen en la implementación es la pérdida de coherencia de los sistemas. Este proceso, conocido como “decoherencia”, debe su existencia al flujo de información entre sistema y ambiente, y es el responsable del comportamiento clásico en los sistemas cuánticos.

Avanzar en el estudio de distintos modelos de decoherencia y de corrección de errores, permitirá evitar, controlar o predecir la “destrucción” de la información del sistema que produce la decoherencia.

En este trabajo analizaremos un sistema utilizado en algoritmos cuánticos (caminata cuántica) que interactúa con un ambiente en particular. Este ambiente finito podrá ser considerado “realista” debido a su complejidad.

Una de las ventajas de este modelo es que es posible estudiar la decoherencia, no a través de modelos fenomenológicos, sino a partir de observar una parte de un sistema total que incluye al ambiente y que evoluciona en forma unitaria.

En la primer parte del trabajo introduciremos los temas, y algunas herramientas. Luego haremos una nueva formulación de los mapas que utilizaremos. Y por último, expondremos nuestros resultados.

En el primer capítulo presentaremos algunos aspectos de la mecánica cuántica que servirán de base del trabajo. Los conceptos de entropía, la definición de la transformada de Fourier cuántica y la descripción de la mecánica cuántica en espacios de fases serán tratados en esta sección.

En el Capítulo 2 definiremos la caminata aleatoria clásica y mostraremos su versión cuántica. En este último caso, la distribución de probabilidades se calculará a partir de sumas de amplitudes, y no de sumas de probabilidades. Los fenómenos de interferencia cuántica afectarán el comportamiento del caminante que pasará a ser balístico en lugar de difusivo. Estas diferencias se pondrán de manifiesto a través de la varianza, y son justamente las que se quieren explotar en los algoritmos cuánticos.

Luego presentaremos un modelo de decoherencia controlable en un laboratorio [8], basado en

el modelo de Żurek de un espín acoplado a un baño de espines. Este modelo nos permitirá observar el paso del caminante clásico al cuántico a través de un parámetro continuo y lo utilizaremos para comparar con nuestros resultados.

El sistema propuesto como ambiente será estudiado en el Capítulo 3. Haremos una breve introducción sobre sistemas dinámicos y mapas clásicos. Obtendremos el mapa del panadero cuántico convencional a partir de su versión clásica (caótica), y lo generalizaremos a una familia de mapas para un espacio generado por qubits. Para esta familia plantearemos una re-interpretación en términos de una nueva cuantización del mapa del panadero. También representaremos al mapa como circuito cuántico ya que nos permitirá acoplar al caminante en forma natural.

En el Capítulo 4 estudiaremos al caminante cuántico y a la familia del panadero como sistemas independientes a través de simulaciones numéricas.

Las principales características del caminante que estudiaremos serán las distribuciones de probabilidades y las representaciones en el espacio de fases.

En el mapa del panadero analizaremos propiedades tales como su representación matricial, sus funciones de Wigner, su espectro y su poder de entrelazamiento. Los miembros de la familia del mapa que estudiaremos irán desde el mapa del panadero convencional al mapa de varias monedas independientes. Veremos que este último miembro se diferencia del resto ya que no produce entrelazamiento y que posee distinto límite semiclásico.

En el Capítulo 5 expondremos nuestros resultados sobre la caminata acoplada al mapa del panadero. Se estudiarán especialmente la varianza, la entropía y la distribución de probabilidades en función del tiempo para distintas dimensiones del ambiente. Podremos comparar nuestros resultados con expresiones analíticas en el caso de la varianza para el mapa de varias monedas independientes.

Luego compararemos nuestros resultados con los del modelo de decoherencia del capítulo 3. Notaremos que las diferencias más importantes entre los modelos se deben a la capacidad de almacenamiento de información de los ambientes, en nuestro caso ésta dependerá de la dimensión del sistema y en el otro será infinita.

Por último nos basaremos en los resultados numéricos para tratar de caracterizar a los miembros de la familia del panadero en su rol de entorno de la caminata.

Capítulo 1

Universo Cuántico

God does not care about our mathematical difficulties.

He integrates empirically.

Albert Einstein (1879 - 1955)

La Mecánica Cuántica crea un marco en el que se desarrollan diversas ramas de la física. Una de las más recientes es la Computación Cuántica, que nace a partir de notar las diferencias entre el tratamiento de información clásico y cuántico.

Los axiomas de la cuántica definen el escenario matemático en el que se desarrolla la mecánica:

1. **Estados:** Se define un estado como un vector en un espacio de Hilbert (espacio complejo, con un producto interno y una norma).
2. **Observables:** Un observable es una propiedad física que en principio puede ser medida. Se representa por un operador hermítico en \mathcal{H}
3. **Medición:** Es una proyección ortogonal. La medición de un observable da como resultado un autovalor de ese operador, e inmediatamente después proyecta el estado al respectivo autovector.
4. **Evolución:** La evolución temporal de un sistema está dada por un operador unitario. La ecuación de Schrodinger gobierna la dinámica de un estado: $\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH|\psi(t)\rangle$ siendo H el Hamiltoniano (hermítico).

Si ponemos nuestra atención en alguna parte de un sistema (sistema cuántico abierto), podemos notar que no todas estas propiedades se cumplen. En particular un estado cuántico no es un vector sino una *matriz densidad* (ρ), un operador no negativo con traza igual a 1. Si $\rho^2 = \rho$ se trata de un estado puro (equivalente a un vector), mientras que si es distinto de 1 es un estado mixto (mezcla estadística).

1.1. Computación Cuántica

La computación cuántica tuvo su nacimiento en la última parte del siglo XX, a partir de la idea de Feynman de utilizar un sistema cuántico a la hora de hacer cálculos de mecánica cuántica.

Más adelante surgieron distintos algoritmos cuánticos capaces de realizar cálculos matemáticos economizando recursos computacionales (tiempo de cálculo, memoria, etc.).

En 1994 Peter Shor encontró un algoritmo de factorización con ventajas exponenciales sobre los mejores algoritmos clásicos. Este descubrimiento es de gran importancia para la computación, ya que la factorización es una pieza fundamental para otros algoritmos y problemas.

Otro algoritmo que presenta ventajas (aunque no exponenciales) es el de Grover, que consiste en un algoritmo de búsqueda en una base de datos desestructurada.

Las posibles implementaciones de la computación e información cuántica se están desarrollando desde hace algunos años en diversos sistemas físicos. Algunos ejemplo son la óptica cuántica, las trampas de iones, cavidades en electrodinámica cuántica, resonancia magnética nuclear y “quantum dots”.

1.1.1. El Qubit

El bit (binary digit) es la pieza fundamental de la computación y la información clásica. El mismo consiste en una variable dicotómica, y es la mínima medida de información posible.

En el caso cuántico, tenemos al qubit (quantum bit), que se representa como un sistema de dos niveles: $|0\rangle$ y $|1\rangle$. A diferencia del bit clásico que sólo puede estar en dos estado posibles, el qubit puede estar en una combinación lineal de estos dos niveles, llamada superposición.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.1)$$

con

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.2)$$

o sea que el qubit queda definido con un vector en un espacio de Hilbert de dimensión 2. Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ forman una base de este espacio, conocida como *base computacional*.

Cualquier sistema físico cuántico de dos niveles puede ser considerado un qubit. Por ejemplo, el espín de un electrón, la polarización de un fotón, dos estados electrónicos de un átomo, etc.

En el caso clásico, es fácil hacer mediciones sobre el bit para saber en que estado se encuentra. En el caso del qubit, examinar el estado es mucho más complicado, ya que dado un estado cualquiera, no sólo no se puede saber en que estado se encuentra, sino que una medición lo alteraría.

Debido a que el estado del qubit debe estar normalizado, podemos representarlo como

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (1.3)$$

con θ y φ reales tales que $\theta \in [0, \pi)$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. O sea que el estado de un qubit puede representarse a través de los ángulos como un vector de norma uno en un espacio real tridimensional.

Para estados generales de un qubit (no necesariamente puros) el único requerimiento del vector tridimensional es que la norma no debe ser mayor que uno.

Esta representación es conocida como *representación de Bloch*.

Varios qubits

Si queremos trabajar con sistemas de más de un qubit, debemos tener en cuenta cómo crece la complejidad del problema. El estado de un sistema de l qubits se representa en un espacio de Hilbert de dimensión $N = 2^l$. Por lo tanto para conocer la descripción de un estado cualquiera es necesario especificar 2^l coeficientes complejos.

La cantidad de datos necesarios crece exponencialmente con el número de qubits. Esto produce que, para cierta cantidad de qubits, almacenar y procesar información resulta inconcebible. Por ejemplo, la cantidad de números complejos necesarios para describir un estado de unos 500 qubits es mayor a la cantidad de átomos estimados en el universo. Por otro lado, no es necesario almacenar toda esa información, ya que una computadora cuántica obviamente es capaz de simular sistemas cuánticos eficientemente.

1.1.2. Circuitos Cuánticos

Operaciones de 1 qubit

En un espacio de Hilbert generado por un qubit, las operaciones se pueden expresar como matrices complejas de 2×2 . Una base de las operaciones hermíticas está dada por la identidad y las matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Usando que $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k$, entonces $(\hat{n} \vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$, y una rotación en un ángulo θ sobre un eje \hat{n} puede escribirse como:

$$\mathbf{R}(\hat{n}, \theta) = e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{n} \vec{\sigma}} = \mathbf{1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \hat{n} \vec{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.5)$$

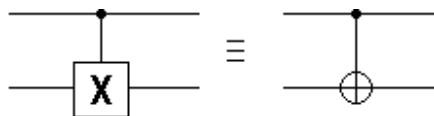
Operaciones de 2 qubits

Algunas de las operaciones de dos qubits más comunes son las operaciones de un qubit controladas por otro. Si el qubit de control se encuentra en estado $|0\rangle$ se aplica la identidad sobre el qubit controlado, mientras que si el control se encuentra en $|1\rangle$ se aplica la operación sobre el qubit de control.

Por ejemplo el *Control-Not* (negación controlada) es el operador σ_x controlado y se puede representar en forma matricial en la base computacional como

$$C_{NOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

o en forma de circuito, donde una línea representa a un qubit y un bloque a una operación



el qubit de control es el de arriba y el controlado el de abajo, y la evolución temporal del estado se da de izquierda a derecha.

Operaciones arbitrarias

Uno de los resultados importantes de la computación cuántica es que cualquier evolución unitaria en un espacio generado por cualquier cantidad de qubits puede ser lograda utilizando solamente algunas operaciones de 1 y 2 qubits (compuertas cuánticas).

Estas *compuertas elementales* son: una operación de dos qubits (Control-Not por ejemplo) y rotaciones arbitrarias en un qubit.

Un resultado aún más sorprendente, es que existe un conjunto finito de compuertas elementales tales que permiten aproximar tan bien como se quiera a una transformación unitaria de n qubits cualquiera. Estas operaciones son: C_{NOT} , H , T y S

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

La operación H es conocida como Hadamard y será utilizada frecuentemente en este trabajo. H puede ser pensado como un cambio de base de los autoestados del espín en la dirección z , a los de la dirección x . También puede representarse como suma de las matrices de Pauli: $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$.

1.1.3. Transformada de Fourier Cuántica

La transformada de Fourier cuántica es similar a la transformada de Fourier discreta. Se utiliza mucho para transformar problemas en otros de fácil resolución. Hoy en día es una de las bases para los algoritmos cuánticos tales como estimación de fase, búsqueda de orden y factorización [1].

Se define la transformada de Fourier cuántica en una base ortonormal $|0\rangle, \dots, |N-1\rangle$ de dimensión N como:

$$\hat{U}_{FT}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} |k\rangle \quad (1.8)$$

Si el espacio de Hilbert es expandible en qubits, o sea $N = 2^n$, la transformada de Fourier se puede escribir como

$$\hat{U}_{FT}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0,1} e^{-i2\pi j(k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \dots + k_n 2^{-n})} |k_1 k_2 \dots k_n\rangle \quad (1.9)$$

con

$$k = \sum_{l=1}^n k_l 2^{n-l} \quad (1.10)$$

Reescribiendo (1.9),

$$\hat{U}_{FT}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0,1} \bigotimes_{l=1}^n e^{-i2\pi j \frac{k_l}{2^n}} |k_l\rangle \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{l=1}^n \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0,1} e^{-i2\pi j \frac{k_l}{2^n}} |k_l\rangle \quad (1.12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{-i2\pi \frac{jn}{2}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{-i2\pi(\frac{jn}{2^2} + \frac{jn-1}{2})} |1\rangle) \otimes \dots \\ \dots \otimes (|0\rangle + e^{-i2\pi(\frac{jn}{2^n} + \dots + \frac{j2}{2^2} + \frac{j1}{2})} |1\rangle) \quad (1.13)$$

con

$$j = \sum_{l=1}^n j_l 2^{n-l} \quad (1.14)$$

Si utilizamos la transformación unitaria de un qubit

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i2\pi}{2^n}} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

La transformada de Fourier se puede representar con el siguiente circuito

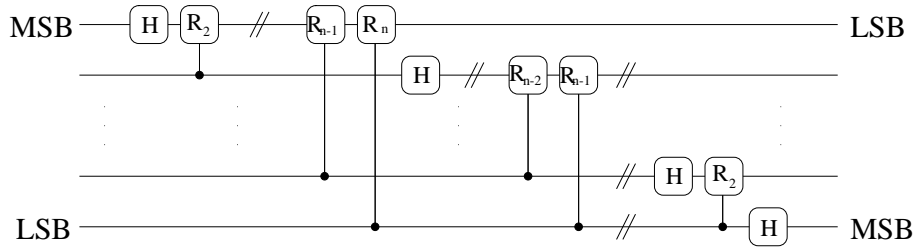


Figura 1.1: Circuito de la implementación de la transformada de Fourier. Luego de aplicar el circuito, se invierte el orden de importancia de los qubits.

El orden de los qubits queda invertido, de manera que hay que agregar swaps (del orden de la mitad de qubits).

La transformada de Fourier cuántica puede implementarse utilizando un número cuadrático de compuertas elementales (rotaciones controladas, hadamards y swaps).

Para el caso de 1 qubit, la transformada de Fourier es el operador Hadamard.

1.1.4. Entropía e Información

La entropía es una medida de la incerteza de un estado de un sistema físico. En la teoría de la información clásica, la entropía de Shannon de la variable X mide cuánto se sabe de ella antes de conocer su estado. Esta entropía puede ser descrita en función de la distribución de probabilidades como

$$S(p_j) = - \sum_j p_j \log p_j \quad (1.16)$$

donde p_j es la probabilidad de que ocurra el evento j .

Se puede ver que $S(p_j) \geq 0$ para toda distribución. $S(p_j) = 0$ sólo cuando la ignorancia es nula, y $S(p_j) = \log k$ (máxima) cuando los k eventos son equiprobables.

En el caso de la mecánica cuántica, se puede definir la entropía de un estado a través de un observable como

$$S_{\rho, \hat{A}} = - \sum_n \text{prob}(a_n) \log_2 \text{prob}(a_n) \quad (1.17)$$

La mínima entropía que se puede asociar a un estado cuántico, está dada por la de Von Neumann

$$S_{VN} = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) = - \sum_x \lambda_x \log_2 \lambda_x \quad (1.18)$$

donde λ_x son los autovalores de ρ .

Para un estado puro $S_{VN} = 0$, mientras que si se trata de un estado mixto $S_{VN} > 0$. El máximo valor de la entropía $S_{VN} = \log(\dim(\mathcal{H}))$, se obtiene cuando la matriz densidad es proporcional a la identidad.

Muchas veces resulta poco práctico utilizar S_{VN} , ya que requiere diagonalizar la matriz densidad. En nuestro trabajo utilizaremos la *entropía lineal* definida como

$$S_{lin} = -\log_2[\text{Tr}(\rho^2)] \quad (1.19)$$

Se puede demostrar que esta entropía es una cota inferior de la de Von Neumann y que ambas coinciden en los extremos (estados puros y mixtos de máxima ignorancia).

La entropía de un subsistema de un estado puro, es igual a la del subsistema complementario. Esto es consecuencia de la descomposición de Schmidt [1, 2].

$$S_{lin A} = -\log_2 \text{Tr}[(\text{Tr}_B \rho_{AB})^2] = -\log_2 \text{Tr}[(\text{Tr}_A \rho_{AB})^2] = S_{lin B} \quad (1.20)$$

con ρ_{AB} puro.

1.2. Mecánica Cuántica en Espacios de Fases

La mecánica cuántica puede ser formulada en el espacio de fases (q, p) , en forma similar a la física clásica. Esto, por ejemplo, permite estudiar en forma natural el límite semiclásico.

Una de las representaciones más comunes es la función de Wigner. Esta distribución es una función real que contiene la misma información que la matriz densidad. Por lo tanto es posible representar estados cuánticos y su evolución.

La función de Wigner fue formulada para espacios continuos y luego generalizada para espacios discretos [24, 23, 25].

La función de Wigner continua generalmente se define como

$$W(q, p) = \int \frac{d\lambda}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\lambda p}{\hbar}} \langle q - \lambda/2 | \rho | q + \lambda/2 \rangle \quad (1.21)$$

y se puede pensar como el valor medio de los *operadores punto*, $\{\hat{A}(q, p)\}$

$$W(q, p) = Tr(\hat{\rho}\hat{A}(q, p)) \quad (1.22)$$

$$\hat{A}(q, p) = \delta(\hat{P} - p)\delta(\hat{Q} - q) = \frac{1}{\pi\hbar}\hat{D}(q, p)\hat{R}\hat{D}^\dagger(q, p) \quad (1.23)$$

siendo $\hat{D}(\lambda, \lambda') = \exp[-\frac{i}{\hbar}(\lambda\hat{P} - \lambda'\hat{Q})]$ el operador de desplazamiento. De esta definición podemos observar que si $\rho = \rho_1 + \rho_2$, entonces $W(q, p) = W(q, p)_1 + W(q, p)_2$.

Las propiedades de los operadores de punto tales como la hermiticidad y la completitud, permiten deducir las características de las funciones de Wigner:

- $W(q, p)$ es real
- El producto interno de dos estados puede calcularse por medio de la función de Wigner como

$$Tr[\rho_1\rho_2] = 2\pi\hbar \int W_1(q, p)W_2(q, p)dqdp \quad (1.24)$$

- La integral en una línea del espacio de fases, definida por la ecuación $a_1q + a_2p = a_3$, es la densidad de probabilidad de que una medición del observable $a_1Q + a_2P$ tenga como resultado a_3 . Donde Q y P son los operadores de posición y momento.

1.2.1. Espacios de Fases Discretos

Se quiere generalizar la función de Wigner continua a un espacio de Hilbert, \mathcal{H}_N , de dimensión N con condiciones periódicas de contorno. Se definen los operadores de traslación y reflexión en la base de posición y momento:

$$\begin{aligned} U^m|n\rangle &= |n+m\rangle & U^m|k\rangle &= e^{-i\frac{2\pi}{N}mk}|k\rangle \\ V^m|n\rangle &= e^{i\frac{2\pi}{N}mn}|n\rangle & V^m|k\rangle &= |k+m\rangle \\ R|n\rangle &= |-n\rangle & R|k\rangle &= |-k\rangle \end{aligned} \quad (1.25)$$

con las siguientes propiedades

$$V^qU^p = U^qV^p \exp(i2\pi pq/N) \quad (1.26)$$

$$UR = RU^{-1}, \quad VR = RV^{-1} \quad (1.27)$$

La discretización de los operadores de punto a través de la reflexión desplazada (ecuación 1.23) no es trivial. Para obtener un conjunto completo de operadores de punto, el espacio debe ser una grilla de $2N \times 2N$, en lugar de una de $N \times N$, donde cada valor de q y p entero es dividido por dos. De esta manera los operadores de punto quedan definidos como

$$A(q, p) = \frac{1}{2N}U^qRV^{-p}e^{i\frac{\pi}{N}qp} \quad (1.28)$$

y la función de Wigner se calcula en forma equivalente al caso continuo como el valor medio de los operadores de punto

$$W(q, p) = Tr[A(q, p)\rho] \quad (1.29)$$

Además se puede probar que se cumplen las mismas propiedades que en el caso continuo.

Como habíamos dicho, la función de Wigner tiene toda la información que posee la matriz densidad. La matriz densidad se recupera a partir de la función de Wigner y los operadores de punto:

$$\rho = N \sum_{(q,p)} W(q,p) A(q,p) \quad (1.30)$$

En este trabajo utilizaremos la tercer propiedad de las Wigner para calcular distribuciones de probabilidades. En espacio discreto, al sumar sobre las filas ($p = cte$) o columnas ($q = cte$), obtenemos

$$P(k = k_0) = \sum_{n=0}^{N-1} W(n, k_0) \quad (1.31)$$

$$P(n = n_0) = \sum_{k=0}^{N-1} W(n_0, k) \quad (1.32)$$

Es posible calcular $W(q,p)$ analíticamente para un estado posición $\rho = |q_0\rangle\langle q_0|$.

$$W_{q_0}(q,p) = \frac{1}{2N} \langle q_0 | U^q R V^{-p} | q_0 \rangle e^{i\frac{\pi}{N}qp} \quad (1.33)$$

$$= \frac{1}{2N} \delta_N(q - 2q_0) (-1)^{p(q-2q_0)} \quad (1.34)$$

siendo δ_N la delta discreta periódica definida como $\delta_N(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi qn/N}$.

Esto se puede representar en el espacio de fases con el siguiente gráfico:

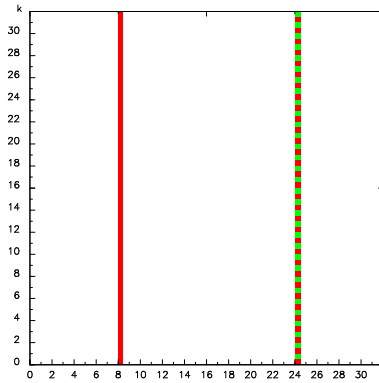


Figura 1.2: Función de Wigner de un autoestado de la posición en $|n\rangle = 8$ en un espacio de Hilbert de dimensión 32. La función es real y toma valores positivos (en rojo) y negativos (en verde).

Claramente, las probabilidades de medir $q_0 = 8$ es 1, y las de medir $q \neq q_0$ son nulas. La línea vertical punteada (en $n = 24$) proviene de la interferencia de la línea positiva (en $n = 8$) consigo misma, debido a que el espacio de fases es un toro.

En la figura se grafican las funciones de Wigner de dos estados posición. Para la mezcla estadística sólo aparecen las dos posiciones con sus respectivas interferencias debido al espacio toroidal. En el caso de superposición coherente también hay una línea de interferencia localizada

en posición con oscilaciones, ubicada en el medio de las dos posiciones. Podemos notar que al aumentar la separación entre las posiciones, en el caso coherente, la frecuencia de las oscilaciones de la franja de interferencia crece.

Estos mismos resultados se obtienen al estudiar la función de Wigner para estados localizados en momento.

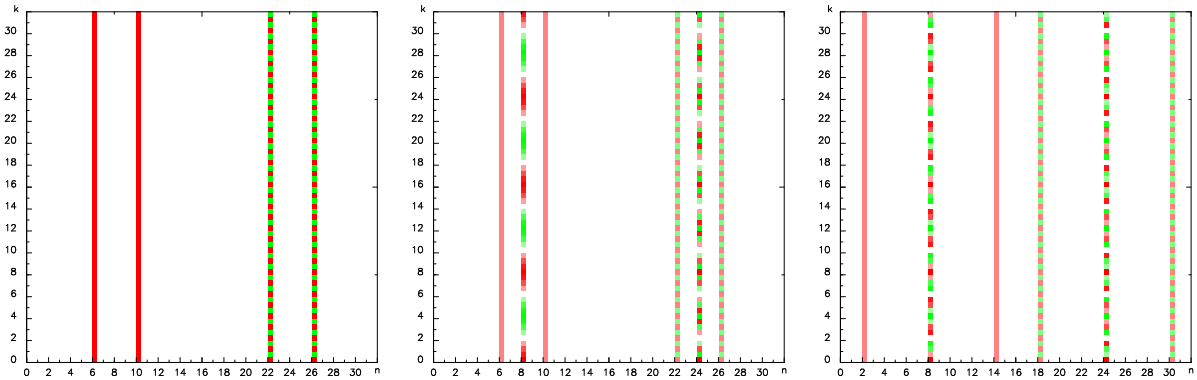


Figura 1.3: *Funciones de Wigner de mezcla estadística de dos posiciones en 6 y 10 (izquierda); dos posiciones coherentes en 6 y 10 (centro); y dos posiciones coherentes en 2 y 14, en un espacio de Hilbert de dimensión 32.*

Capítulo 2

Caminata Cuántica

*There's a difference between knowing the Path
and walking the Path.*

Andy & Larry Wachowski, The Matrix, 1999

La Caminata Aleatoria Clásica es un proceso no determinista, utilizado muy frecuentemente dentro de algoritmos. En su versión más simple, un “caminante” se desplaza sobre una línea, efectuando pasos a la izquierda o a la derecha dependiendo del tiro de una moneda, y con probabilidad p, q ($p + q = 1$).

En los últimos años se han estudiado distintas versiones cuánticas y se han encontrado ventajas de recursos tanto en algoritmos de caminos a través de grafos como en algoritmos de búsqueda. En estas versiones las probabilidades son remplazadas por amplitudes de una moneda cuántica (un sistema de dos niveles), y el proceso se realiza manteniendo la coherencia.

En primer lugar, Childs et al. [3] lograron atravesar un grafo no regular en particular, utilizando una caminata cuántica con tiempo continuo en forma exponencialmente más rápido que cualquier algoritmo clásico. Luego, Shenvi et al. [4] presentaron un algoritmo con tiempo discreto que busca en una base desestructurada con la misma velocidad que el Algoritmo de Grover [1].

Las ventajas de los algoritmos cuánticos se basan en las diferencias que existen entre la Caminata Aleatoria Clásica y la Cuántica. Una de las diferencias más importantes es que la distribución de probabilidades de la Caminata Cuántica se dispersa mucho más rápido.

2.1. Caminata Aleatoria Clásica

En este trabajo sólo analizaremos caminatas unidimensionales con tiempo discreto.

La Caminata Aleatoria Clásica con tiempo discreto típica es aquella en la que un caminante se sitúa sobre una red de sitios, como por ejemplo un grafo. En cada paso el caminante puede moverse a un sitio vecino con una cierta probabilidad. En el caso de un caminante simétrico las probabilidades de avanzar a cualquier sitio adyacente son las mismas. En general se utilizan grafos regulares, que son los grafos en los que cada uno de sus sitios tienen el mismo número de vecinos.

En la caminata unidimensional simétrica cada sitio tiene dos vecinos y la probabilidad de que el caminante se mueva a uno de esos sitios es $p = \frac{1}{2}$ en cada paso. Si una red unidimensional

posee infinitos sitios se le llama “línea” o “línea infinita”, mientras que una con número finito de sitios y condiciones periódicas de contorno se conoce como “anillo” o “ciclo”. En la medida que el caminante no llegue a los bordes, los resultados en la línea y en el ciclo son equivalentes.

La probabilidad de hallar al caminante en el sitio n a tiempo t en la línea infinita para una condición inicial $P_{clas}(n, t = 0) = \delta_{n,0}$ es:

$$P_{clas}(n, t) = \begin{cases} \frac{1}{2^t} \frac{t!}{\left(\frac{t+n}{2}\right)! \left(\frac{t-n}{2}\right)!} \frac{1+(-1)^{n+t}}{2} & \text{si } n \leq t \\ 0 & \text{si } n > t \end{cases} \quad (2.1)$$

Sólo hay probabilidades no nulas de hallar al caminante en los sitios que tienen la misma paridad que el número de pasos, t , y los que no excedan esa cantidad. La probabilidad de hallar al caminante en los sitios no nulos forma una distribución Gaussiana centrada en $n = 0$. A tiempos largos, el cuadrado de la varianza de la distribución es lineal en el tiempo.

En general un caminante situado en una posición inicial n_0 posee las siguientes características:

$$\langle x \rangle(t) = \sum_n P(n, t) n = n_0 \quad (2.2)$$

$$\sigma^2 = (\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = t \quad \forall t \gg 1 \quad (2.3)$$

2.2. Caminata Cuántica

En la caminata aleatoria unidimensional clásica podemos pensar que en cada paso se tira una moneda. El caminante evoluciona moviéndose hacia el sitio contiguo de la derecha o el de la izquierda dependiendo del estado de la moneda en cada paso o “tirada”.

En el caso de la caminata cuántica debemos agregar el grado de libertad “moneda” al sistema del caminante.

Una moneda cuántica es un sistema de dos estados, por ejemplo, un sistema de espín $\frac{1}{2}$. Si el estado total es un producto tensorial del caminante en un sitio de la línea, y el espín hacia arriba (abajo), entonces el caminante se mueve un sitio hacia la derecha (izquierda). Se puede pensar que se aplica una traslación discreta al caminante controlada por el estado de la moneda.

Para obtener un comportamiento no trivial se le aplica en cada paso un operador unitario a la moneda haciendo las veces de “tirada de moneda”. En el caso de la Caminata Hadamard, el operador que se aplica es el Hadamard (H). Este operador unitario se puede interpretar como un cambio de base de los autovectores del espín en la dirección \hat{z} a los de la dirección \hat{x} . H también es la transformada de Fourier discreta para un espacio de Hilbert de dimensión 2.

$$H = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Cuando se quiere ver la distribución de probabilidades o algún observable del caminante se debe trazar sobre el espacio de la moneda.

A diferencia de la versión clásica probabilística, la caminata cuántica es determinista y su evolución es unitaria. Esto se debe a que la probabilidad de encontrar al “caminante” resulta en un caso de sumar probabilidades mientras que en el otro de sumar amplitudes.

2.2.1. Resolución de Caminata Cuántica en la Línea

La Caminata cuántica en la línea infinita fue resuelta exactamente por Nayak y Vishwanath [5] utilizando el siguiente procedimiento:

Se describe el estado total de caminante y moneda con un espinor

$\Psi(n, t) = \begin{pmatrix} \Psi_0(n, t) \\ \Psi_1(n, t) \end{pmatrix}$ donde se indica la amplitud de la función de onda en el sitio n a tiempo t con espín hacia arriba (componente superior) o con espín hacia abajo (componente inferior).

La evolución del sistema puede describirse mediante la siguiente ecuación de balance:

$$\Psi(n, t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Psi(n-1, t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi(n+1, t) \quad (2.5)$$

$$= M_+ \Psi(n-1, t) + M_- \Psi(n+1, t) \quad (2.6)$$

Para resolver esta ecuación, es útil introducir la transformada de Fourier:

$$|k\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikn} |n\rangle \quad (2.7)$$

$$\tilde{\Psi}(k, t) = \sum_n e^{ikn} \Psi(n, t) \quad (2.8)$$

con $k \in [-\pi, \pi]$ y la transformada de Fourier inversa:

$$|n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikn} |k\rangle \quad (2.9)$$

Por lo tanto, la ecuación 2.6 puede describirse como:

$$\tilde{\Psi}(k, t+1) = \sum_n [M_+ \Psi(n-1, t) + M_- \Psi(n+1, t)] e^{ikn} \quad (2.10)$$

$$= (e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_-) \tilde{\Psi}(k, t) \quad (2.11)$$

De esta manera se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\tilde{\Psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\Psi}(k, 0) \quad (2.12)$$

donde

$$M_k = e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Este procedimiento permite reducir el problema a hallar los autovectores y autovalores de \tilde{M}_k y a escribir el estado inicial $\tilde{\Psi}(k, 0)$ en la base de autovectores.

$$M_k = \lambda_k^1 |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| + \lambda_k^2 |\Phi_k^2\rangle \langle \Phi_k^2| \quad (2.14)$$

donde los autovalores pueden escribirse como $\lambda_k^1 = e^{-i\omega_k}$ y $\lambda_k^2 = -e^{i\omega_k}$, y ω_k es definido como un ángulo en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tal que, $\sin(\omega_k) = \frac{\sin(k)}{\sqrt{2}}$.

Los autovectores normalizados son:

$$\Phi_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(k) - \cos(k)}\sqrt{1 + \cos^2(k)}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2}e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\Phi_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(k) - \cos(k)}\sqrt{1 + \cos^2(k)}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2}e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Si partimos de un estado inicial en un único sitio n_0 :

$$\Psi(n, 0) = \begin{pmatrix} a_0 \delta_{n,n_0} \\ a_1 \delta_{n,n_0} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\Psi}(k, 0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} e^{in_0 k} \quad \forall k \quad (2.17)$$

se obtienen las siguientes amplitudes de onda en función del tiempo:

$$\Psi_0(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n_0+n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos(k)}{\sqrt{1 + \cos^2(k)}} \right) \times \\ \times e^{i(k(n_0-n) - \omega_k t)} [(a_0 - a_1) + \sqrt{2}a_1 e^{i(\omega_k t - k)}] \quad (2.18)$$

$$\Psi_1(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n_0+n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos(k)}{\sqrt{1 + \cos^2(k)}} \right) \times \\ \times e^{i(k(n_0-n) - \omega_k t)} [(a_0 - a_1)e^{ik} + \sqrt{2}a_1 e^{i\omega_k t}] \quad (2.19)$$

Las expresiones 2.18 y 2.19 son exactas y el problema de la Caminata Hadamard queda resuelto, aunque las integrales no pueden resolverse en forma analítica. Simulaciones numéricas permiten obtener la distribución de probabilidades para la Caminata Cuántica y compararla con la versión clásica.

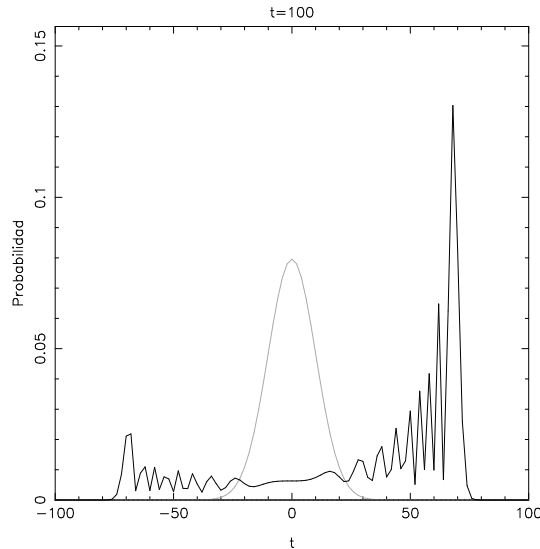


Figura 2.1: Distribución de probabilidades para el caminante luego de 100 iteraciones. En gris se ve la caminata aleatoria clásica y en negro la caminata Hadamard con la moneda en estado inicial $|\varphi_0\rangle = |0\rangle$. Sólo son graficados los sitios pares, ya que ambas probabilidades en los impares son nulas.

2.2.2. Caminata Cuántica vs. Clásica

Podemos notar que en ambas distribuciones los sitios con probabilidades no nulas deben tener la misma paridad que el número de pasos de la caminata. La distribución en la versión cuántica se dispersa mucho más que en la clásica, ya que las probabilidades de encontrar a la partícula cerca del punto de partida son muy bajas y existen picos en sitios lejanos al inicial. También se puede notar que en las probabilidades de la caminata cuántica hay un comportamiento oscilatorio.

En principio estas diferencias pueden ser explicadas si notamos que la versión cuántica puede pensarse como varios posibles caminos clásicos interfiriendo entre sí.

Con el fin de ilustrar esta interpretación se realiza el siguiente procedimiento:

Un paso del sistema se puede pensar como la aplicación de H sobre el espacio de la moneda y la traslación del caminante dependiendo el estado final del espín. Si tomamos al caminante en un sitio n_0 y a la moneda en un estado $|0\rangle$ ($|1\rangle$), luego de un paso obtenemos:

$$|n_0\rangle \otimes |0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_0 + 1\rangle \otimes |0\rangle + |n_0 - 1\rangle \otimes |1\rangle) \quad (2.20)$$

$$|n_0\rangle \otimes |1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_0 + 1\rangle \otimes |0\rangle - |n_0 - 1\rangle \otimes |1\rangle) \quad (2.21)$$

Estas expresiones pueden ser ilustradas de la siguiente manera:

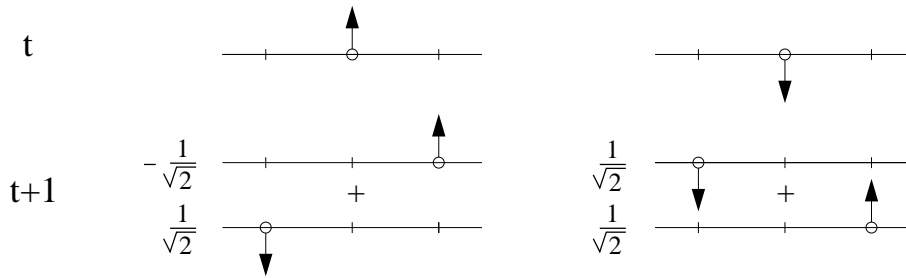


Figura 2.2: En la figura de la izquierda (derecha), se ve la evolución en un paso del caminante con espín hacia arriba (abajo).

Esto nos brinda una herramienta para entender mejor el fenómeno de interferencia destructiva que se da sólo en la versión cuántica. Por ejemplo, en la figura (2.3) se ilustran los primeros 4 pasos para un estado inicial $|\Psi\rangle = |n = 0\rangle|0\rangle$. Se observa que desde el tercer paso hay interferencia destructiva en los sitios cercanos al inicial.

Otra de las diferencias notorias que aparecen entre ambas caminatas, es que la clásica es simétrica, mientras que la cuántica no. Existen algunos estados iniciales de la moneda tales que la distribución de probabilidad de la caminata cuántica es simétrica. Esto se debe a que en esta versión, el estado inicial de la moneda condiciona el comportamiento del caminante para todo tiempo.

Si el estado inicial del sistema es $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|0\rangle + i|1\rangle)$, la distribución de probabilidades es simétrica (ver figura 2.4).

En la versión clásica, el máximo de la probabilidad se encuentra en $n = n_0 = 0$, mientras que en la cuántica los picos se hallan en $n = \pm \frac{t}{\sqrt{2}}$.

También se puede notar que la versión cuántica posee un espectro mayor de estados posibles, ya que tanto las mezclas estadísticas como las superposiciones coherentes son permitidas.

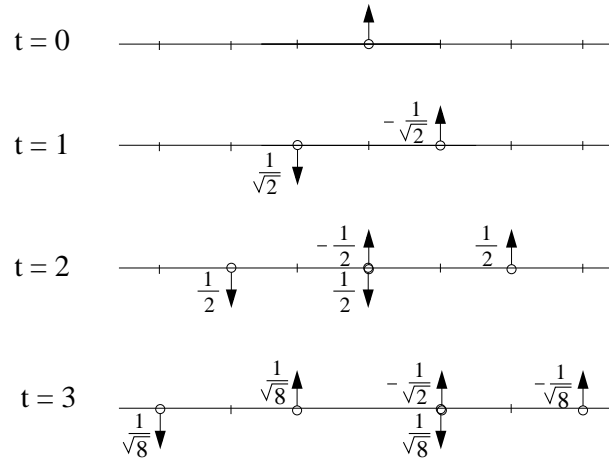


Figura 2.3: Se muestra la evolución de los primeros 3 pasos para un caminante con espín hacia arriba. Se puede ver que en el tercer paso hay interferencia.

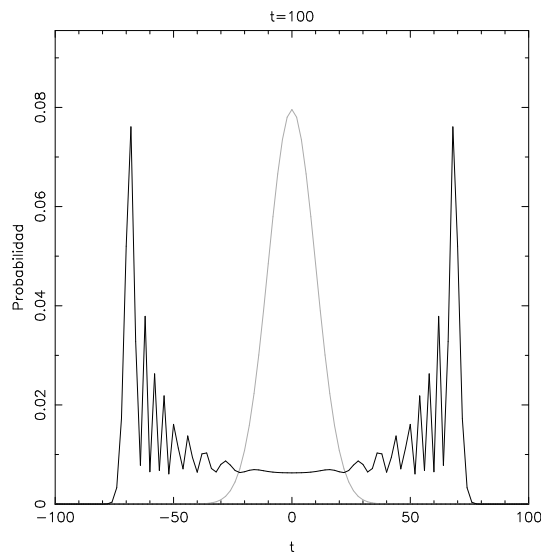


Figura 2.4: Distribución de probabilidades para el caminante luego de 100 iteraciones. En gris se ve la caminata aleatoria clásica y en negro la caminata Hadamard con la moneda en estado inicial tal que la distribución es simétrica ($|\varphi_0\rangle = |0\rangle + i|1\rangle$). Sólo son graficados los sitios pares, ya que ambas probabilidades en los impares son nulas.

2.2.3. Matriz Densidad en la Caminata

Una formulación alternativa para la resolución de la caminata cuántica, es a través de la matriz densidad [6, 7]. Esta formulación presenta ventajas en el cálculo, debido a las herramientas formales desarrolladas por la computación cuántica, y permite ampliar en forma natural el espacio de la moneda.

En esta descripción, la evolución de la matriz densidad del caminante y la moneda en cada paso, está dada por un operador unitario.

$$\rho_{cm}(t+1) = M\rho_{cm}(t)M^\dagger \quad (2.22)$$

$$|\Psi_{cm}(t+1)\rangle = M|\Psi_{cm}(t)\rangle \quad (2.23)$$

donde ρ_{cm} es la matriz densidad del sistema total en un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_M$ y M es un operador que actúa sobre ese espacio tal que $M^{-1} = M^\dagger$.

En el caso de la caminata Hadamard la evolución en cada paso es la siguiente:

$$\rho_{cm}(t+1) = U^{\sigma_z} H \rho_{cm}(t) H U^{-\sigma_z} \quad (2.24)$$

donde H (Hadamard) y σ_z actúan sobre el espacio de la moneda y U sobre el del caminante. U es el operador traslación en posición y actúa sobre el caminante en la línea como $U|n\rangle = |n+1\rangle$.

El operador U^{σ_z} actúa sobre el espacio total y puede interpretarse como una traslación del caminante controlada por el estado de la moneda:

$$U^{\sigma_z}|n, 0\rangle = U|n, 0\rangle = |n+1, 0\rangle \quad (2.25)$$

$$U^{\sigma_z}|n, 1\rangle = U^{-1}|n, 1\rangle = |n-1, 1\rangle \quad (2.26)$$

En el caso de la resolución de la caminata cuántica realizada por Nayak y Vishwanath se utilizó como operador sobre el espacio de la moneda a $H' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, que no es más que una rotación sobre H . En ambos casos, si el operador se aplica sobre el estado $|0\rangle$ ó $|1\rangle$ se obtiene una superposición coherente equipada entre estos estados. Esto concuerda con nuestra noción de “tirada de moneda” clásica.

En el caso del “anillo” o el ciclo, el operador U actúa de la siguiente manera:

$$U|n\rangle = |n+1(\text{mod}N)\rangle \quad \text{en base posición} \quad (2.27)$$

$$U|k\rangle = e^{-i2\pi\frac{k}{N}}|k\rangle \quad \text{en base de momentos} \quad (2.28)$$

donde $|n\rangle$ representa las posiciones discretas del anillo ($|n\rangle, n = 0, 1, \dots, N-1$) con $N = \dim(H_c)$.

La base de momentos ($|k\rangle, k = 0, 1, \dots, N-1$) se relaciona con la base de coordenadas por medio de la transformada de Fourier discreta:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi nk}{N}} |k\rangle \quad (2.29)$$

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} |n\rangle \quad (2.30)$$

Para resolver la Caminata Hadamard es conveniente utilizar la base de momentos, ya que en ella la traslación es diagonal.

Si partimos de un estado inicial producto entre el caminante y la moneda, podemos escribir a la matriz densidad inicial como:

$$\rho_{cm}(0) = \sum_{k,k'=0}^{N-1} c_{kk'} |k\rangle\langle k'| \otimes \rho_m(0) \quad (2.31)$$

por lo tanto, su evolución es:

$$\rho_{cm}(t) = \sum_{k,k'=0}^{N-1} c_{kk'} U^{\sigma_z} H \dots U^{\sigma_z} H |k\rangle\langle k'| \otimes \rho_m(0) H U^{-\sigma_z} \dots H U^{-\sigma_z} \quad (2.32)$$

$$= \sum_{k,k'=0}^{N-1} c_{kk'} |k\rangle\langle k'| \otimes (M_k)^t \rho_m(0) (M_{k'}^\dagger)^t \quad (2.33)$$

donde se ha utilizado que U es diagonal en base de momento, y por lo tanto:

$$U^{\sigma_z} H |k\rangle_c |l\rangle_m = |k\rangle_c e^{-i\frac{2\pi}{N}k\sigma_z} H |l\rangle_m \equiv |k\rangle_c M_k |l\rangle_m \quad (2.34)$$

$$M_k \equiv e^{-i\frac{2\pi}{N}k\sigma_z} H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_k} & e^{-i\varphi_k} \\ e^{i\varphi_k} & -e^{i\varphi_k} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

donde se define a $\varphi_k = \frac{2\pi k}{N}$

De esta manera el estado del sistema para un dado tiempo se puede escribir como:

$$\rho_c(t) = \sum_{k,k'=0}^{N-1} c_{kk'} f(k, k', t) |k\rangle\langle k'| \quad (2.36)$$

con

$$f(k, k', t) = Tr_m[(M_k)^t \rho_m(0) (M_{k'}^\dagger)^t] \quad (2.37)$$

La probabilidad de hallar al caminante en el estado $|n\rangle$ es:

$$P(n, t) = Tr_c[\rho_c(t) |n\rangle\langle n|] = \langle n | \rho_c(t) | n \rangle \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k,k'=0}^{N-1} c_{kk'} f(k, k', t) e^{i\frac{2\pi}{N}n(k-k')} \quad (2.39)$$

La resolución de la Caminata Hadamard se reduce a hallar $f(k, k', t)$. Esto se puede hacer analíticamente si se encuentran los autovectores y autovalores de M_k y se escribe el estado inicial de la moneda en esa base [6].

La resolución de la Caminata a través de la función $f(k, k', t)$, permite una fácil generalización a otros tipos de monedas. Más adelante veremos que la expresión (2.36) puede utilizarse en el caso de un mapa cuántico actuando como moneda.

2.3. Decoherencia en el Caminante

En este trabajo compararemos nuestros resultados de la caminata acoplada al caminante con un modelo de decoherencia.

La decoherencia de un sistema es producida por su interacción con el ambiente. Existen distintos modelos de decoherencia que proponen el tipo de ambiente y su interacción con el sistema.

En el caso de la caminata, los modelos de decoherencia plantean la interacción del ambiente con la moneda. El modelo de decoherencia del ambiente será exitoso en la medida en que pueda almacenar la información de la moneda, y de esta manera evitar las interferencias cuánticas.

2.3.1. Modelos de Decoherencia

Para el caso de un sistema de dos niveles, uno de los modelos más sencillos es el de Zurek, que propone una interacción de tipo $\sigma_z \sigma_z$ con un baño de N qubits. En este modelo, los términos no diagonales de la matriz densidad del qubit en la base de autovectores de σ_z convergen a cero a medida que $N \rightarrow \infty$. Si N es finito, luego de cierto tiempo, la información del ambiente vuelve al sistema y los términos no diagonales oscilan.

Es muy complicado (por ahora imposible) la implementación de este modelo de decoherencia ya que requiere el control de muchos qubits y de su interacción con el sistema.

Un modelo alternativo que supone unos pocos qubits y que puede ser implementado con mayor facilidad fue planteado por J. P. Paz, C. C. López et al. [6, 7, 8]. En este modelo los qubits del entorno son perturbados periódicamente con alteraciones aleatorias. Estas perturbaciones “borran” la información del entorno evitando que la misma sea devuelta al sistema.

La perturbación sobre el entorno consiste en una patada aleatoria que altera la polarización de los espines.

Tomaremos el caso de un entorno de 1 qubit, donde la perturbación consiste en una rotación sobre el eje \hat{y} en un ángulo ϵ elegido al azar en el intervalo $(-\alpha, \alpha)$.

El operador evolución correspondiente a la j -ésima patada es:

$$K_j = \exp(-i\epsilon_j \sigma_y^e) \quad (2.40)$$

donde σ_y^e actúa sobre el qubit del entorno¹.

Por otro lado, si el Hamiltoniano del sistema sin perturbar es $H_0 = \nu_s \sigma_z^s + \nu_e \sigma_z^e + \Omega \sigma_z^s \sigma_z^e$, su evolución temporal va a estar dada por:

$$\mathcal{U}(t) = \exp[i(\nu_s \sigma_z^s + \nu_e \sigma_z^e + \Omega \sigma_z^s \sigma_z^e)t] \quad (2.41)$$

Si agregamos las patadas con un frecuencia de Γ_k a la evolución, a un tiempo total $T = n/\Gamma_k$, obtenemos

$$\mathcal{U}_n(t) = K_n \mathcal{U}\left(\frac{1}{\Gamma_k}\right) K_{n-1} \mathcal{U}\left(\frac{1}{\Gamma_k}\right) \dots K_1 \mathcal{U}\left(\frac{1}{\Gamma_k}\right) \quad (2.42)$$

Al promediar sobre los ángulos ϵ_j en $(-\alpha, \alpha)$ por estar equidistribuidos, y trazar sobre el entorno, la matriz densidad reducida del sistema es

$$\rho_s(T, n) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\epsilon_1}{2\alpha} \dots \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\epsilon_n}{2\alpha} \text{Tr}_e[\mathcal{U}_n(T) \rho_{s,e}(0) \mathcal{U}_n^\dagger(T)] \quad (2.43)$$

¹Durante todo el trabajo tomaremos unidades apropiadas de manera tal que $\hbar = 1$

2.3.2. Caminante con Decoherencia

Aplicamos este modelo de decoherencia sobre la moneda del caminante. Elegimos $\Gamma = 1$, la máxima frecuencia de perturbación, o sea alterando la moneda en cada paso. Suponemos nuevamente, que el ángulo de las patadas está equidistribuido y lo promediamos. Obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_{cm}(t) = & \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\epsilon_t}{2\alpha} \dots \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\epsilon_1}{2\alpha} K_t U^{\sigma_z} H \dots K_1 U^{\sigma_z} H \rho_c(0) \otimes \rho_m(0) \times \\ & \times H U^{-\sigma_z} K_1^\dagger \dots H U^{-\sigma_z} K_t^\dagger \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para el caso de $\hat{n} = \hat{y}$ integramos y , por medio de álgebra de las matrices de Pauli (ver [6]), obtenemos

$$\rho_c(t)|_{\gamma, \hat{y}} = \sum_{k, k'=0}^{N-1} c_{k, k'} f(k, k', t, \gamma) |k\rangle \langle k'| \quad (2.45)$$

$$f(k, k', t, \gamma) = Tr_m [O_{\hat{y}}^t \rho_m(0)] \quad (2.46)$$

con $\gamma = \frac{\sin(2\alpha)}{\alpha}$ y con $O_{\hat{y}}$ un superoperador actuando sobre el espacio de la moneda.

Si escribimos a la matriz densidad inicial de la moneda como un vector en la esfera de Bloch

$$\rho_m(0) = \frac{I + p_x \sigma_x + p_y \sigma_y + p_z \sigma_z}{2} \quad (2.47)$$

la acción del superoperador $O_{\hat{y}}$ en la base estándar $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ se puede escribir matricialmente como

$$O_y = \begin{pmatrix} \cos(\phi_-) & -i \sin(\phi_-) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \sin(\phi_+) & \gamma \cos(\phi_+) \\ 0 & 0 & -\cos(\phi_+) & \sin(\phi_+) \\ -\gamma i \sin(\phi_-) & \gamma \cos(\phi_-) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

donde $\phi_{\pm} = \frac{2\pi}{N}(k \pm k')$.

Si $\gamma = 1$ ($\alpha = 0$) se recupera la caminata Hadamard, mientras que en el otro extremo, el de decoherencia total, $\gamma = 0$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) y se obtiene la caminata aleatoria clásica.

Existen otros modelos de decoherencia sobre la caminata Hadamard en la línea. Por ejemplo en el trabajo de Brun et al. [18] en cada paso se realiza una medición sobre la moneda con probabilidad p y se la deja intacta con una probabilidad $1 - p$.

Los resultados de este modelo son similares al del modelo expuesto anteriormente.

2.4. Conclusiones de la Caminata

Para la cuantización de la Caminata Aleatoria fue necesario introducir un sistema de dos estados, conocido como “moneda”. En esta versión determinista, focalizarse en el caminante y trazar sobre la moneda aporta el factor aleatorio.

Resultados previo muestran que la varianza en el caso de la caminata Hadamard clásica es proporcional a \sqrt{t} , mientras que en el caso cuántico es lineal a t .

La distribución de probabilidades en ambos casos es diferente: en el clásico es una gaussiana centrada en el estado inicial, mientras que en el cuántico las probabilidades de permanecer en el estado inicial son pequeñas y el estado más probable de encontrar a la partícula se ubica en $n = n_0 \pm \frac{t}{\sqrt{2}}$.

Luego, la Caminata Hadamard fue planteada con el formalismo de la matriz densidad. Esta nueva formulación es más general, y permitirá acoplar en forma natural al caminante con la familia de mapas del panadero.

Por último podemos concluir que la diferencia más importante entre ambas caminatas se debe a la información de la moneda. En el caso clásico, la moneda no guarda ninguna información, mientras que en el cuántico los distintos caminos clásicos interfieren, debido que en la moneda queda información de tiradas anteriores.

Si se quiere obtener un comportamiento clásico en la caminata cuántica, es necesario evitar que la moneda guarde información. Por ejemplo, se puede medir el estado de la moneda en cada iteración, utilizar una moneda cuántica distinta en cada tirada ó agregar un medio ambiente tal que la información de la moneda fluya en ese sentido.

También se mostró un modelo de decoherencia no trivial, basado en el de Zurek, que permite controlar el paso de la caminata cuántica a la clásica por medio de una variable continua.

En los próximos capítulos estudiaremos al caminante acoplado a un sistema complejo (caótico), simulando un entorno más realista y compararemos los resultados con el modelo de decoherencia.

Capítulo 3

Mapa del panadero

*What we imagine is order
is merely the prevailing form of chaos.*

Kerry Thornley (1938 - 1998)

En este trabajo se utiliza el mapa del panadero cuántico como moneda y ambiente de una caminata cuántica.

El mapa del panadero cuántico es representado en forma de circuito cuántico. Este sistema de n qubits puede ser interpretado como miembro de una familia de n mapas posibles, que van desde el mapa del panadero convencional, al mapa de n monedas independientes. Todos estos mapas, salvo el de monedas independientes, son caóticos y rápidamente generan entrelazamiento entre los qubits.

El mapa del panadero cuántico pudo ser implementado por primera vez en el año 2002 por Weinstein et al. [9] utilizando un procesador de resonancia magnética nuclear de 3 qubits.

En este capítulo se pretende estudiar el mapa del panadero clásico y sus posibles cuantizaciones, su interpretación en forma de circuitos cuánticos y su generalización a una familia de mapas.

3.1. Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es un proceso determinista que define la evolución temporal de un sistema a través de una regla matemática.

Un ejemplo de sistema dinámico, con variable temporal continua, es un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Un sistema dinámico con tiempo discreto es, por ejemplo, un mapa de N variables escrito de la siguiente manera:

$$\vec{x}_{i+1} = F(\vec{x}_i) \tag{3.1}$$

donde F es la función que define al mapa y \vec{x}_i es un vector de N componentes.

Esto quiere decir que para obtener el estado del sistema a tiempo $i = 1$ hay que aplicar el mapa al estado inicial. Si se quiere el estado a tiempo $i = 2$ hay que aplicar el mapa al estado en el tiempo $i = 1$, o aplicar dos veces el mapa al estado inicial, y así sucesivamente.

Un sistema dinámico con tiempo continuo de N variables puede reducirse a un mapa de $N - 1$ variables a través de una sección de Poincaré o de una secuencia de vistas estroboscópicas.

Cuando un sistema no lineal presenta un grado de complejidad tal que la evolución de un estado parece ser aleatoria, y que la misma depende fuertemente de las condiciones iniciales, se dice que el sistema es caótico. El comportamiento caótico en un sistema dinámico continuo puede encontrarse para sistemas de al menos tres grados de libertad, mientras que para un mapa son necesarios, pero no suficientes, por lo menos dos grados de libertad.

Dentro de los sistemas dinámicos podemos distinguir a los sistemas lineales que son los más sencillos de analizar.

Si se quiere analizar un mapa no lineal, se puede caracterizar su comportamiento a través de análisis local alrededor de ciertos puntos. Este procedimiento es útil también para encontrar resultados globales en problemas no lineales.

Desarrollando el mapa a primer orden alrededor del punto \vec{x}_0 , se obtiene:

$$F(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}) = \vec{x}_0 + DF(\vec{x}_0)\delta\vec{x} \quad (3.2)$$

donde DF es la matriz Jacobiana.

Definimos $\vec{x}^{(t)}$ y $\delta\vec{x}^{(t)}$ como la evolución del punto y de su desplazamiento:

$$\vec{x}^{(t)} = F^t(\vec{x}_0) \quad (3.3)$$

$$\delta\vec{x}^{(t)} = F^t(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}) - F^t(\vec{x}_0) \quad (3.4)$$

Por lo tanto:

$$\delta\vec{x}^{(t+1)} = DF(\vec{x}^{(t)})\delta\vec{x}^{(t)} \quad (3.5)$$

$$\delta\vec{x}^{(t)} = DF^t(\vec{x}_0)\delta\vec{x} \quad (3.6)$$

con

$$DF^t(\vec{x}_0) = DF(\vec{x}^{(t-1)})DF(\vec{x}^{(t-2)}) \dots DF(\vec{x}^{(1)})DF(\vec{x}_0) \quad (3.7)$$

El factor $\frac{|\delta\vec{x}^{(t)}|}{|\delta\vec{x}|}$ da una medida de la evolución de dos puntos muy cercanos. A partir de este factor se define el exponente de Lyapunov de la siguiente manera:

$$\lambda(\vec{x}_0, \delta\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta\vec{x}^{(t)}|}{|\delta\vec{x}|} \right) \quad (3.8)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|DF^t(\vec{x}_0)\delta\vec{x}|}{|\delta\vec{x}|} \right) \quad (3.9)$$

Este exponente caracteriza la dependencia del problema a las condiciones iniciales. Para $\lambda > 1$, dos puntos cercanos inicialmente se separan, mientras que para $\lambda < 1$, se acercan.

Se conoce como punto fijo a las coordenadas en el espacio de fases tales que permanecen constante bajo la acción del mapa. En el caso de que el mapa sea una sección de Poincaré de un flujo, el punto fijo del mapa corresponde a una órbita periódica de ese flujo.

Las órbitas periódicas del mapa de período T , son los T puntos que se repiten ante T iteraciones del mapa. Por ejemplo un punto fijo es una órbita periódica del mapa con período 1.

Dentro de la matriz Jacobiana del mapa puede encontrarse mucha información acerca de su dinámica. Por ejemplo, la estabilidad de un punto puede analizarse a través del módulo de los autovalores de la matriz Jacobiana. En la dirección asociada a un autovalor con módulo menor que 1 hay una *variedad estable* y en la asociada a un autovalor mayor que 1 hay una *variedad inestable*. En particular, se dice que un mapa es *hiperbólico* si ninguno de sus autovalores tiene módulo igual a 1.

Si analizamos al sistema desde el punto de vista del formalismo Hamiltoniano de la Mecánica Clásica, se puede pensar al mapa como una transformación en las coordenadas generalizadas $\vec{x}_i = \{\vec{q}_i, \vec{p}_i\}$.

3.2. Mapa del Panadero

El mapa del Panadero es uno de los sistemas dinámicos más sencillos que presentan comportamiento caótico. El mapa del panadero actúa sobre el espacio de fases cuadrado con $q \in [0; 1)$ y $p \in [0; 1)$ como una transformación que preserva área. De esta manera se puede pensar al mapa como una transformación canónica con determinante de la matriz Jacobiana igual a 1 e invertible.

La definición analítica del mapa es la siguiente:

$$q_{i+1} = 2q_i - [2q_i] \quad (3.10)$$

$$p_{i+1} = \frac{p_i + [2q_i]}{2} \quad (3.11)$$

donde los corchetes simbolizan la parte entera de un número real.

La aplicación del mapa del Panadero en cada paso puede pensarse geoméricamente de la siguiente manera:

El espacio de fases es estirado al doble en la dirección q y contraído a la mitad en la dirección p . Luego la mitad que no pertenece al cuadrado es colocada en el espacio vacío de manera que sólo se ocupe el cuadrado del espacio de fases (ver figura 3.1).

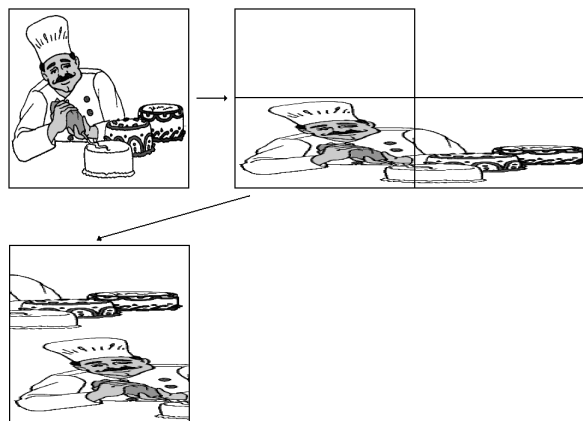


Figura 3.1: El mapa del panadero en cada iteración estira al doble en la dirección de q y contrae a la mitad en p . La región fuera del toro unitario es cortada y pegada tal como se muestra en la parte de abajo de la figura.

El efecto del “estiramiento” y la “discontinuidad” del corte es lo que produce que este mapa tenga comportamiento caótico. Debido a que se estira y se contrae el mismo factor en las direcciones p y q , el mapa hiperbólico preserva área.

Los valores de $p > \frac{1}{2}$ luego de aplicar el mapa provienen de la región de $q > \frac{1}{2}$ y los de $p < \frac{1}{2}$ de $q < \frac{1}{2}$.

La acción de este mapa también puede ilustrarse fácilmente a través de una dinámica simbólica conocida como *corrimiento de Bernoulli*. Esta consiste en escribir los valores de $q, p \in [0; 1)$ en notación binaria:

$$q = 0.\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \dots \quad p = 0.\epsilon_{-1}\epsilon_{-2}\epsilon_{-3}\epsilon_{-4} \dots \quad (3.12)$$

De esta manera se puede representar a un punto en el espacio de fases como:

$$(p, q) = \dots \epsilon_{-4}\epsilon_{-3}\epsilon_{-2}\epsilon_{-1}.\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \dots \quad (3.13)$$

La acción del mapa en esta notación es equivalente a mover el punto un decimal hacia la derecha, produciendo que el bit más significativo en q pase a ser el más significativo en p .

$$q' = 0.\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \dots \quad p' = 0.\epsilon_0\epsilon_{-1}\epsilon_{-2}\epsilon_{-3} \dots \quad (3.14)$$

$$(p, q) = \dots \epsilon_{-2}\epsilon_{-1}.\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 \dots \longrightarrow (p', q') \dots \epsilon_{-2}\epsilon_{-1}\epsilon_0.\epsilon_1\epsilon_2 \dots \quad (3.15)$$

A través de esta notación es muy sencillo hallar las órbitas periódicas del mapa. Un punto fijo se da en $p = 0$ y $q = 0$, ya que (p, q) es invariante ante el corrimiento del punto hacia la derecha (o izquierda).

La órbita periódica de período dos puede representarse simbólicamente sin punto, como el siguiente invariante temporal: $\dots 0101010101 \dots$

La ubicación del punto define el presente, o sea, el valor de p y de q en cada iteración. En este caso los valores de p y q que se repiten ante iteraciones son $q = \frac{1}{3}, p = \frac{2}{3}$ y $q = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{3}$

Por último podemos notar que el mapa es uniformemente hiperbólico con variedad estable en $q = cte$ y variedad inestable en $p = cte$, y posee un exponente de Lyapunov $\lambda = \ln 2$.

3.3. Cuantización del Mapa del Panadero

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, un mapa cuántico no es más que una transformación unitaria operando en un espacio de Hilbert. Esta operación, además debe recuperar ciertas propiedades de un mapa clásico en el límite semiclásico, o sea, cuando la dimensión del espacio de Hilbert tiende a infinito.

La cuantización del mapa del panadero es la construcción de una dinámica cuántica en correspondencia con la dinámica del panadero clásico. Antes de realizar cualquier intento de cuantización de dinámica es necesario cuantizar el espacio de fases.

3.3.1. Cuantización del Espacio de Fases

En primer lugar se busca la representación cuántica del plano infinito (q, p) , y se imponen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I} \quad (3.16)$$

Los autoestados de \hat{q} y de \hat{p} forman una base completa:

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad \hat{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} |q\rangle\langle q|dq \quad (3.17)$$

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad \hat{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle\langle p|dp \quad (3.18)$$

y están relacionados por

$$\langle q_j|p_k\rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}pq} \quad (3.19)$$

Las funciones de onda se definen como los estados en las bases de autoestados: $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ y $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$.

En el espacio de fases cuadrado $[0, 1) \times [0, 1)$, se imponen condiciones de contorno periódicas. Si los observables son periódicos, los estados cuánticos en el toro unitario deben satisfacer:

$$\psi(q + 1) = e^{i2\pi\chi_q}\psi(q), \quad \tilde{\psi}(p + 1) = e^{-i2\pi\chi_p}\tilde{\psi}(p) \quad (3.20)$$

con

$$\tilde{\psi}(p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i\frac{pq}{\hbar}} \psi(q) dq \quad (3.21)$$

donde $2\pi\chi_p$ y $2\pi\chi_q$ son conocidos como *ángulos de Floquet* con $0 \leq \chi_p, \chi_q < 1$.

La ecuación 3.20 sólo tiene solución si:

$$2\pi N\hbar = 1, \quad \text{con } N \text{ entero} \quad (3.22)$$

En el caso del toro, el espacio de Hilbert es finito. Dados los ángulos de Floquet, el espacio de Hilbert de dimensión N queda determinado (ver figura 3.2).

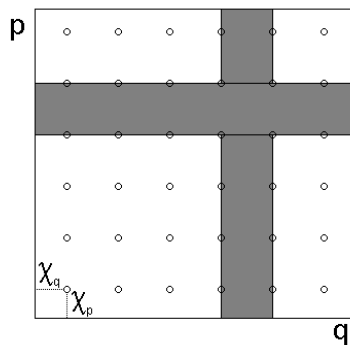


Figura 3.2: Espacio de fases del toro unitario cuantizado. En gris se pueden ver los autoestados de posición (vertical) y momento (horizontal)

Los autovectores de la posición y del momento son respectivamente:

$$|q_j\rangle = \left| \frac{j+\chi_q}{N} \right\rangle, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.23)$$

$$|p_k\rangle = \left| \frac{k+\chi_p}{N} \right\rangle, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

El cambio de base entre posición y momento (versión discreta de 3.21) define una matriz unitaria. Esta matriz puede considerarse una transformada de Fourier discreta con ángulos de Floquet:

$$\langle q_j | p_k \rangle = N^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{2\pi}{N}(j+\chi_q)(k+\chi_p)} \equiv (F_N^{\chi_q, \chi_p}) \quad (3.25)$$

La elección de los ángulos de Floquet define las simetrías del toro:

- La simetría de reversión temporal se define a través del intercambio entre p y q . $T : p \leftrightarrow q$. Esta simetría se da sólo cuando $\chi_q = \chi_p$.
- La simetría de paridad R existe cuando $q \rightarrow 1 - q$, $p \rightarrow 1 - p$. En el caso del toro discreto esta simetría se cumple cuando $\chi_q + \chi_p = 1$.

3.3.2. Cuantización de la Dinámica

No existe un procedimiento sistemático para la cuantización de mapas. Se busca un operador unitario U sobre el espacio de Hilbert construido, que tenga las mismas simetrías y propiedades de la dinámica que el mapa clásico. Además es necesario que se recupere el mapa clásico tendiendo $N \rightarrow \infty$ y, en el caso de mapa del panadero, que la dimensión del espacio sea par.

Existen muchos trabajos en los que se explica detalladamente la cuantización del mapa del panadero [12, 13, 14, 15].

En este caso para la cuantización del mapa utilizaremos la simplicidad de su dinámica simbólica de *corrimientos de Bernoulli*. La cuantización se basa en el hecho de que la iteración del mapa produce que el bit más significativo en posición pasa a ser el más significativo en momento.

Escribimos al mapa en una representación mixta, donde actúa sobre las coordenadas y su acción queda expresada en momentos. Se pide que el bit más significativo sea el mismo antes y después del mapa, y que el resto sea cambiado de base con la transformada de Fourier discreta.

En notación matricial y circuital el mapa queda escrito como:

$$B_{mixto}^{\chi_q, \chi_p} = \begin{pmatrix} F_{\frac{N}{2}}^{\chi_q, \chi_p} & 0 \\ 0 & F_{\frac{N}{2}}^{\chi_q, \chi_p} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

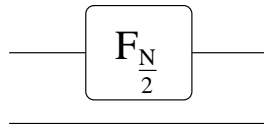


Figura 3.3: Circuito del mapa del Panadero en representación mixta

Para representar el mapa en posición sólo es necesario antitransformar Fourier todos los bits:

$$B_{pos}^{\chi_q, \chi_p} = (F_N^{\chi_q, \chi_p})^{-1} \begin{pmatrix} F_{\frac{N}{2}}^{\chi_q, \chi_p} & 0 \\ 0 & F_{\frac{N}{2}}^{\chi_q, \chi_p} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

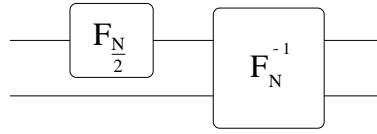


Figura 3.4: Circuito del mapa del Panadero en representación de coordenadas

Las elecciones más comunes en los ángulos de Floquet son las que dan condiciones periódicas, conocida como las de *Balasz y Voros* [12], $\chi_p = \chi_q = 0$, y las antiperiódicas de *Saraceno* [13, 14], $\chi_p = \chi_q = \frac{1}{2}$.

3.4. Familias de Mapas del Panadero

A partir del mapa del panadero cuántico, Schack y Caves [16, 17] obtuvieron una familia de mapas caóticos que convergen al mapa del panadero en el límite semiclásico. La elección de los ángulos de Floquet en sus trabajos es la de Saraceno ($\chi_p = \chi_q = \frac{1}{2}$).

Esta familia de mapas se define en un espacios de Hilbert con dimensión igual a potencias de 2, mientras que en el panadero convencional sólo se pedía que fuese par. El espacio de Hilbert puede ser pensado como producto tensorial de espacios de dos dimensiones, o sea como un espacio generado por qubits.

Se define la transformada de Fourier parcial actuando sobre l qubits:

$$\hat{G}_n \equiv \hat{I}_{2^n} \otimes \hat{F}_{2^{l-n}}, \quad n = 0, \dots, l \quad (3.28)$$

donde \hat{I}_{2^n} es el operador identidad actuando sobre los n primeros qubits y $\hat{F}_{2^{l-n}}$ es la transformada de Fourier discreta actuando sobre el resto de los qubits. En los casos límites donde $n = 0$ se obtiene $\hat{G}_0 = \hat{F}_N$, y en $n = l$, $\hat{G}_l = i\hat{I}$.

La familia de mapas del panadero se define como:

$$\hat{B}_{l,n} \equiv \hat{G}_{n-1} \circ \hat{S}_n \circ \hat{G}_n^{-1} \quad (3.29)$$

donde \hat{S}_n es el operador de “shift” que actúa sobre los primeros n qubits

$$\hat{S}_n |x_1\rangle |x_2\rangle \dots |x_n\rangle |x_{n+1}\rangle \dots |x_l\rangle = |x_2\rangle \dots |x_n\rangle |x_1\rangle |x_{n+1}\rangle \dots |x_l\rangle \quad (3.30)$$

donde \hat{S}_1 es el operador identidad.

Podemos notar que \hat{S}_n conmuta con \hat{G}_n^{-1} y la expresión (3.29) se puede escribir como:

$$\hat{B}_{l,n} = \hat{I}_{2^{n-1}} \otimes (\hat{F}_{2^{l-n+1}} \circ (\hat{I}_2 \otimes \hat{F}_{2^{l-n}}^{-1})) \circ \hat{S}_n \quad (3.31)$$

El mapa del panadero de Balazs-Voros-Saraceno es $\hat{B}_{l,1}$. El otro caso límite es $\hat{B}_{l,l}$ que es lo que usaremos más adelante como “Many Coins”. Este último mapa es diferente a los demás ya que es un mapa regular, y es el único que no tiene al Panadero como límite semiclásico. Todos los mapas salvo este último poseen un espectro no degenerado. El *Many Coins* es estrictamente periódico con un período igual a $4l$, o sea $\hat{B}_{l,l}^{4l} = 1$. Esto implica que todos sus autovalores son $4l$ -ésimos raíces de la unidad, y por lo tanto hay degeneración cuando la cantidad de qubits supera a 4.

3.4.1. Interpretación Como Corrimientos de Bernoulli

Con condiciones antiperiódicas, los autoestados de posición y momento pueden escribirse en notación binaria.

$$|q_j\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes \dots \otimes |x_l\rangle \quad (3.32)$$

$$|p_k\rangle = |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \otimes \dots \otimes |a_l\rangle \quad (3.33)$$

donde j y q_j , y k y p_k se escriben como:

$$j = x_1x_2\dots x_l, 0 = \sum_{r=1}^l x_r 2^{l-r} \quad q_j = \frac{j+\frac{1}{2}}{N} = 0.x_1x_2\dots x_l1 \quad (3.34)$$

$$k = a_1a_2\dots a_l, 0 = \sum_{r=1}^l a_r 2^{l-r} \quad p_k = \frac{k+\frac{1}{2}}{N} = 0.a_1a_2\dots a_l1 \quad (3.35)$$

De esta manera podemos definir como notación para el estado posición:

$$|q_j\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}} | \bullet x_1x_2\dots x_l \rangle \quad (3.36)$$

donde la fase global se debe a la antiperiodicidad.

Ampliamos nuestra notación a la transformada de Fourier discreta sobre los $l - n$ qubits menos significativos (3.28).

$$|a_{l-n}\dots a_1 \bullet x_1\dots x_n\rangle \equiv \hat{G}_n |x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle \otimes |a_1\rangle \otimes \dots \otimes |a_{l-n}\rangle \quad (3.37)$$

El estado $|a_{l-n}\dots a_1 \bullet x_1\dots x_n\rangle$ está localizado en posición en una región de un ancho de $\frac{1}{2^n}$ centrado en $0.x_1\dots x_n1$, y en momento con un ancho de $\frac{1}{2^{l-n}}$ centrado en $0.a_1\dots a_{l-n}1$. La acción del mapa $\hat{B}_{l,n}$ sobre este estado produce el corrimiento del punto un lugar hacia la derecha.

En esta notación, la acción del mapa del panadero cuantizado es equivalente a la del mapa clásico, en términos del corrimiento de Bernoulli.

La familia de mapas del panadero cuántico puede describirse como:

$$\hat{B}_{l,n} = \sum_{x_1,\dots,x_n} \sum_{a_1,\dots,a_{l-n}} |a_{l-n}\dots a_1 x_1 \bullet x_2\dots x_n\rangle \langle a_{l-n}\dots a_1 \bullet x_1x_2\dots x_n| \quad (3.38)$$

3.4.2. Interpretación Circuital

Con el fin de interpretar a la familia de Mapas del Panadero en forma de circuitos cuánticos, describimos la ecuación (3.31) de la siguiente manera:

$$\hat{B}_{l,n} = \hat{1}_{2^{n-1}} \otimes \hat{B}_{l-n+1, 1} \circ \hat{S}_n \quad (3.39)$$

que muestra que la acción de $\hat{B}_{l,n}$ es un “shift” sobre los n qubits más significativo seguido de la aplicación del mapa del panadero convencional sobre los $l - n + 1$ qubits menos significativos.

Se puede notar que generalización de la familia del panadero para ángulos de Floquet arbitrarios es trivial.

El circuito de $\hat{B}_{l,n}$ es el de la figura 3.5.

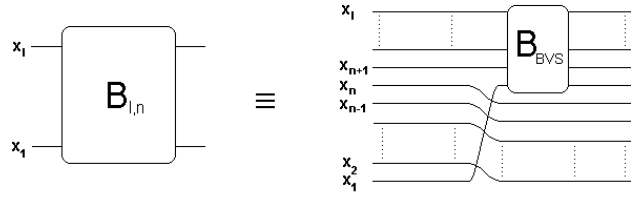


Figura 3.5: Circuito del miembro n de la familia del Panadero para l qubits

Por ejemplo para una familia de mapas del panadero de 4 qubits con ángulos de Floquet nulos se obtienen 4 mapas. El mapa $\hat{B}_{4,1}$ es el mapa convencional de Balazs-Voros-Saraceno. Por otro lado, el mapa $\hat{B}_{4,4}$ es un mapa integrable, cuya interpretación es la de 4 monedas Hadamard independientes que se van intercambiando en cada iteración (ver figura 3.6).

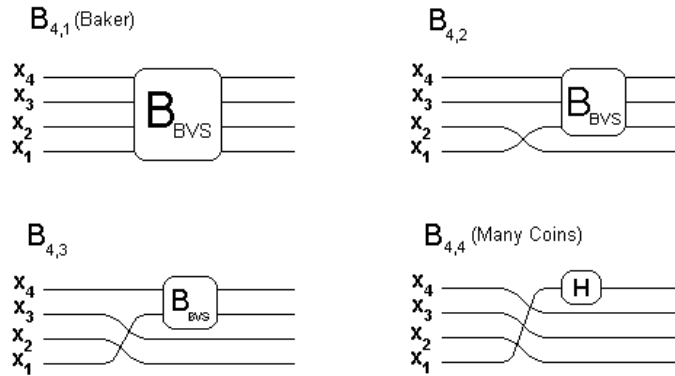


Figura 3.6: Circuitos de la familia del Panadero para 4 qubits. Arriba a la izquierda se ve la familia del Panadero convencional y abajo en la derecha el “many coins”

3.4.3. Interpretación Como Nueva Cuantización

Es posible obtener una nueva interpretación de la familia de mapas del Panadero en función de cuantizaciones de iteraciones del mapa del Panadero clásico. Esta nueva formulación fue formulada recientemente por Saraceno y todavía no fue publicada. La idea consiste en cuantizar un número T de iteraciones del mapa clásico, $\hat{B}^{(T)}$ [14].

Por ejemplo, usamos el mismo procedimiento de cuantización para $\hat{B}^{(2)}$, dos iteraciones del mapa del Panadero clásico. Este divide al toro unitario en cuatro regiones: $q \in [0, \frac{1}{4})$, $q \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $q \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ y $q \in [\frac{3}{4}, 1)$. Cada una de estas regiones “verticales” es mapeada a una región “horizontal” tal como se muestra en la figura 3.7.

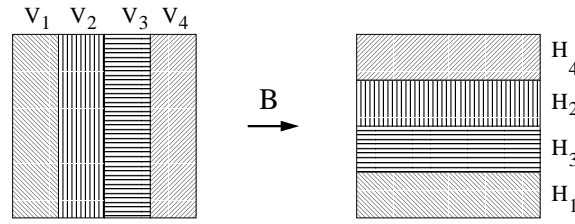


Figura 3.7: Comportamiento de 2 iteraciones del mapa del Panadero clásico. Cada una de las regiones verticales es mapeada a una región horizontal

El mapa cuántico $\hat{B}^{(2)}$ en un espacio de Hilbert de dimensión N queda expresado en forma matricial en representación de coordenadas como:

$$B_{pos}^{(2)} = F_N^{-1} \begin{pmatrix} F_{\frac{N}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\frac{N}{4}} & \\ 0 & F_{\frac{N}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\frac{N}{4}} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

En general el mapa $\hat{B}^{(T)}$ de l qubits, se representa circuitalmente en forma mixta como una transformada de Fourier discreta (con ángulos de Floquet) actuando sobre los $T-l$ qubits menos significativos y un intercambio de qubits en los T qubits más significativos. Este intercambio consiste en “swaps” entre los qubits más y menos significativos, los siguientes más y menos significativos y así sucesivamente (entre estos T qubits) (ver figura 3.8).

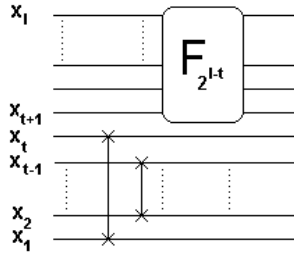


Figura 3.8: Cuantización del mapa del panadero aplicado T veces en representación mixta

Podemos notar que $\hat{B}^{(0)} = \hat{1}$, $\hat{B}^{(1)} = \hat{B}$ y que para l qubits podemos tener hasta el mapa $\hat{B}^{(l)}$.

Clásicamente, el mapa del panadero es equivalente a aplicar dos iteraciones y luego su inversa, o sea, cumple con la propiedad de composición de grupo $B_{clas}^{T+T'} = B_{clas}^T B_{clas}^{T'}$. En el caso cuántico esta propiedad no se cumple.

Podemos pensar que todos los mapas cuánticos del tipo $\hat{B}^{(n-1)\dagger} \hat{B}^{(n)}$ con $n = 1, \dots, l$ son cuantizaciones del mapa del Panadero. Estos tipos de mapas no son más que los ya definidos en (3.29, 3.31, 3.39), o sea, $\hat{B}_{l,n} = \hat{B}^{(n-1)\dagger} \hat{B}^{(n)}$.

Por ejemplo si se representa al circuito $\hat{B}^{(3)\dagger}\hat{B}^{(4)}$, se obtiene:

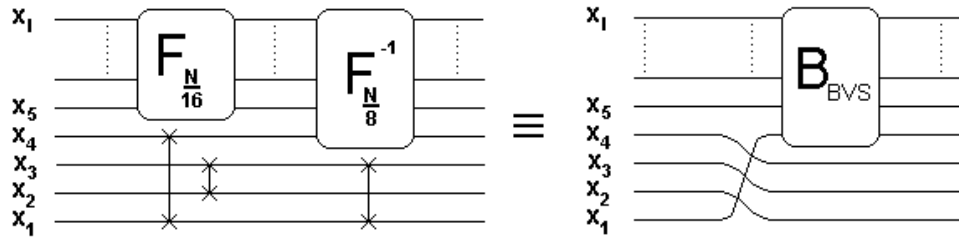


Figura 3.9: Circuito del mapa $\hat{B}^{(3)\dagger}\hat{B}^{(4)}$ en la izquierda y Circuito de $\hat{B}_{1,4}$ en la derecha. Ambos circuitos son equivalentes.

Capítulo 4

Evolución del Caminante y del Panadero

*La vida de cada hombre es un camino hacia sí mismo,
el ensayo de un camino, el boceto de un sendero.*
Hermann Hesse (1877 - 1962)

Antes de realizar el acoplamiento entre el sistema (caminante) y su entorno (mapa del panadero), analizaremos a cada uno de los sistemas por separado.

4.1. Análisis de la Caminata Hadamard

En esta sección estudiaremos la distribución de probabilidades y las funciones de Wigner de la caminata Hadamard en la línea infinita y el ciclo.

Nos centraremos en el análisis de la línea con estados iniciales del caminante localizados en posición, y estados iniciales de la moneda en autoestados del espín en z o estado “simétrico” (definido como $|0\rangle + i|1\rangle$).

4.1.1. Probabilidad

En la figura 4.1 se muestra la distribución de probabilidades para la caminata Hadamard en la línea infinita con la moneda en estado inicial $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$.

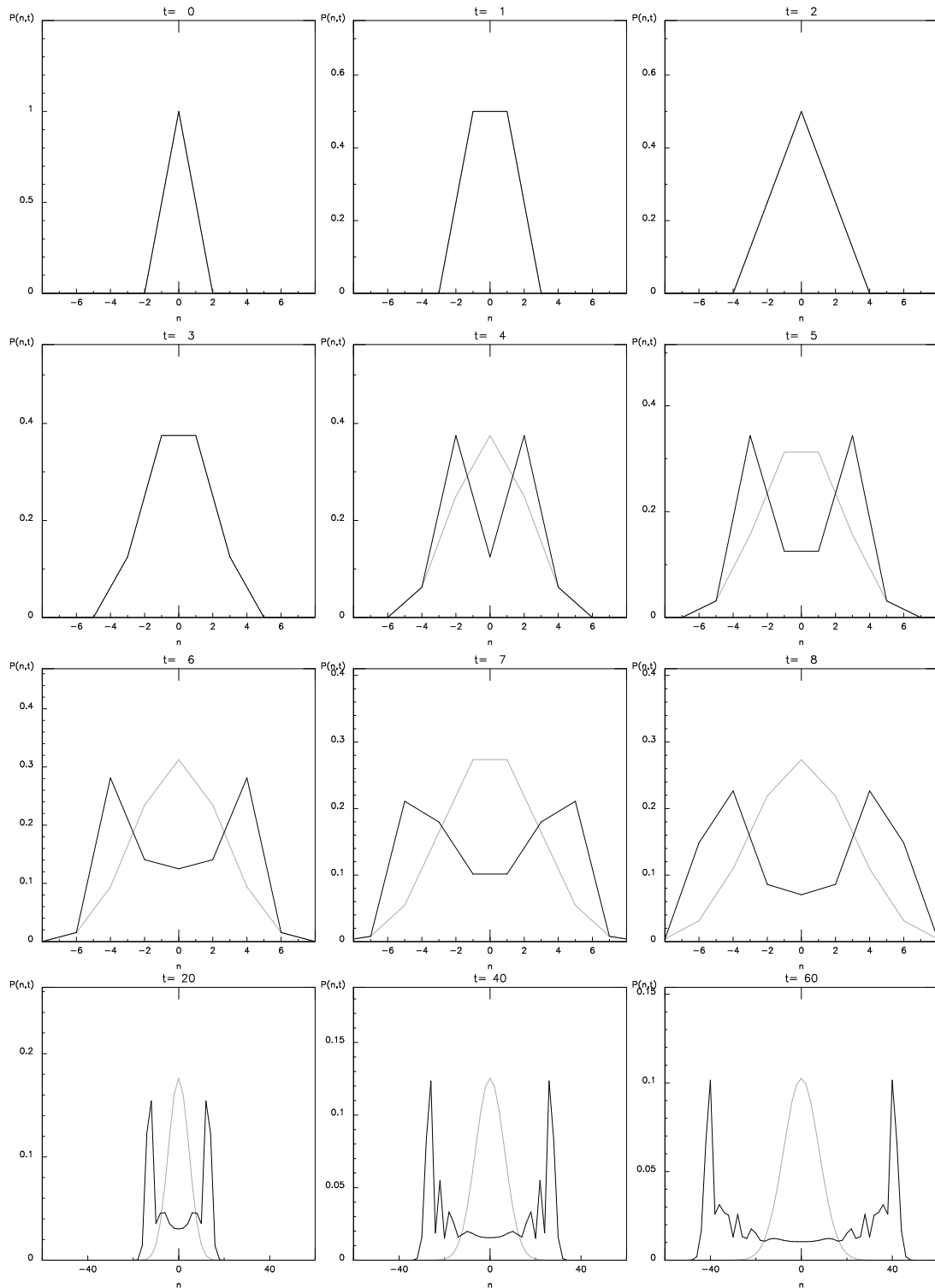


Figura 4.1: Distribución de probabilidades para la caminata Hadamard con estado inicial de la moneda simétrico. Sólo son graficados los sitios con $n - t$ impar, ya que el resto tiene probabilidades nulas.

A través de las probabilidades se puede definir una cantidad que cuantifica la diferencia entre dos distribuciones. Esta magnitud se denomina distancia variacional total $\nu_{12}(t)$, y queda definida como

$$\nu_{12}(t) = ||P_1(n, t) - P_2(n, t)|| = \sum_{n=0}^{M-1} |P_1(n, t) - P_2(n, t)| \quad (4.1)$$

La caminata en el ciclo es similar a la de la línea infinita hasta tiempos del orden de la mitad de sitios.

En el límite de infinitos pasos la caminata aleatoria clásica en un ciclo de M sitios tiende a:

$$P_{lim}(n) = \frac{1}{M} \quad \text{para } M \text{ impar} \quad (4.2)$$

$$P_{lim}(n) = \begin{cases} \frac{2}{N} & \text{si } t + n + n_0 \text{ par} \\ 0 & \text{si } t + n + n_0 \text{ impar} \end{cases} \quad \text{para } M \text{ par} \quad (4.3)$$

En el caso de la caminata cuántica la probabilidad en función del tiempo para un sitio fijo en el ciclo, es una función “quasi-periódica”, y por lo tanto típicamente no converge a ningún límite. Promediando esta función en el tiempo, se puede definir la distribución promedio $\overline{P(n, t)}$ dada por

$$\overline{P(n, t)} = \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} P(n, t') \quad (4.4)$$

Una cantidad de las más relevantes que se observan en el ciclo es el tiempo de mezcla. Este se define como la mínima cantidad de pasos que tiene que dar el caminante, de manera tal que su distancia variacional total con una distribución de probabilidades límite sea siempre menor a un valor dado.

En este trabajo no analizaremos el tiempo de mezcla debido a que nos focalizamos en la línea, y además su cálculo (con el acoplamiento del panadero) requiere de mucho tiempo computacional.

4.1.2. Función de Wigner

En la figura 4.2 se muestra la evolución de la caminata Hadamard en un ciclo de 64 sitios. El estado inicial es localizado en posición para el caminante y “simétrico” para la moneda.

A tiempos cortos, podemos clasificar las interferencias en dos tipos: las que se encuentran en el centro, que se deben a superposiciones coherentes de estados posición; y las que se encuentran en los bordes, que son producidas debido a las condiciones periódicas del ciclo. Estas últimas pueden ser dejadas de lado si se quiere analizar sólo la línea infinita.

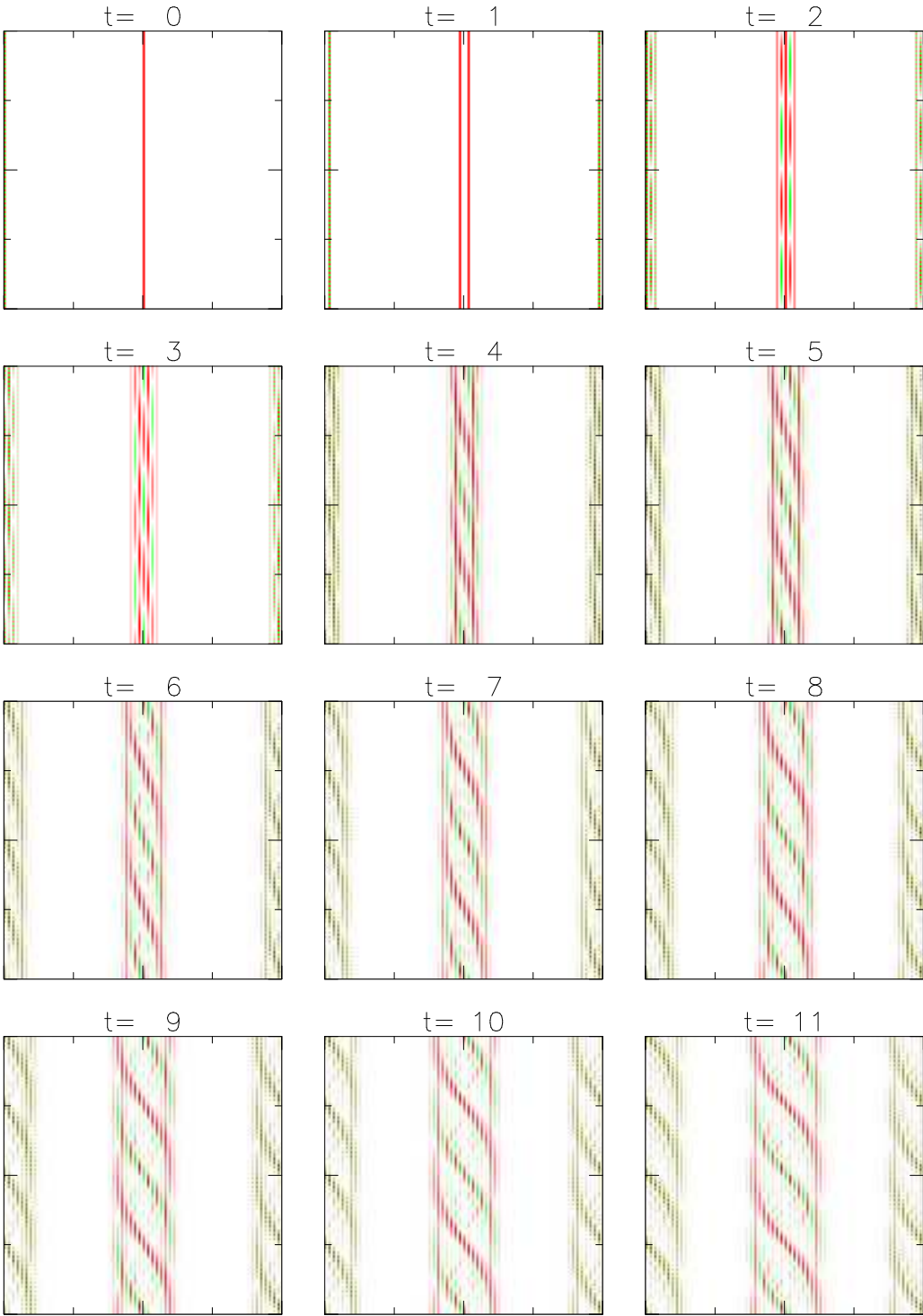


Figura 4.2: Funciones de Wigner de la evolución de la caminata Hadamard. El espacio del caminante es de 64 e inicialmente se encuentra localizado en el medio. El estado inicial de la moneda es el “simétrico”.

Como ejemplo de la función de Wigner del caminante en el ciclo, en la figura 4.3 se muestra la función de Wigner de un caminante localizado en posición en un ciclo de 32 sitios con pasos temporales de 10 iteraciones. Se puede ver que las interferencias ocupan rápidamente todo el espacio de fases.

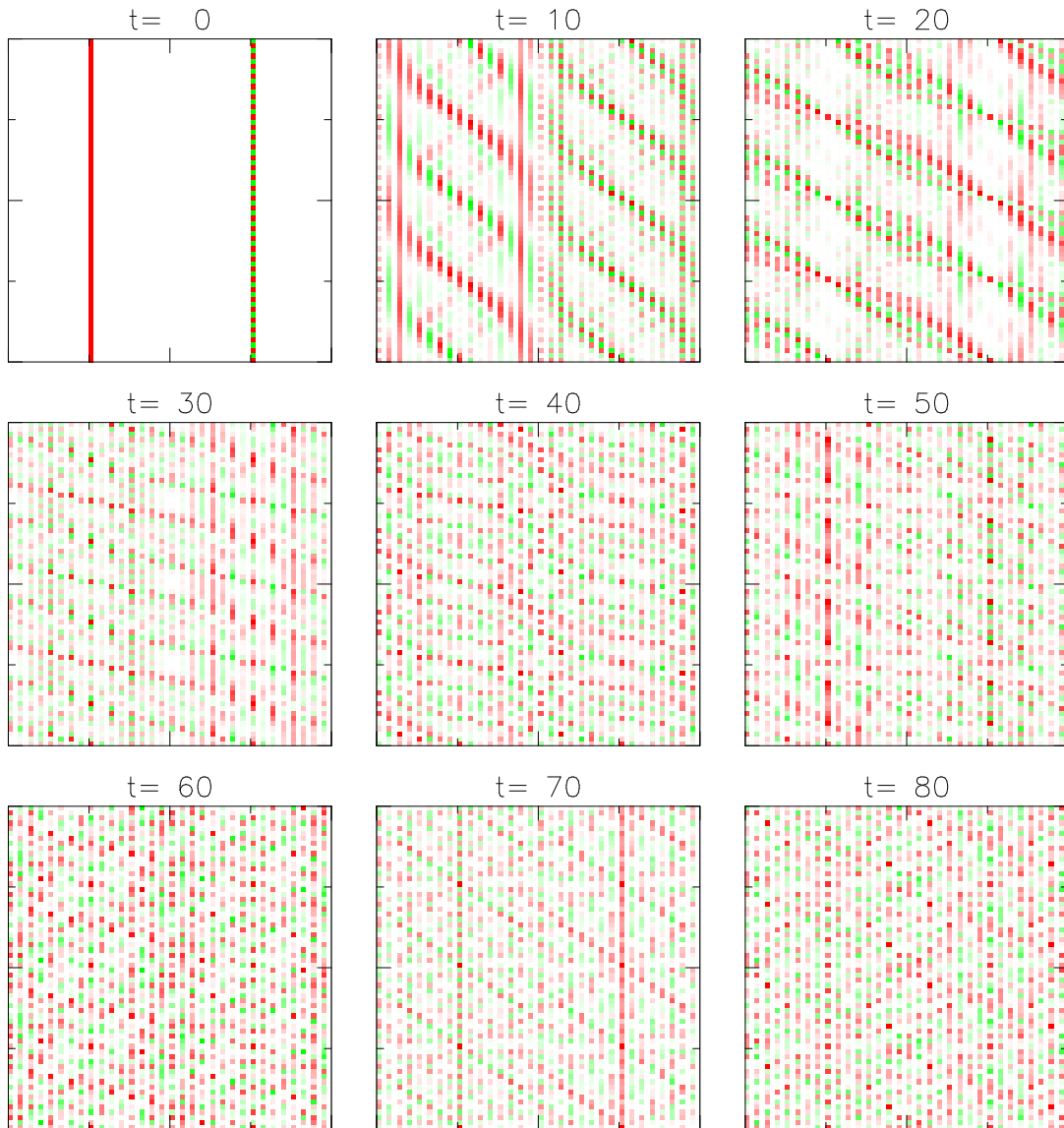


Figura 4.3: Funciones de Wigner de la evolución de la caminata Hadamard (en rojo toma valores positivos y en verde negativos). El espacio del caminante es de 32 e inicialmente se encuentra localizado en el octavo sitio (un cuarto del espacio). El estado inicial de la moneda es el “simétrico”.

4.2. Análisis del Panadero

En esta sección se analiza la evolución del panadero para distintas dimensiones del espacio de Hilbert y estados iniciales. Sólo son estudiados los panaderos con condiciones periódicas y antiperiódicas. Estas últimas condiciones son las que más abundan en la literatura, debido a que posee más simetrías.

4.2.1. Representaciones en el Espacio de Fases

El mapa del panadero convencional ($B_{l,0}$) puede ser representado en el espacio de fases a través de las funciones de Wigner, de Kirkwood y las Husimi entre otras.

El espacio de fases es cubierto rápidamente ya que se trata de un mapa caótico.

Además de los estados localizados en posición y momento, se utilizaron estados coherentes, que son los estados que en el límite clásico tienden a un producto de gaussianas en posición y momento. Estos estados también forman una base, tienen como interpretación natural a una partícula y no son “tan discontinuos” como los autoestados de posición y momento.

En la figura 4.4 se representa la evolución de un estado coherente con la función de Wigner.

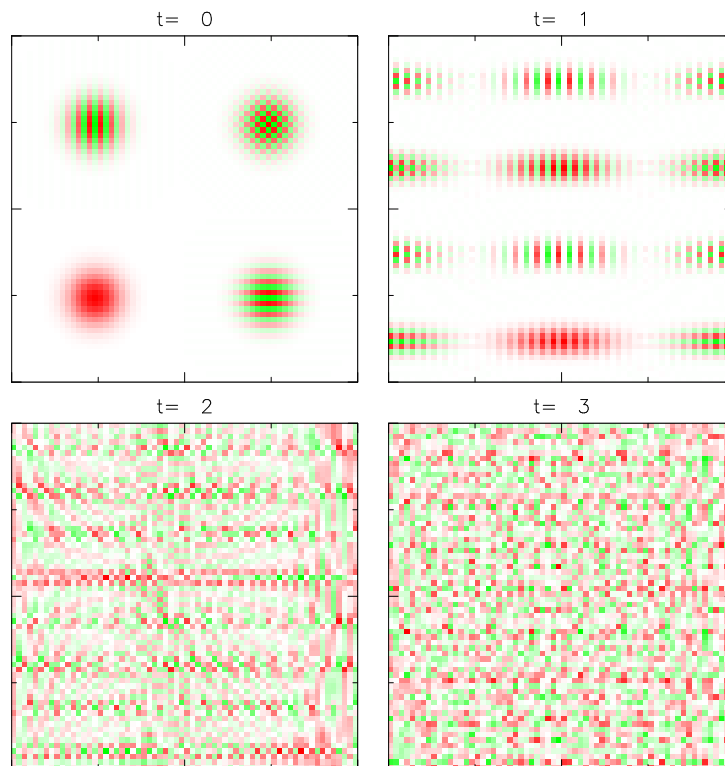


Figura 4.4: Evolución de un estado coherente en la representación de Wigner bajo la acción del mapa del panadero convencional antisimétrico. El estado se centra en $(q; p) = (0, 25; 0, 25)$ y la dimensión del espacio de Hilbert es de 32.

4.2.2. Matriz del Panadero en Coordenadas

Se construye la matriz del mapa del panadero en base de posición y se grafica el módulo de cada uno de los elementos. Esto permite visualizar en forma sencilla cuál es la acción de cambiar de miembros dentro de la familia del panadero para un espacio fijo.

Por ejemplo en la figura 4.5 se muestran los miembros del panadero para 6 qubits con condiciones de contorno antiperiódicas ($\chi_p = \chi_q = \frac{1}{2}$). En el caso del panadero convencional no hay elementos de matriz nulos. A medida que crece el miembro de la familia aparecen regiones rectangulares de elementos sin amplitud dentro de la matriz.

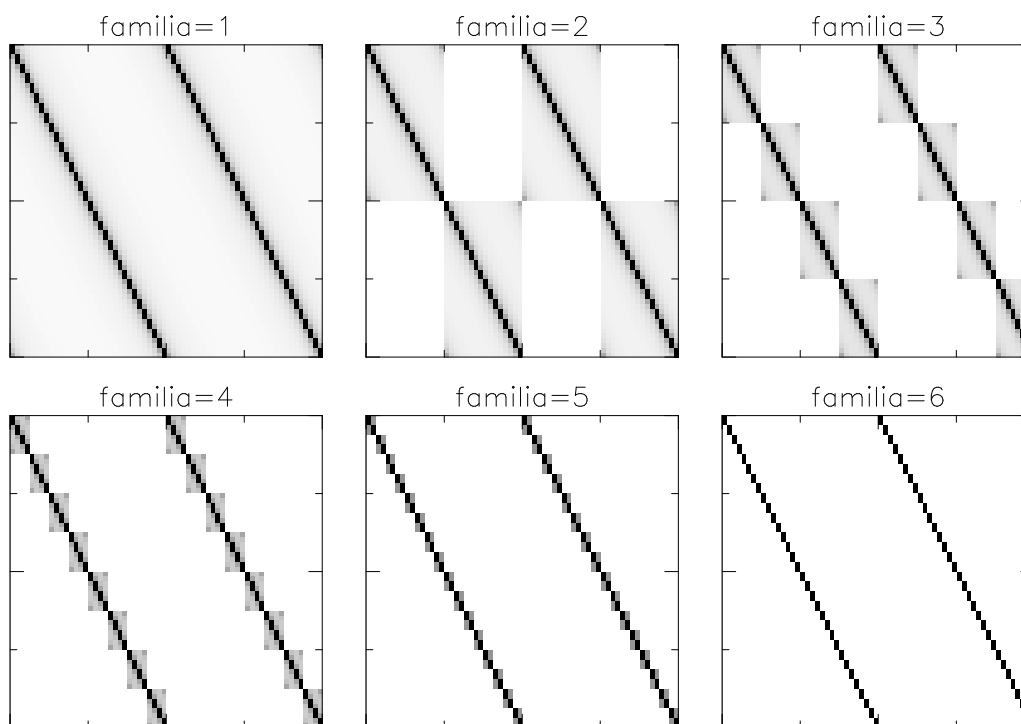


Figura 4.5: Módulo de los elementos de matriz del panadero de 6 qubits en representación de coordenadas para las distintas familias. ($|\langle n' | \hat{B} | n \rangle|^2$)

4.2.3. Espectro

Los mapas del panadero son unitarios, y por lo tanto, sus autovalores tienen módulo igual a uno.

$$\hat{B}v_n = e^{i\theta_n}v_n \quad (4.5)$$

Una de las propiedades de los mapas caóticos es que genéricamente sus autovalores son no degenerados. Esto se puede ver en la familia del panadero de 6 qubits con condiciones periódicas (ver figura 4.6). El único miembro con autovalores degenerados es el mapa de varias monedas independientes, ya que es integrable. El número de autovalores distintos es el doble de la cantidad de monedas, y la degeneración de cada uno es de $\frac{2^m - 1}{m}$, donde m es el número de monedas. Por otro lado, la cantidad de autovalores distintos de varias monedas con condiciones antiperiódicas

es igual a cuatro veces el número de monedas para más de 4 qubits. La diferencia entre los mapas del panadero periódicos y antiperiódicos se muestra en la figura 4.7.

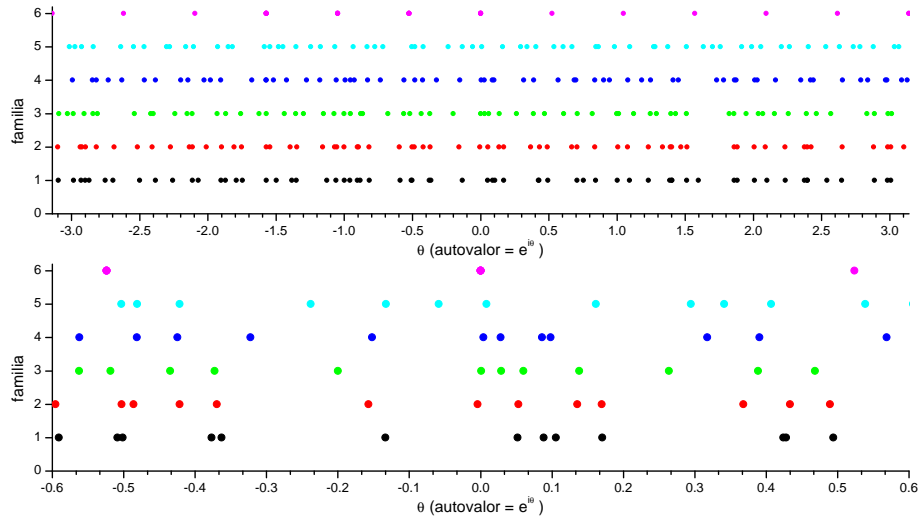


Figura 4.6: Espectro del mapa del panadero de 6 qubits. El autovalor viene dado por el ángulo, ya que se trata de mapas unitarios. En la figura de arriba se ve todo el espectro y en la de abajo se ve qué ocurre cerca de $\theta = 0$.

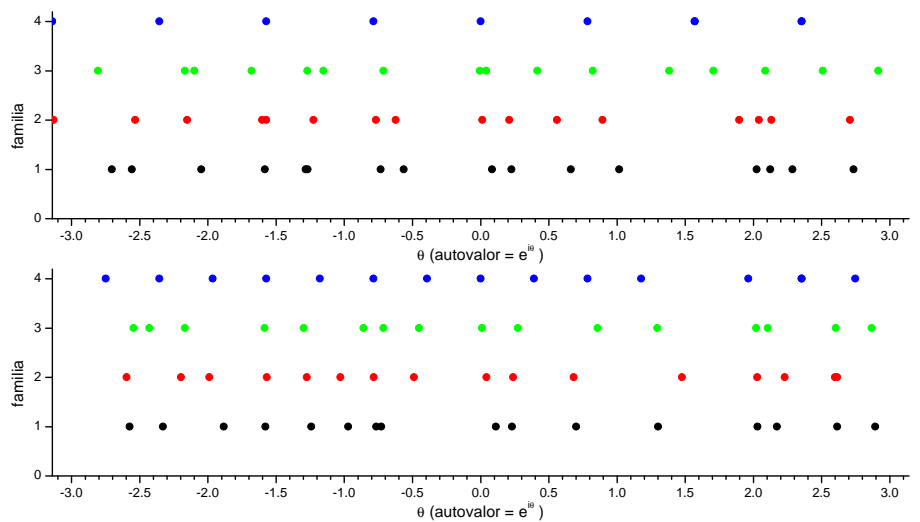


Figura 4.7: Espectro del mapa del panadero de 4 qubits para condiciones periódicas (arriba) y antiperiódicas (abajo).

4.2.4. Entrelazamiento

El entrelazamiento es una propiedad puramente cuántica, en la cual los estados de dos o más objetos están correlacionados. Esta correlación es tal que la descripción de uno de los objetos incluye a otro de ellos, por más que estén espacialmente separados. Los estados de Bell [1] son un ejemplo de dos partículas máximamente entrelazadas, mientras que un estado producto no tiene ninguna correlación.

En el trabajo de Scott y Caves [17] se estudia el “poder de entrelazamiento” de la familia de mapas del panadero con ángulos de Floquet de Saraceno. Una de las medidas que utilizan para medir entrelazamiento es, dado un estado inicial, partir al sistema en dos subsistemas y calcular la entropía en cada paso del mapa. Si se quiere evitar la influencia del estado inicial, es necesario hacer un promedio estadístico sobre ellos.

Este resultado es comparado con la teoría de matrices aleatorias para estados puros. Se muestra que el valor medio de la entropía lineal a primer orden en la pureza normalizada, $S_{L1erO} \equiv \beta(1 - \text{tr}\rho_B^2)$, con $0 \leq S_{L1erO} \leq 1$, es:

$$\langle S_{L1erO} \rangle = 1 - \frac{\mu + 1}{\mu\nu + 1} \quad (4.6)$$

donde μ es la dimensión del espacio de Hilbert del mayor de los dos subsistemas y ν es la dimensión del menor. El mayor valor de entropía media se da cuando $\mu\nu$ es mucho mayor que μ , o sea cuando la dimensión de los espacios son cercanas.

Si estudiamos la entropía lineal para dos subsistemas de 4 qubits en la familia de mapas del panadero de 8 qubits, para el estado inicial producto $|\varphi_0\rangle = |00000000\rangle$, se obtiene el gráfico de la figura 4.8.

Se puede ver que los mapas intermedios son los que producen más entropía, mientras que el $B_{8,7}$ es el que más se parece al $B_{8,8}$, que no produce entrelazamiento.

Justamente Scott y Caves [17] concluyen que la familia del panadero es muy buena productora de entrelazamiento, y que los miembros intermedios son los que más lo hacen. Por otro lado, el entrelazamiento producido no es como el de estados totalmente aleatorios, ya que existen simetrías espaciales.

En el caso de 8 qubits con ángulos de Floquet nulos y estado inicial $|\varphi_0\rangle = |00000000\rangle$, la entropía lineal de $B_{8,7}$ satura lentamente y luego de aproximadamente 100 iteraciones supera al $B_{8,1}$ (Baker) (ver figura 4.9).

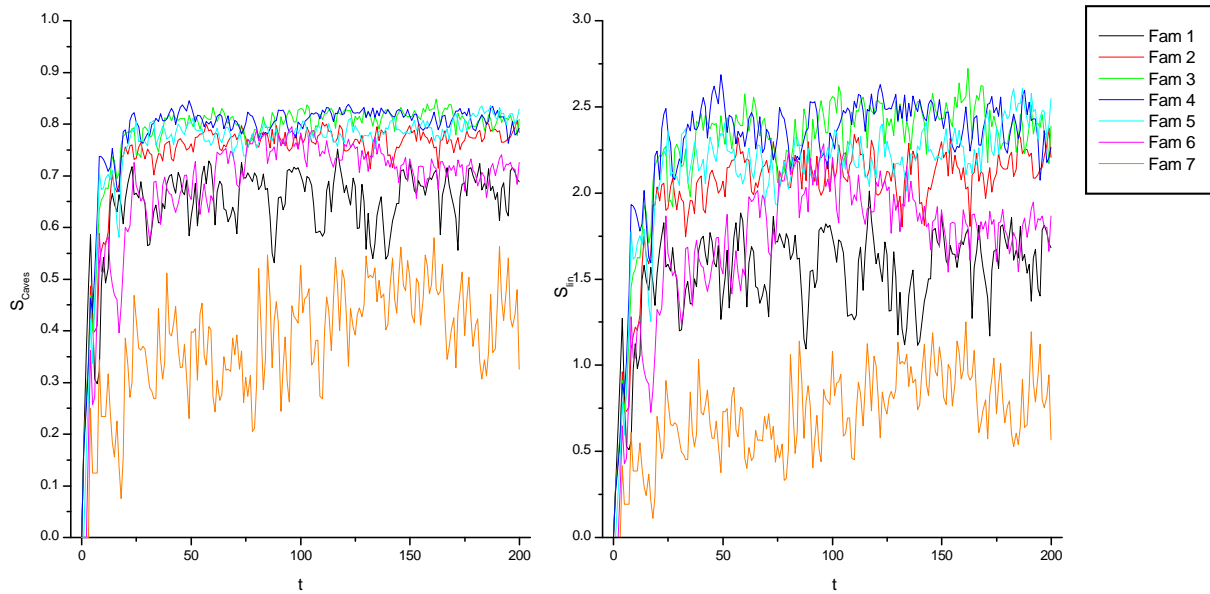


Figura 4.8: En la izquierda se grafica la entropía lineal a primer orden en la pureza y en la derecha la entropía lineal, para los primeros 7 miembros de la familia del panadero antisimétrico en función del tiempo. El octavo miembro (Many Coins) no es graficado ya que no produce entrelazamiento.

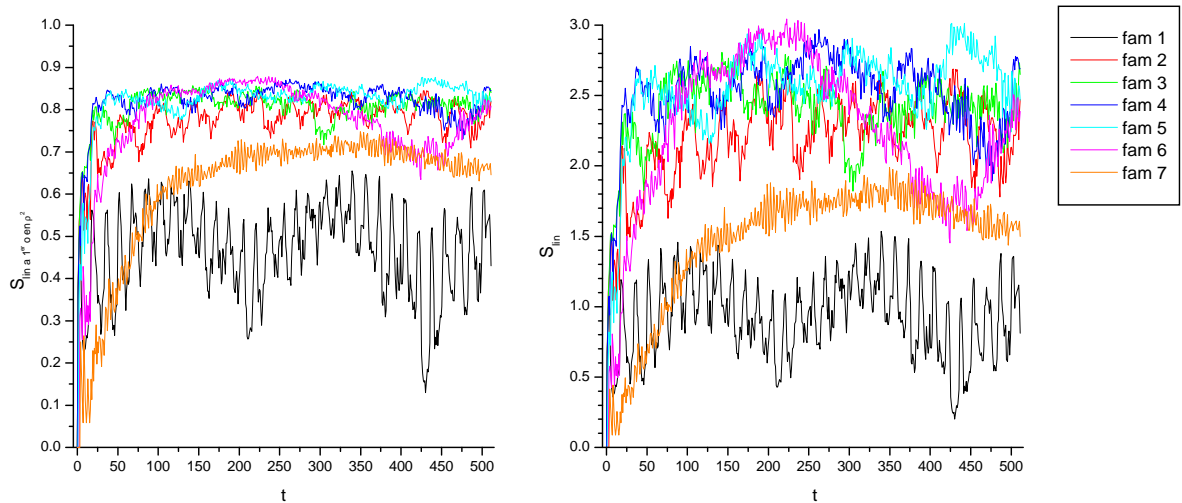
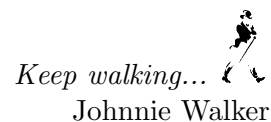


Figura 4.9: En la izquierda se grafica la entropía lineal a primer orden en la pureza y en la derecha la entropía lineal, para los primeros 7 miembros de la familia del panadero con ángulos de Floquet nulos en función del tiempo. El octavo miembro (Many Coins) no es graficado ya que no produce entrelazamiento.

Capítulo 5

Caminata acoplada a Panadero



Existen diversos modelos de decoherencia para la caminata cuántica. Ellos se basan en cuantificar la interacción de la moneda con un medio ambiente específico a través de modelos de decoherencia de un qubit ([6, 7, 18] por ejemplo). Todos estos trabajos utilizan formalismo de superoperadores y representaciones de Kraus con evolución no unitaria, ya que en cada paso se traza sobre el ambiente.

Por ejemplo dos modelos triviales para obtener la caminata clásica a partir de la cuántica, se basan en eliminar las interferencias cuánticas, realizando mediciones sobre la moneda en cada paso o utilizando en cada paso una moneda distinta.

En nuestro trabajo se toma un mapa caótico de dimensión N que funciona como ambiente “realista” del caminante. El sistema total puede ser pensado como caminante-ambiente o como caminante-moneda-ambiente, y su evolución es unitaria en todo momento. Bajo este modelo se pueden estudiar las pérdidas de coherencia de la caminata a partir de evolución unitaria y traza sobre el medio ambiente, sin necesidad de apelar a ningún modelo fenomenológico.

En los trabajos de Wojcik y Dorfman [20, 21] se utiliza al caminante acoplado con el mapa del panadero de Balazs-Voros-Saraceno y se lo denomina “Multibaker”. Se interpreta al sistema como una cadena de mapas periódicos y se estudian propiedades de transporte. Por otro lado, en los trabajos de Brun et al. [19, 18] se estudia al caminante evolucionando en la línea infinita con varias monedas.

En este capítulo se estudiarán propiedades de la familia de mapas del panadero como ambiente del caminante. Se observarán las distintas distribuciones de probabilidades del caminante, la varianza, la entropía generada con el medio y el paso del caminante clásico al cuántico en función del tiempo.

5.1. Panadero como Ambiente de la Caminata

Supongamos al sistema moneda en un espacio de Hilbert de dimensión N . Se definen $\hat{\mathcal{P}}_R$ y $\hat{\mathcal{P}}_L$ proyectores ortogonales en el espacio de la moneda tal que $\hat{\mathcal{P}}_R + \hat{\mathcal{P}}_L = 1$ y $Tr(\hat{\mathcal{P}}_L) = Tr(\hat{\mathcal{P}}_R) = \frac{N}{2}$. El operador \hat{M} es el que define la evolución de la moneda antes de ser proyectada (en el caso de la Caminata Hadamard $\hat{M} = \hat{H}$). Entonces un paso de la caminata general queda definido por el operador unitario

$$\hat{E} \equiv (\hat{U} \otimes \hat{\mathcal{P}}_R + \hat{U}^\dagger \otimes \hat{\mathcal{P}}_L)(\hat{1} \otimes \hat{M}) \quad (5.1)$$

donde \hat{U} es la traslación espacial sobre el caminante.

Si escribimos el estado inicial como producto tensorial entre el caminante (en base de momentos) y la moneda, la evolución se puede expresar como

$$\hat{E} \sum_k c_k |k\rangle \otimes |\Phi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle \otimes \hat{M}_k |\Phi\rangle \quad (5.2)$$

donde \hat{M}_k actúa solamente sobre el espacio de la moneda,

$$\hat{M}_k \equiv (e^{-ik} \hat{\mathcal{P}}_R + e^{ik} \hat{\mathcal{P}}_L) \hat{M} \quad (5.3)$$

Hasta aquí el procedimiento para acoplar una moneda a la caminata es totalmente general.

En el caso del caminante acoplado al panadero, los proyectores son gobernados por el estado del qubit más significativo del mapa (la moneda propiamente dicha) y la evolución \hat{M} es alguno de los mapas del panadero $\hat{B}_{l,n}$:

$$\hat{M}_k = (e^{-ik} |0\rangle_{MSB} \langle 0| + e^{ik} |1\rangle_{MSB} \langle 1|) \hat{B}_{l,n} = \begin{pmatrix} e^{-ik} & 0 \\ 0 & e^{ik} \end{pmatrix} \hat{B}_{l,n} \quad (5.4)$$

También se puede representar en forma de circuito como una traslación del caminante controlada por el qubit más significativo del Panadero:

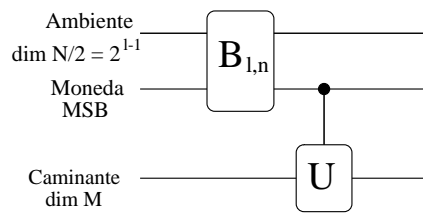


Figura 5.1: Circuito del caminante cuántico acoplado al mapa del panadero. El bit más significativo del panadero controla una traslación del caminante.

La distribución de probabilidades del caminante viene dada por

$$p(x, t) = \langle \Psi | (|x\rangle \langle x| \otimes \hat{1}) | \Psi \rangle \quad (5.5)$$

5.2. Multibaker

El acoplamiento entre el caminante y el mapa del panadero utilizado hasta ahora, es equivalente a la cuantización del mapa multibaker clásico.

El multibaker, es una cadena unidimensional de mapas del panadero. La evolución de cada uno de los mapas es similar a la del mapa del panadero, salvo que si $q < 0,5$ el área es trasladada al mapa anterior, mientras que si $q > 0,5$ se traslada al mapa siguiente, tal como se muestra en la figura (5.2). Se puede notar que ya que el mapa del panadero preserva área, el multibaker también lo hace.

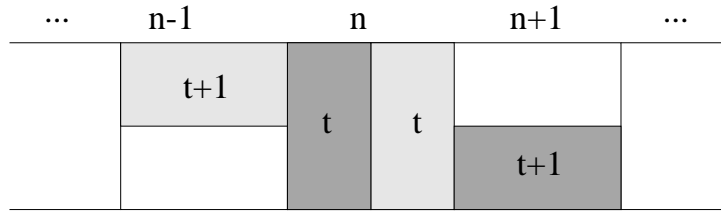


Figura 5.2: Mapa del multibaker clásico. En cada iteración los puntos del toro de un eslabón son trasladados a los eslabones contiguos.

Por lo general, la cadena de mapas puede ser infinita (línea), poseer condiciones periódicas (ciclo) o condiciones de contorno fijas. También existen trabajos sobre mapas del panadero clásicos no simétricos que dividen el espacio de fases en $q \neq 0,5$.

En la cuantización del multibaker [20, 21], es posible elegir los mismos ángulos de Floquet en cada una de las celdas de la cadena, “uniforme”, o pueden ser elegidos al azar, “random”.

Tanto el multibaker clásico como el cuántico son utilizados para estudiar propiedades de transporte y scattering de una partícula o un conjunto de partículas ante potenciales periódicos. El multibaker clásico presenta propiedades de transporte difusivas, mientras que en el cuántico el transporte es balístico [21].

5.3. Caminata en la Línea

En la línea infinita, si se parte de un estado inicial con el caminante en la posición $|0\rangle$, el estado inicial del sistema se puede escribir como:

$$|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \quad (5.6)$$

y por lo tanto la evolución del sistema es:

$$|\Psi(t)\rangle \equiv \hat{E}^t |\Psi_0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \otimes (M_k)^t |\Phi_0\rangle \quad (5.7)$$

con M_k definido en (5.3).

La distribución de probabilidades (5.5) se puede escribir como:

$$p(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk \int dk' e^{-ix(k-k')} \langle \Phi_0 | (\hat{M}_k^\dagger)^t (\hat{M}_{k'})^t | \Phi_0 \rangle \quad (5.8)$$

Utilizando esta expresión para las probabilidades podemos calcular los valores medios de las potencias del operador posición.

$$\langle \hat{x}^m \rangle_t = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_x x^m \int dk \int dk' e^{-1x(k-k')} \langle \Phi_0 | (\hat{M}_k^\dagger)^t (\hat{M}_{k'})^t | \Phi_0 \rangle \quad (5.9)$$

Por otro lado, la delta de Dirac se escribe como:

$$i^m \delta^{(m)}(k - k') = \frac{1}{2\pi} \sum_x x^m e^{-ix(k-k')} \quad (5.10)$$

Usamos este resultado en (5.9) e integramos por partes:

$$\langle \hat{x}^m \rangle_t = \frac{i^m}{2\pi} \int dk \langle \Phi_0 | (\hat{M}_k^\dagger)^t \left[\frac{d^m}{dk^m} (\hat{M}_k)^t \right] | \Phi_0 \rangle \quad (5.11)$$

Si definimos el operador $\hat{Z} \equiv \hat{\mathcal{P}}_R - \hat{\mathcal{P}}_L = \hat{1} - 2\hat{\mathcal{P}}_L$:

$$\frac{d\hat{M}_k}{dk} = -i\hat{Z}\hat{M}_k \quad (5.12)$$

El valor medio de \hat{x} y \hat{x}^2 quedan expresados como:

$$\langle \hat{x} \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^t \int dk \langle \Phi_0 | (\hat{M}_k^\dagger)^j \hat{Z} (\hat{M}_k)^j | \Phi_0 \rangle \quad (5.13)$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^t \int dk \langle \Phi_0 | (\hat{M}_k^\dagger)^j \hat{Z} (\hat{M}_k)^{j-j'} \hat{Z} (\hat{M}_k)^{j'} | \Phi_0 \rangle \quad (5.14)$$

Reescribimos el estado inicial $|\Phi_0\rangle$ en la base de autoestados de \hat{M}_k y luego de t pasos obtenemos:

$$(\hat{M}_k)^t |\Phi_0\rangle = \sum_l c_{kl} |\phi_{kl}\rangle e^{i\theta_{kl}t} \quad (5.15)$$

La ecuación (5.13) en esta base es:

$$\langle \hat{x} \rangle_t = t - \frac{1}{\pi} \int dk \sum_{l, l'} c_{kl}^* c_{kl'} \langle \phi_{kl} | \hat{\mathcal{P}}_L | \phi_{kl'} \rangle \sum_{j=1}^t e^{i(\theta_{kl'} - \theta_{kl})j} \quad (5.16)$$

Si la matriz unitaria \hat{M}_k es no degenerada, entonces la mayoría de los términos de (5.16) son oscilatorios, y por lo tanto su promedio da cero. Sólo los términos diagonales no oscilan. Por lo tanto podemos escribir

$$\langle \hat{x} \rangle_t = C_1 t \text{ (+términos oscilatorios)} \quad (5.17)$$

$$C_1 = 1 - \frac{1}{\pi} \int dk \sum_l |c_{kl}|^2 \langle \phi_{kl} | \hat{\mathcal{P}}_L | \phi_{kl} \rangle \quad (5.18)$$

Haciendo las mismas consideraciones sobre (5.14) obtenemos:

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_t = C_2 t^2 \text{ (+términos oscilatorios)} + O(t) \quad (5.19)$$

$$C_2 = 1 - \frac{2}{\pi} \int dk \sum_l |c_{kl}|^2 \langle \phi_{kl} | \hat{\mathcal{P}}_L | \phi_{kl} \rangle \langle \phi_{kl} | \hat{\mathcal{P}}_R | \phi_{kl} \rangle \quad (5.20)$$

En el trabajo de Brun et al. [19] se calcula la varianza del caminante para m monedas ($B_{l, l}$) en el límite de tiempos largos. Obtienen que

$$\sigma^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle_t - \langle \hat{x} \rangle_t^2 = (C_2 - C_1^2)t^2 + O(t) + (\text{términos oscilatorios}) \quad (5.21)$$

con

$$C_2 - C_1^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 1/l}{4\sqrt{2}} \quad (5.22)$$

donde l es el número de monedas.

Como vimos en el capítulo de *Caminata Cuántica*, la varianza del caminante sirve para diferenciar una caminata clásica de una cuántica. Si el término cuadrático en (5.21) es nulo podemos pensar en la caminata como clásica, mientras que si es distinto de cero, su comportamiento es cuántico.

Podemos notar que el término lineal de la varianza (5.22) no se anula en el límite de infinitas monedas. Esto se debe a que las ecuaciones 5.21 y 5.22 tienen sentido en el límite de tiempos largos.

Por otro lado, si el tiempo (número de iteraciones) es menor a la cantidad de monedas, el comportamiento del caminante es clásico. Por lo tanto es necesario observar la cantidad de tiradas por monedas en el límite de infinitas monedas.

En el trabajo de Brun et al. [19] se estudia dicho límite, y se muestra que cuando el número de tiradas por moneda es menor o igual que uno, el término cuadrático en (5.21) desaparece, o sea que el comportamiento es clásico. En el caso de dos tiradas por monedas, $C_1 = 0$ y $C_2 = \frac{1}{8}$ en (5.21) y el comportamiento deja de ser clásico.

5.4. Probabilidad

Analizamos la distribución de probabilidades del caminante acoplado a la familia del panadero y la comparamos con el caminante clásico.

En el caso de la familia del panadero de 3 qubits con ángulos de Floquet nulos existen 3 familias: $B_{3,1}$ (Baker), $B_{3,2}$ y $B_{3,3}$ (Many Coins). Elegimos al estado inicial como el producto de $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada qubit. Este estado inicial produce una distribución de probabilidades simétrica para $B_{l,l}$ con ángulos de Floquet nulos. Los resultados se muestran en la figura 5.3.

5.4.1. Distancia Variacional

En este caso utilizaremos la distancia variacional, como una medida de la diferencia entre la distribución de probabilidades del caminante cuántico con la de la caminata aleatoria clásica.

$$\nu_{clas}(t) = \sum_n |P(n, t) - P_{clas}(n, t)| \quad (5.23)$$

En la figura 5.4 se muestra la distancia variacional clásica para los distintos miembros de la familia del mapa del panadero de 6 y 7 qubits, y para los mapas de varias monedas y del panadero convencional de hasta 7 qubits. Se puede ver que la caminata Hadamard es la de mayor distancia variacional clásica, y a medida que aumente el número de monedas el crecimiento es más lento. También podemos notar que dentro de los panaderos de 6 qubits, el de menor distancia no es el convencional ($B_{l,1}$), sino algún miembro intermedio (en este caso es $B_{6,2}$).

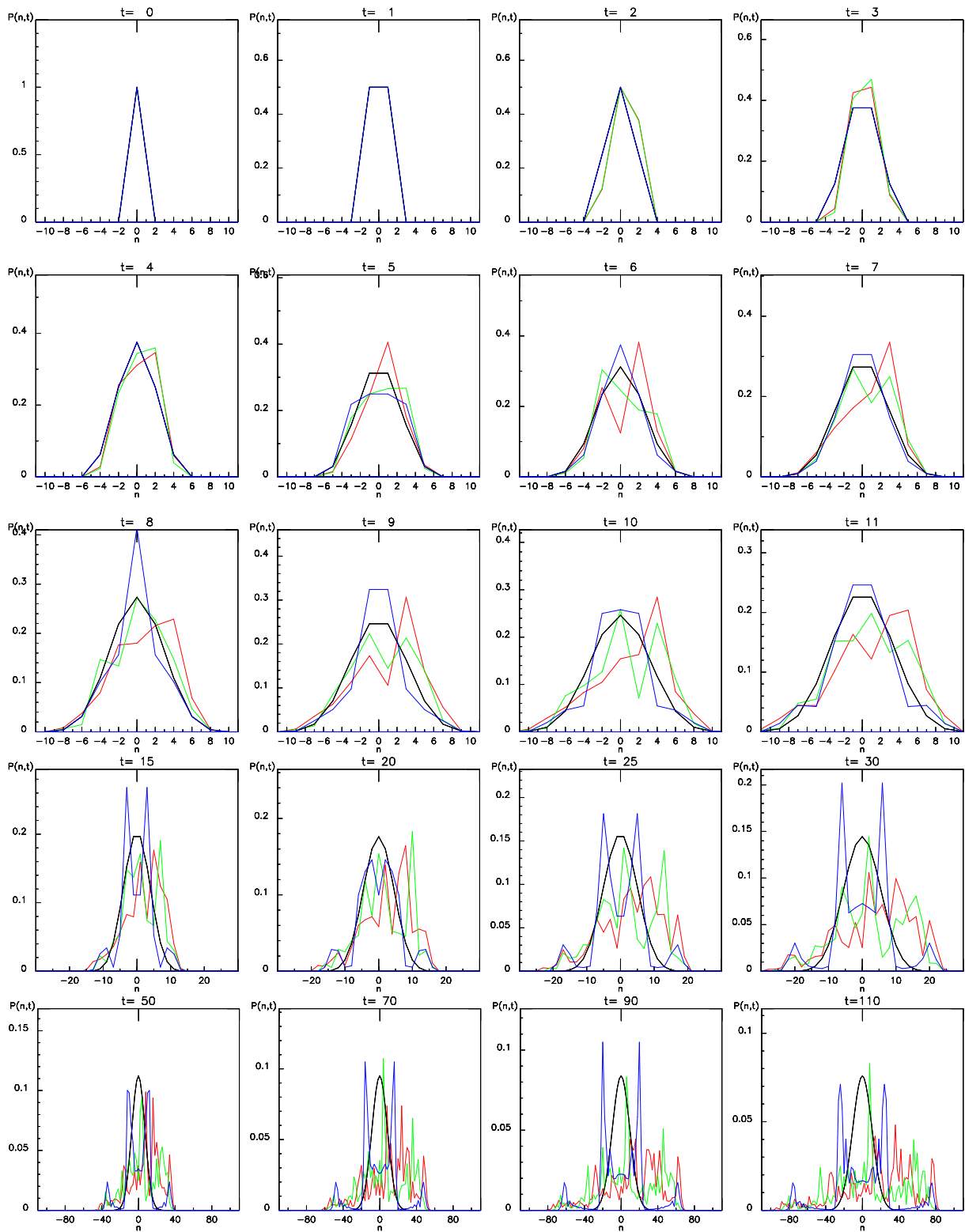


Figura 5.3: Distribución de probabilidades para el caminante clásico (negro) y el caminante acoplado a la familia de mapas del panadero de 3 qubits: $B_{3,1}$ (rojo), $B_{3,2}$ (verde) y $B_{3,3}$ (azul). Sólo son graficados los puntos con $t - x$ par, ya que $P(x) = 0$ en $t - x$ impar.

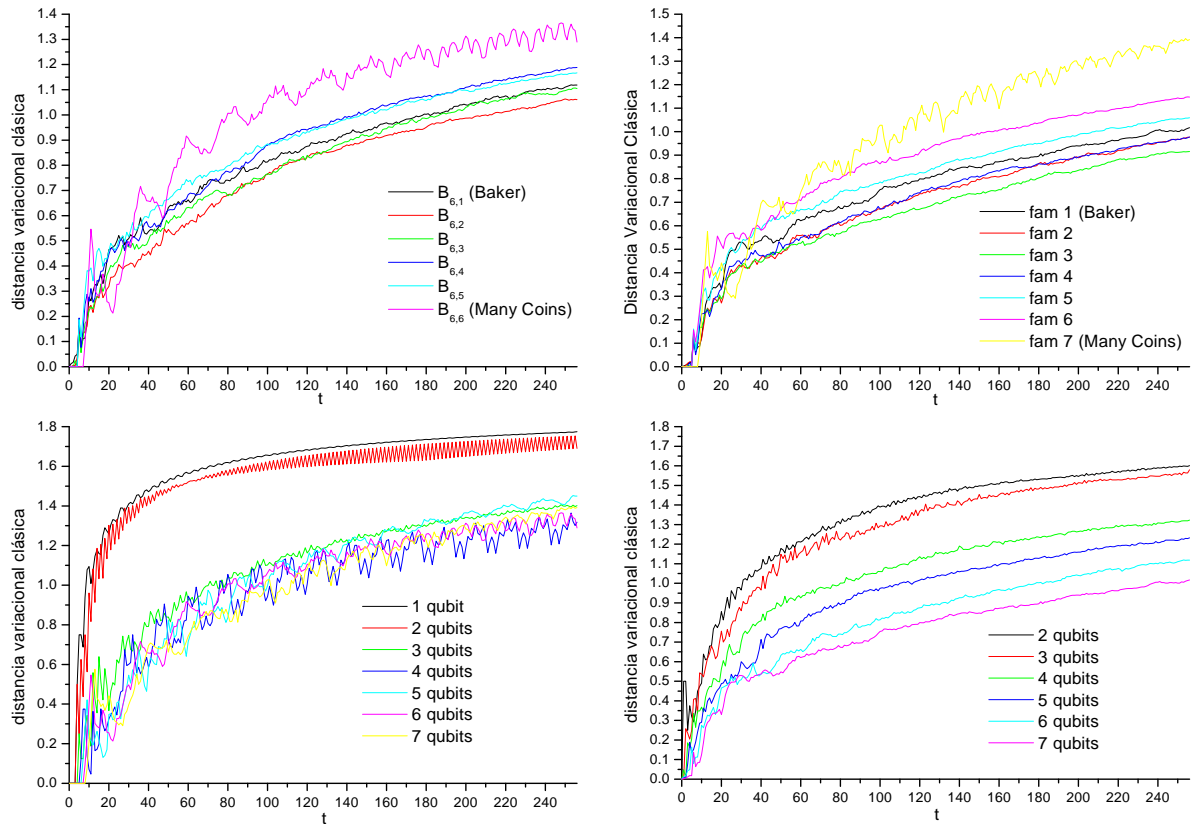


Figura 5.4: *Distancia variacional clásica del caminante acoplado al panadero en la línea infinita para la familia de 6 qubits y 7 qubits (arriba); y para varias monedas independientes y el mapa del panadero convencional (abajo). En todos los casos el caminante se encontraba localizado en posición y el estado inicial del panadero era el “simétrico”.*

5.5. Varianza

Como ya vimos en el capítulo de la caminata cuántica, la varianza del caminante es una de las medidas que nos permite analizar su comportamiento.

Todos los cálculos en este capítulo se realizarán para el caminante en la línea infinita con estado inicial localizado en posición.

Podemos notar en la figura 5.3 que a tiempo cortos (del orden de $\log_2(N) = \# \text{ qubits}$) la caminata clásica y los miembros de la familia de la caminata acoplada al panadero se comportan de manera similar en distribución de probabilidades. Esto también se puede apreciar en la varianza donde para todos los caminantes se obtiene un comportamiento de tipo \sqrt{t} .

A partir de cierto tiempo el comportamiento de la varianza es lineal para todos los caminantes cuánticos.

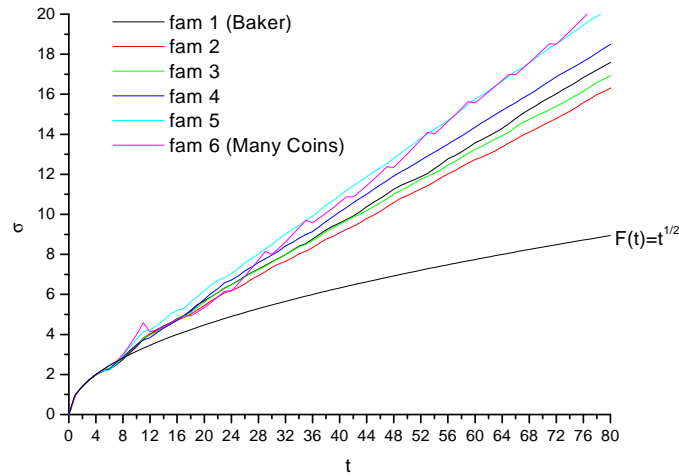


Figura 5.5: Varianza del caminante acoplado a la familia del panadero de 6 qubits. El caminante tiene un comportamiento clásico hasta tiempos del orden de los qubits del panadero.

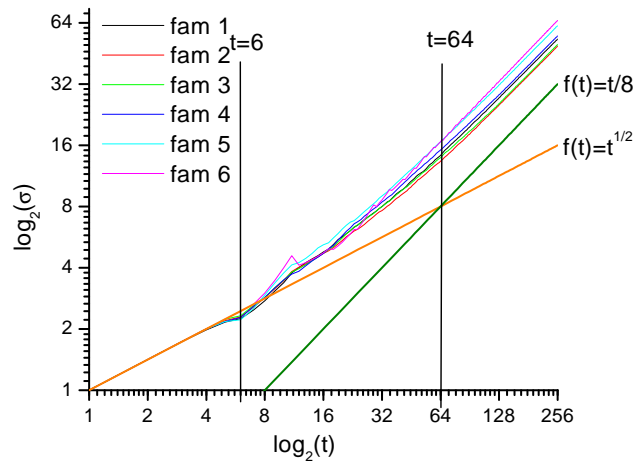


Figura 5.6: Varianza del caminante acoplado a la familia del panadero de 6 qubits en escala logarítmica.

Si observamos el gráfico 5.5 de la varianza en función del tiempo, en escala logarítmica, notamos que existen 3 comportamientos distintos:

- En $0 \leq t < \log_2(N)$ la varianza crece $\propto \sqrt{t}$ (comportamiento clásico)
- En $\log_2(N) \leq t < N$ crecen en forma compleja
- En $N \leq t < \infty$ la varianza crece $\propto t$ (comportamiento cuántico)

En el caso de varias monedas independientes $(B_{l,l})$ para tiempos menores que el número de monedas, es trivial entender su comportamiento clásico ya que no existe correlación entre las monedas. Este comportamiento también se ve en los demás miembros de la familia del panadero

ya que para esos tiempos el entrelazamiento es muy pequeño.

Analizando el régimen cuántico ($t > N$), podemos notar que la varianza crece con distintas pendientes para cada miembro de la familia del panadero. Esto también ocurre para un miembro de la familia cuando cambia la dimensión del espacio de Hilbert.

Para los miembros $B_{l,l}$ (Many Coins), Brun et al. [19] obtuvieron expresiones analíticas de la pendiente de la varianza en función del tiempo para distintos M qubits (ecuaciones 5.21 y 5.22).

Las simulaciones numéricas se comparan con los resultados analíticos de Brun et al.:

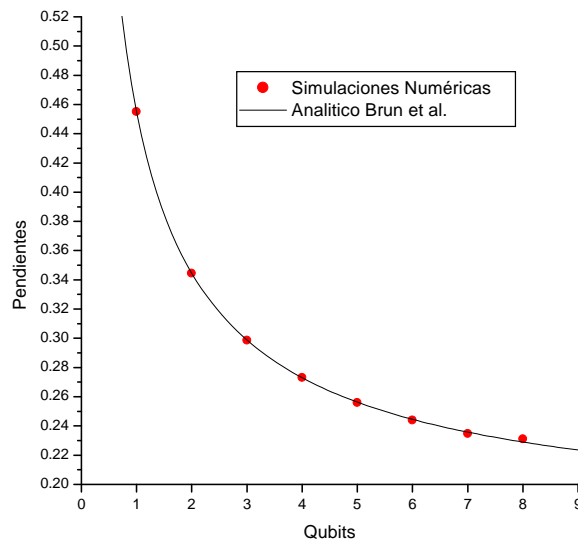


Figura 5.7: Pendiente de la varianza para los miembros $B_{l,l}$ de la familia del panadero. Los resultados numéricos son comparados con la expresión analítica de Brun et al.

Se analizaron las pendientes de la varianza para el espacio de fases simétrico y antisimétrico y distintos estados iniciales del panadero: posición definida en 0, y estado “simétrico” ($\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$) en cada qubit). Los resultados se muestran en la figura 5.8.

Se puede notar que para los mapas de pocos qubits, el mapa de varias monedas tiene pendiente menor al del panadero convencional. A medida que crece el número de qubits, el mapa del panadero convencional decrece más rápido que el de varias monedas y las pendientes se cruzan. Por otro lado vemos que los miembros intermedios de la familia del panadero tienen pendientes menores al panadero convencional.

Un caminante clásico en el límite de $t \rightarrow \infty$ posee una varianza con pendiente $\rightarrow 0$. Por lo tanto es de esperar que acoplado a un ambiente como el de la familia de mapas del panadero, en el límite de infinitos qubits, también tenga esa característica.

Los miembros intermedios están por debajo del resto. Esto nos da indicios de que son los “mejores ambientes” en términos de producción de decoherencia. Ya habíamos visto en la sección de entrelazamiento del capítulo 4, que son los mejores productores de entrelazamiento.

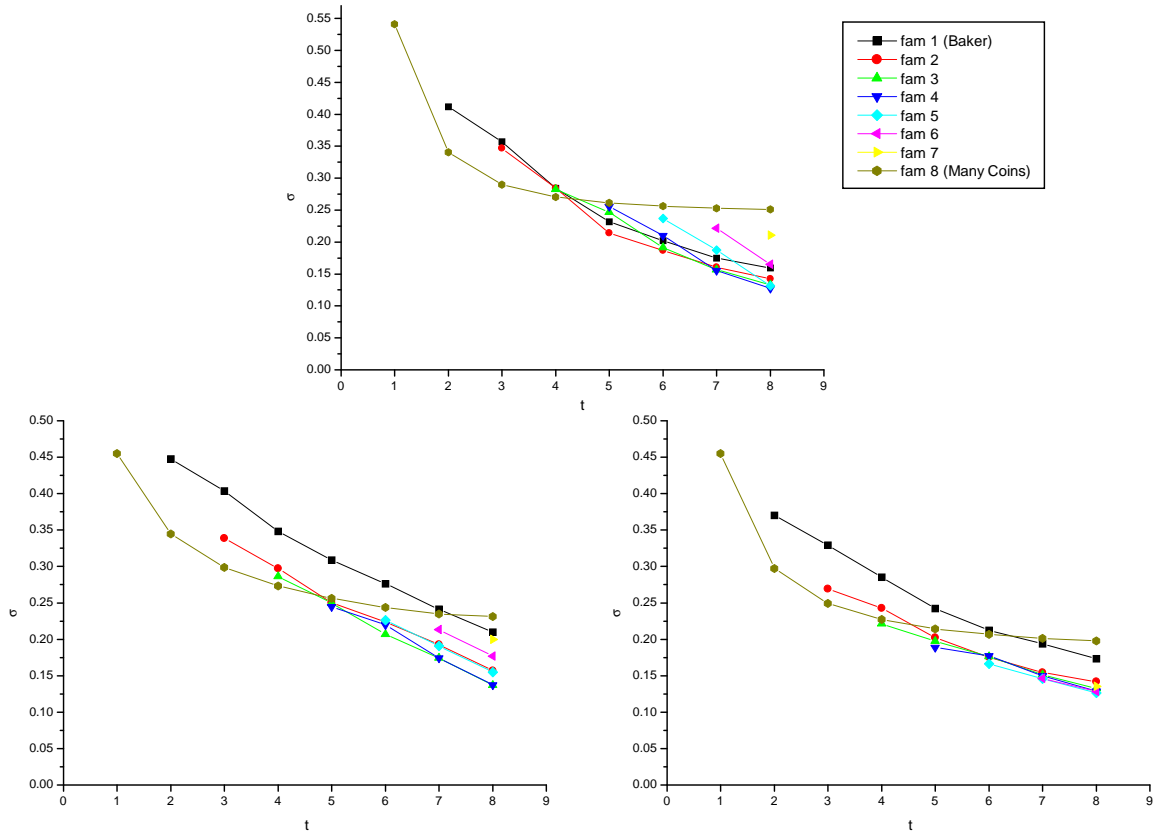


Figura 5.8: Pendiente de la varianza del caminante acoplado a la familias de los panaderos de hasta 8 qubits. Arriba: para el espacio de fases simétrico ($\chi_q = \chi_p = 0$) con estado inicial “simétrico”; abajo, izquierda: estado inicial en posición en 0 ($\chi_q = \chi_p = 0$), derecha: estado inicial “simétrico” ($\chi_q = \chi_p = \frac{1}{2}$).

5.6. Entropía

En esta sección analizaremos la entropía lineal del caminante, definida como:

$$S_{lin} = -\log_2[\text{Tr}(\rho_c^2)] = -\log_2\{\text{Tr}[(\text{Tr}\rho_{cm})^2]\} \quad (5.24)$$

donde c es el caminante y m es la moneda (en este caso en la moneda está incluido el ambiente). Ya que el caminante se encuentra en la línea infinita, el máximo de S_{lin} está acotado por el número de qubits del ambiente.

En las figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se muestran la entropía lineal en función del tiempo para: los miembros de la familia del panadero de 6 qubits; varias monedas; y los panaderos convencionales con ángulos de Floquet nulos y estado inicial “simétrico” (respectivamente).

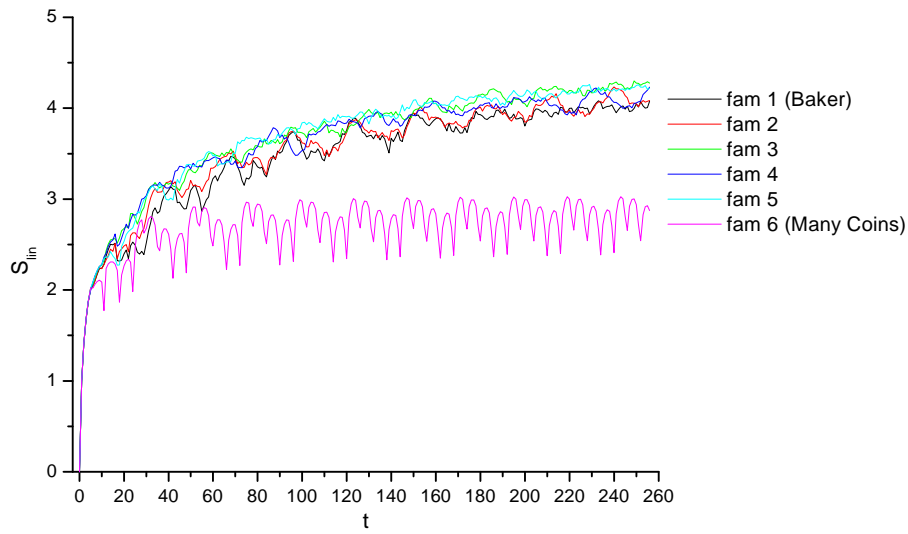


Figura 5.9: Entropía lineal del caminante en función del tiempo para la familia del panadero de 6 qubits. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

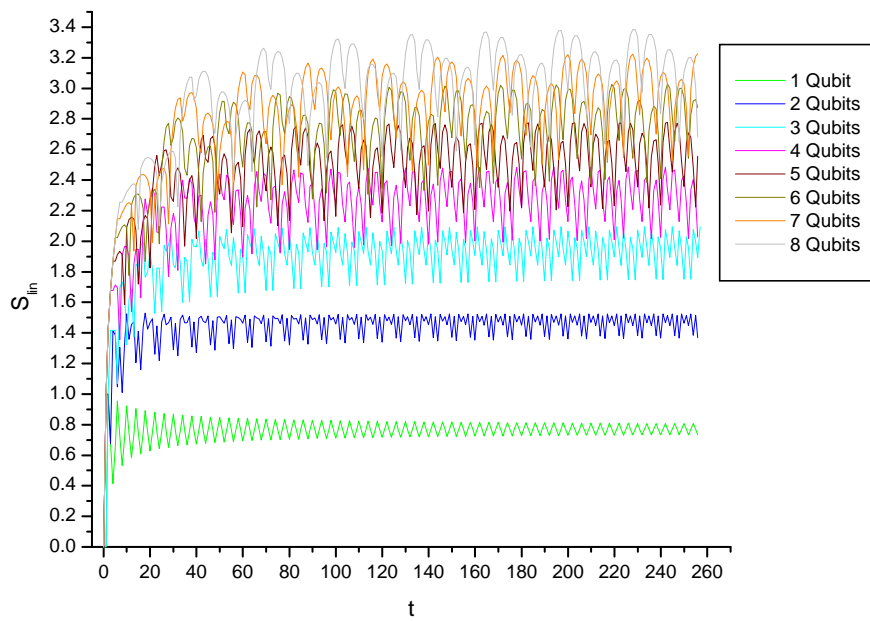


Figura 5.10: Entropía lineal del caminante en función del tiempo para varias monedas independientes. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

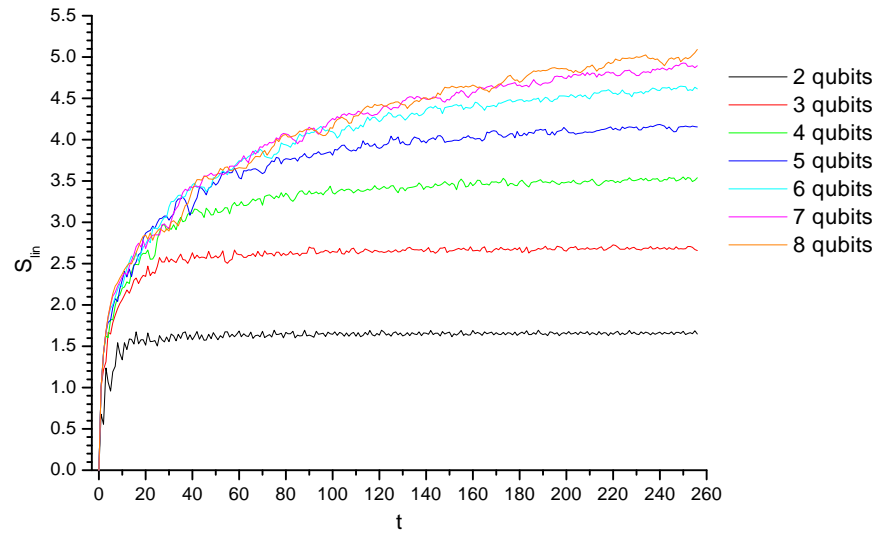


Figura 5.11: Entropía lineal del caminante en función del tiempo para el mapa del panadero convencional de menos de 8 qubits. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

En el gráfico 5.10 se observa que la entropía lineal satura y que existen oscilaciones con el número de qubits como período.

En la figura 5.12 se muestra la entropía de saturación en función de la cantidad de monedas. En rojo se puede ver una función que aproxima los 8 puntos: $3,196M^{0,2487} - 2,4382$ (donde M es el número de monedas).

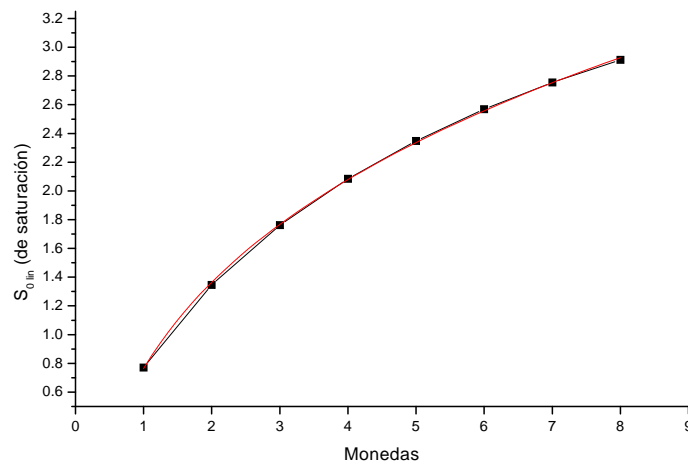


Figura 5.12: Entropía lineal de saturación en función de la cantidad de monedas para monedas independientes. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

En la figura 5.13 graficamos la entropía lineal sobre la entropía de saturación en función del tiempo sobre el número de qubits. En la literatura del caminante gobernado por varias monedas no aparecen cálculos analíticos sobre la entropía. Pero al observar la figura 5.13, parece existir una función universal en la cantidad de monedas para la entropía lineal.

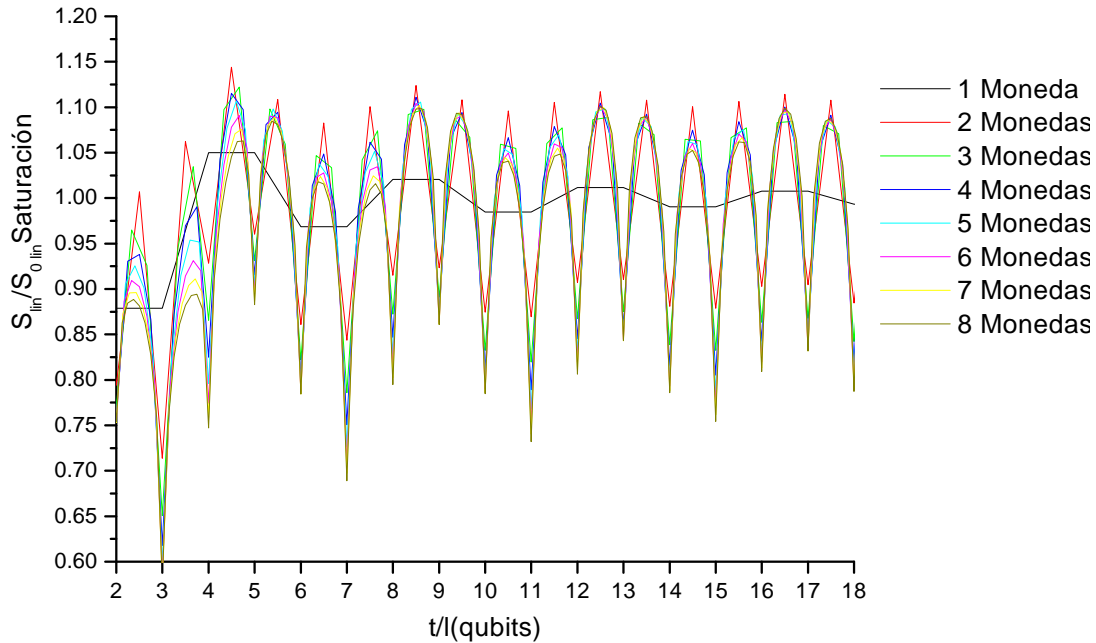


Figura 5.13: Entropía lineal sobre la entropía de saturación vs. el tiempo sobre el número de monedas. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

En la figura 5.14 se muestra la entropía lineal en función del tiempo para los miembros de la familia del panadero de 4 qubits en escala logarítmica. Se puede ver que para varias monedas la saturación se alcanza rápidamente mientras que para los otros miembros el tiempo de saturación es mayor que la dimensión del espacio de Hilbert.

Si se quiere analizar la evolución de la entropía para distintos miembros de la familia del panadero, notamos que el mapa que genera menos entropía es el de varias monedas independientes. En la figura 5.15 se muestra que para 8 qubits, el mapa del panadero convencional es el mapa caótico que le sigue en producción de entropía y que la misma va en aumento a medida que crece n para los mapas $B_{8,n}$.

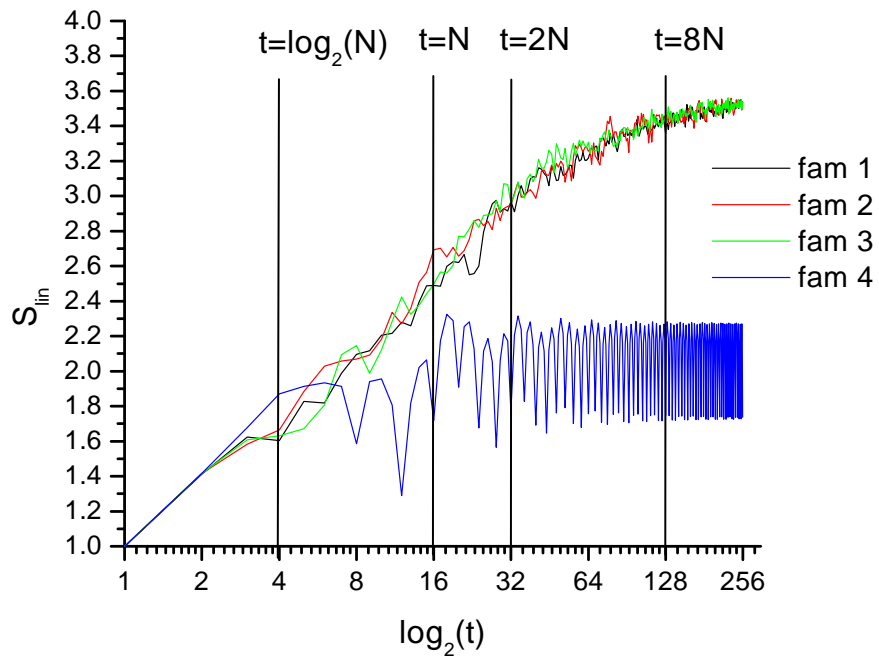


Figura 5.14: Entropía lineal en función del tiempo en escala logarítmica. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

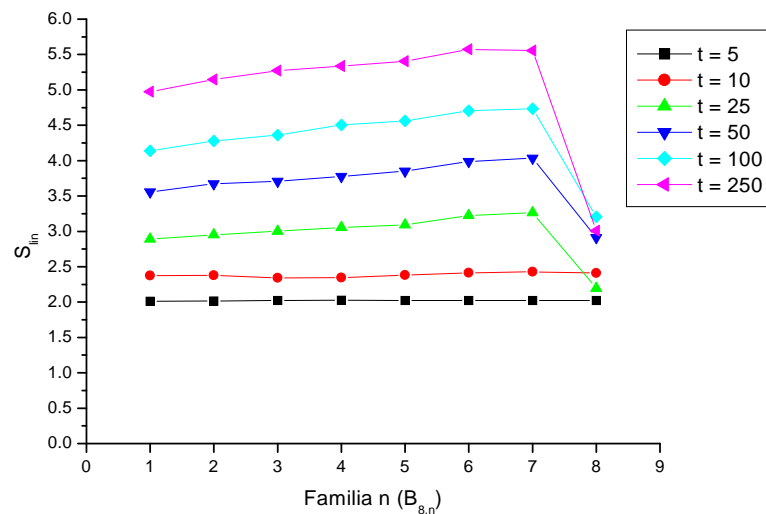


Figura 5.15: Entropía lineal para los miembros de la familia del panadero de 8 qubits para distintos tiempos.

La entropía lineal llega a un valor de saturación. Este valor depende del tipo del mapa y de su dimensión. En la figura 5.16 se muestra la entropía de saturación en función del número de qubits del mapa, para los panaderos convencionales, para los miembros intermedios y para varias monedas.¹

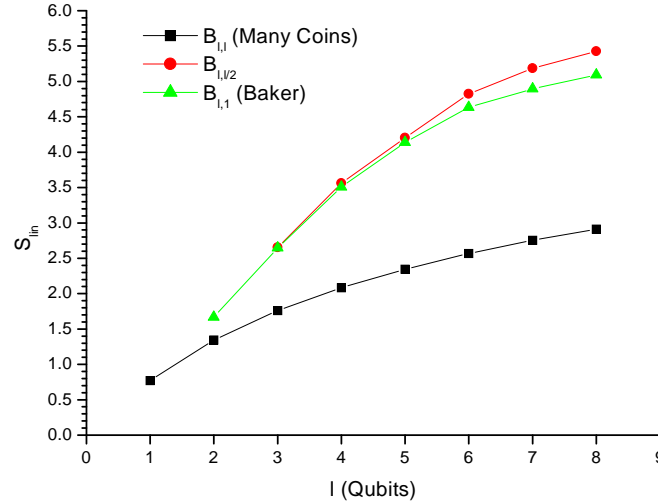


Figura 5.16: Entropía lineal en función del tiempo en escala logarítmica. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

5.6.1. Entropía con Moneda

Hasta esta parte del trabajo sólo hemos calculado la entropía entre el caminante y el ambiente (con la moneda incluida). La partición del sistema total fue elegida de esa manera con el fin de comparar con otros modelos.

También se puede tomar la entropía entre el caminante con la moneda, y un ambiente externo. En la figura 5.17 se muestran los resultados de la entropía lineal del caminante con la moneda vs. el resto del panadero para los miembros extremos del panadero de 7 qubits y se lo compara con la entropía lineal de la sección anterior.

¹En los casos de $B_{l,0}$ y $B_{l,1/2}$ de más de 5 qubits, los valores son cotas inferiores de la entropía de saturación, ya que su cálculo es muy costoso en términos de recursos computacionales.

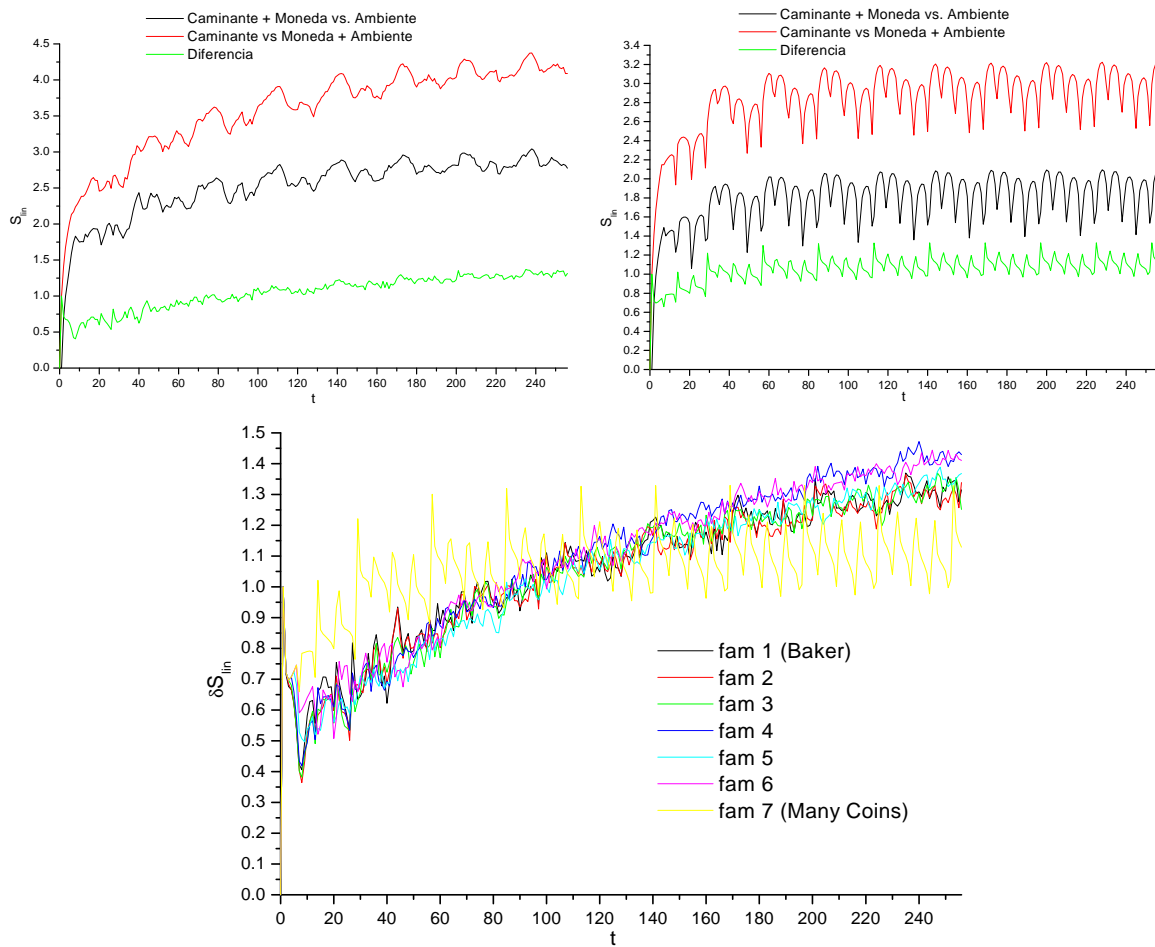


Figura 5.17: Entropía lineal para distintas particiones del sistema de la caminata acoplada al panadero con condiciones antiperiódicas. Arriba: Para el mapa del panadero convencional (derecha) y el de varias monedas independientes (izquierda). Abajo: se ve la diferencia entre ambas particiones para todos los miembros de la familia del panadero de 7 qubits.

Se puede observar que al excluir a la moneda del ambiente, la entropía lineal disminuye en aproximadamente uno para todos los miembros de la familia y que su comportamiento es similar. Esta disminución se debe a que, al ser infinita la dimensión del caminante, la saturación de la entropía viene dada por la dimensión del ambiente.

Podemos concluir que ambos comportamientos son similares y que el análisis que se pueda hacer sobre ellos es el mismo.

5.7. Comparación con Modelo de Decoherencia

La entropía y la varianza fueron comparadas con el modelo de decoherencia del espín pateado descrito anteriormente [6, 7, 8].

La varianza, según nuestros resultados de la caminata acoplada al panadero, crece en forma lineal a partir de un tiempo del orden de la dimensión del espacio de Hilbert. En el caso del caminante con decoherencia el comportamiento de la varianza nunca es lineal. Comparaciones anteriores a este tiempo son complicadas debido al complejo crecimiento de la varianza para el caminante acoplado al panadero.

En la entropía, en cambio, se puede observar que la caminata con el panadero se comporta en forma similar al caminante con decoherencia hasta ciertos tiempos. Por ejemplo en la figura 5.18 se muestra la entropía lineal de los panaderos convencionales de hasta 8 qubits y el de decoherencia total.

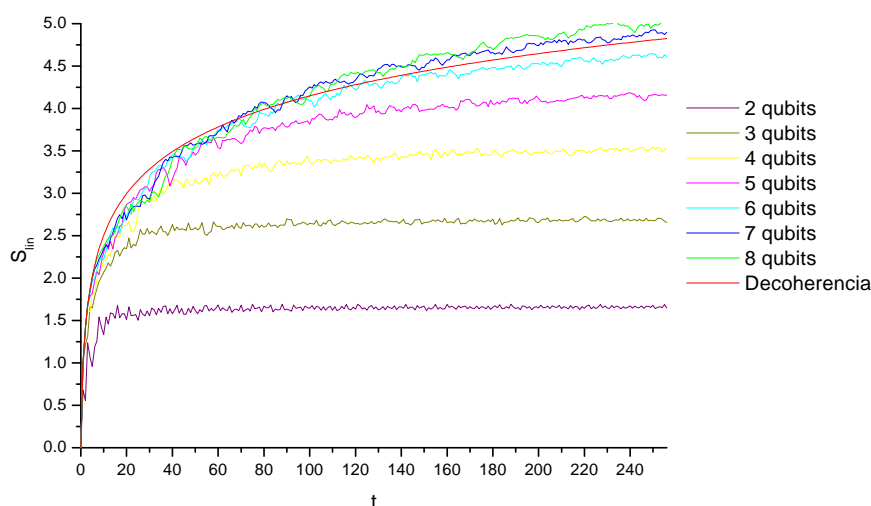


Figura 5.18: Entropía lineal en función del tiempo en escala logarítmica. El estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ en cada uno de los qubits y los ángulos de Floquet son nulos.

En el caso de decoherencia total, el ambiente almacena la información del caminante sin que vuelva a este último. Se puede entender que a tiempos chicos comparados con la dimensión del ambiente, el panadero también almacena esa información. El entrelazamiento del mapa permite que esa información se almacene en todo el espacio del panadero, pero al ser finito y poseer N estados ortogonales, la información a tiempos largos debe volver al caminante. Esa es la razón por la cual la entropía del caminante con panadero no puede “seguir” al de decoherencia para tiempos grandes.

5.7.1. Distancia Entre Wigners

Una medida de cuánto difieren la evolución del caminante acoplado con el panadero y con el de decoherencia total, es la distancia entre sus funciones de Wigners.

Utilizaremos como distancia entre Wigners a la suma de los cuadrados de las diferencias de las Wigners.

Al utilizar la segunda propiedad de las funciones de Wigner, esta distancia se puede escribir como:

$$\delta_{deco} \equiv \sum_{q, p} (W(q, p) - W(q, p)_{deco})^2 \propto Tr[(\rho - \rho_{deco})^2] \quad (5.25)$$

En la figura 5.19 se muestra δ_{deco} en función del tiempo para la familia del panadero de 7 qubits. Nuevamente se observa que el mapa de varias monedas es el más alejado de la caminata clásica. Se puede notar que dentro del resto de los miembros del panadero los que menos distan de la caminata clásica son los miembros intermedios y no el panadero convencional.

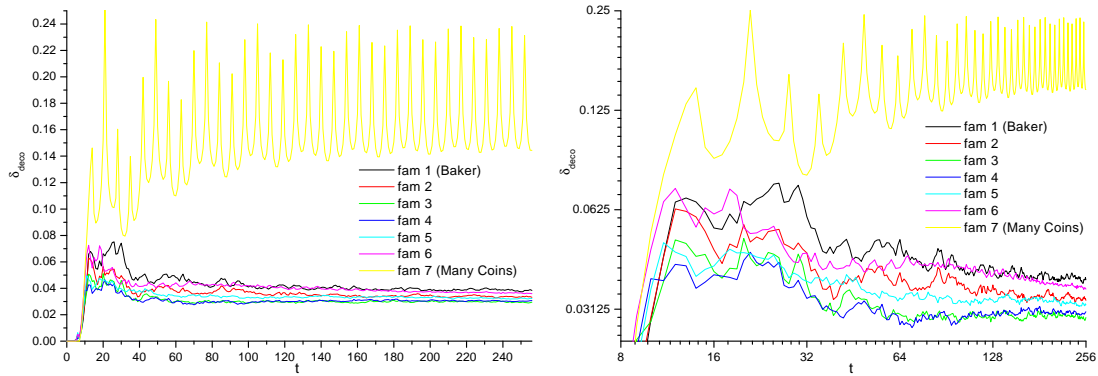


Figura 5.19: Distancia de Wigner con la de decoherencia total para la familia del panadero con condiciones periódicas de 7 qubits con condiciones iniciales “simétrica”. En la izquierda se ve en escala lineal y en la derecha logarítmica.

Conclusiones

En esta tesis estudiamos la caminata cuántica acoplada a un ambiente producido por la familia de mapas del panadero.

En primer lugar analizamos las características de ambos sistemas por separado.

Encontramos una nueva interpretación de la familia de mapas del panadero en términos de circuitos cuánticos y como nueva cuantización del espacio de fases.

Los mapas estudiados fueron los de condiciones periódicas y antiperiódicas de hasta 8 qubits. El mapa de varias monedas independientes fue distinguido como un caso especial de la familia de mapas del panadero ya que no produce entrelazamiento entre qubits, posee un límite semiclásico distinto a los demás y presenta un espectro con un alto grado de degeneración.

Luego se acoplaron los sistemas eligiendo al qubit más significativo del mapa del panadero como moneda del caminante. Encontramos que la varianza, en el límite de tiempos grandes, crece en forma lineal y que su pendiente depende de la dimensión del ambiente y del tipo de mapa del panadero. Un caminante clásico tiene pendiente nula en ese límite, por lo tanto se puede pensar a esta pendiente como una medida de la capacidad de producir decoherencia por parte de un ambiente finito.

Otra de las medidas estudiadas fue la entropía lineal generada al partir al sistema total como caminante vs. mapa del panadero (moneda y entorno). Esta entropía (salvo para varias monedas independientes) crece rápidamente hasta tiempos del orden del espacio del ambiente y luego crece lentamente hasta llegar a un valor asintótico en tiempos del orden de 10 veces la dimensión del espacio de Hilbert. Recién a estos tiempos las curvas de entropía se separan de la del caminante bajo la acción de decoherencia total.

La entropía de los mapas de varias monedas presenta un tiempo de saturación corto y un quasi-período igual al número de monedas. Se obtuvo numéricamente una supuesta curva universal en el número de monedas para la entropía normalizada. Esta se definió como la entropía lineal sobre la entropía de saturación en función del tiempo sobre el número de monedas. Sería bueno intentar encontrar una expresión analítica para esta entropía o profundizar su estudio numérico.

Al analizar la entropía lineal de una partición del sistema distinta, tomando al caminante y la moneda vs. el entorno de la moneda, no se obtuvieron grandes diferencias. Excluir a la moneda del entorno redujo en aproximadamente uno al valor de la entropía para todas las familias del panadero.

Consideramos los resultados de la varianza y la entropía, y los analizamos en los tres regímenes

nes temporales, separados por el tiempos iguales al número de qubits y al tamaño de la dimensión del ambiente.

Podemos concluir que en el primer régimen, el caminante presenta un comportamiento clásico. Esto se debe a que el panadero “absorbe” la información de la moneda y por lo tanto no hay interferencias.

En el segundo régimen, el mapa de varias monedas “vierte” esa información sobre el caminante y produce que este se vuelva cuántico. En cambio, el resto de los mapas del panadero en estos tiempos pueden almacenar esa información en un espacio “más distribuido” dependiendo del grado de entrelazamiento entre sus qubits. En este régimen intermedio, la entropía parece tener un comportamiento clásico mientras que la varianza se parece más a la cuántica.

Por último se encuentra el régimen cuántico en el cuál la información es devuelta al sistema debido a que se ha saturado el espacio de Hilbert del entorno (este sólo posee N estados ortogonales).

Uno de los objetivos de este trabajo fue caracterizar a los distintos miembros de la familia del panadero como ambientes de la caminata. Dejando de lado el mapa de varias monedas obtuvimos como resultados que los miembros intermedios de la familia del mapa del panadero son “mejores” ambientes en términos de producción de decoherencia que el mapa del panadero convencional. Esta afirmación fue confirmada a través de la entropía lineal, la pendiente de la varianza, la distancia variacional y las diferencia de las funciones de Wigner con la de decoherencia total. Este resultado no es tan sorprendente debido a que ya se había observado que la producción de entrelazamiento del panadero convencional era menor a la de todos los otros miembros en el caso del mapa con condiciones periódicas.

Por último creemos que sería bueno estudiar la diferencia entre los distintos miembros del panadero en su rol de ambientes a través de espectros del multibaker y otras herramientas de caos cuántico. También sería útil ampliar el estudio tanto a distintas condiciones iniciales como diferentes elecciones de los ángulos de Floquet en las cuales hayan menos simetrías.

Apéndice A

Implementación del Panadero con ángulos de Floquet

El mapa del panadero cuántico convencional en un espacio de Hilbert de dimensión $N = 2^n$, consiste básicamente en dos transformadas de Fourier discretas (una en un espacio de dimensión $N = 2^n$ y otra de $\frac{N}{2} = 2^{n-1}$). Como se ve en el capítulo de la familia del panadero, los otros miembros son reducibles a swaps y panaderos convencionales en espacios más pequeños.

Si aplicamos el mapa del panadero en forma matricial, se necesitan del orden de $N^4 = 2^{4n}$ operaciones. El mejor de los algoritmos clásicos para la implementación de la transformada de Fourier, FFT (Fast Fourier Transforms), requiere del orden de $\propto N \log(N) \propto 2^n n$ de operaciones. Esto quiere decir que en el mejor de los casos, los recursos necesarios escanean exponencialmente con el número de qubits.

Podemos descomponer al mapa del panadero en coordenadas, de manera tal que utilice transformadas de Fourier de la mitad del espacio como máximo. Por otro lado, también queremos dejar expresado el mapa del panadero con ángulos de Floquet en función de transformadas de Fourier sin esos ángulos, con el fin de aplicar FFT's.

Si llamamos a $N' = \frac{N}{2}$, podemos representar a la antitransformada de Fourier de la siguiente manera:

$$\langle n | F_{2N'}^\dagger \chi_p \chi_q | k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2N'}} \exp\left(\frac{i2\pi}{2N'}\right)(n + \chi_q)(k + \chi_p) \quad (\text{A.1})$$

con $n, k = 0, 1, \dots, 2N' - 1$.

Separamos de n su bit menos significativo, y de k su bit más significativo:

$$n = n_1 + 2n_2, \quad k = k_2 + N'k_1 \quad (\text{A.2})$$

$$0 \leq n_1, k_1 \leq 1, \quad 0 \leq n_2, k_2 \leq N' - 1 \quad (\text{A.3})$$

podemos escribir a el exponente de (A.1) como

$$\frac{(n + \chi_q)(k + \chi_p)}{2N'} = \frac{(n_1 + \chi_q)(k_2 + \chi_p)}{2N'} + n_2 k_1 + \frac{(n_1 + \chi_q)k_1}{2} + \frac{n_2(k_2 + \chi_p)}{N'} \quad (\text{A.4})$$

donde el segundo término se anula.

Entonces podemos representar a la antitransformada de Fourier gráficamente como:

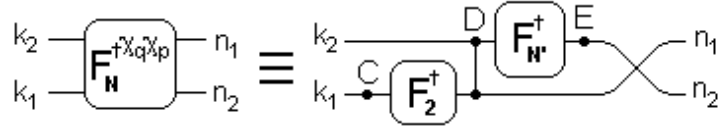


Figura A.1: Representación circuital de la antitransformada de Fourier.

donde las transformadas de Fourier son enteras y pueden realizarse con FFT's, y los valores de la fases son los siguientes:

$$C = e^{i2\pi \frac{\chi_q k_1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

$$D = e^{i2\pi \frac{(n_1 + \chi_q)(k_2 + \chi_p)}{2N'}} \quad (\text{A.6})$$

$$E = e^{i2\pi \frac{\chi_p n_2}{N'}} \quad (\text{A.7})$$

Por otro lado, descomponemos la transformada de Fourier en N' del mapa del panadero:

$$\frac{(n'_2 + \chi_q)(k_2 + \chi_p)}{N'} = \frac{\chi_q(k_2 + \chi_p)}{N'} + \frac{n'_2 k_2}{N'} + \frac{n'_2 \chi_p}{N'} \quad (\text{A.8})$$

lo que da:

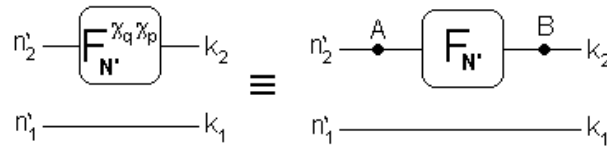


Figura A.2: Representación circuital del mapa del panadero en representación mixta.

con las fases:

$$A = e^{-i2\pi \frac{\chi_p n'_2}{N'}} \quad (\text{A.9})$$

$$B = e^{-i2\pi \frac{\chi_q(k_2 + \chi_p)}{N'}} \quad (\text{A.10})$$

Si juntamos todo, que da:

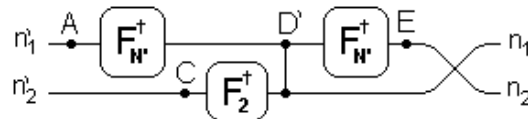


Figura A.3: Representación circuital del mapa del panadero en representación posición

donde $D' = e^{i2\pi \frac{(n_1 - \chi_q)(k_2 + \chi_p)}{2N'}}$ y A , C y E son las fases de (A.9), (A.5) y (A.7).

Agradecimientos

Antes de terminar esta tesis me gustaría decirle *GRACIAS* a mucha gente por este último año de trabajo, por mi carrera y por todo lo demás:

A Marcos, por haberme dado un espacio con tanta confianza y libertad. Por las charlas frente al pizarrón, por mostrarme el trabajo de investigación, por haberme dejado trabajar como si fuera un par y por la buena onda.

A Juan Pablo Paz por todo lo que me enseñó, por ser el primer y último profesor de mi carrera, y por estar siempre dispuesto a ayudarme en todo lo necesario.

A Fernando Lombardo por escuchar en momentos decisivos y por los consejos.

A Ceci López por ayudarme a dar los primeros pasos de esta caminata. A Nacho y Augusto por haberme dado varias manos apenas las necesitaba.

A todo el grupo de Caos Cuántico del Tandar y el de Computación Cuántica de la UBA, por haberme hecho sentir uno más.

A mis amigos de la facultad, por miles de momentos, arribeñadas, quemadas de cabezas, asados, ayudas de todo tipo, noches y por otras miles de cosas: A Brenda, Fernandito y Alexis (porque entre “fritas” y “trompadas” las cosas fueron saliendo); a Willy y León, por el “trío de los panchos”; a Diana, Flavia y Cora por ser mis amigas incondicionales; a Ceci (mi compañerita cuántica!) por la risa fácil y a mi gran *amicco* Rolo por los chips-cofis y por las grandes charlas y aventuras.

A mis amigos no físicos, o sea, del alma (o metafísicos?) o como se los quiera llamar: A Leo, Topo, Mocho, Bofe, Di Mein, El Diego y Dubi que estuvieron y están desde hace mucho tiempo.

A mis hermanos Mauri y Ana por ser mis amigos y por todo lo que venimos compartiendo.

A mis viejos, por todo lo que aprendí de ellos, porque siempre sentí muy fuerte su apoyo y porque los llevo muy adentro.

A mi abuela Lore; a mi abuelo Moisés, y a Dorita, que estoy seguro que estaría muy contenta en este momento.

A Anita, que es la luz de mi camino. Por ser y existir. Por llenar mi alma y corazón, y por todos los momentos que vivimos.

A Ástor y a Mizuz por todas las demostraciones de afecto y por enseñarme los secretos de la vida con mucha sabiduría.

A todas las personas con las que la pasé bien en estos años.

A Ceci, Ro, Marius y Emi por ser mis amigas y por todos los encuentros.

A mis primitos sanjuaninos Luchi, Iván, Ari e Iru. A Analía y Hugo. A Barby, por supuesto!!

A mis maestros Lili y Samela. A Zulma, por los buenos tiempos. ...

Bibliografía

- [1] Nielsen A. y Chuang I., *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000)
- [2] Preskill J., *Course on Quantum Information and Computation*, (<http://www.theory.caltech.edu/preskill/ph229>)
- [3] Childs A. M., Cleve R., Deotto E., Fahri E., Guttman S. y Spielman D. A., *Exponential Algorithmic speedup by quantum walk*, quant-ph/0210064 (2002)
- [4] Shenvi N., Kempe K. y Whaley K. B., *A Quantum Random Walk Search Algorithm*, quant-ph/0209131 (2002)
- [5] Nayak A. y Vishwanath A., *Quantum walk on the line*, quant-ph/0010117 (2000)
- [6] López C. C., *Decoherencia en Computación Cuántica: Una Aplicación al Estudio de las Caminatas Cuánticas* (tesis de seminario, UBA, 2003)
- [7] López C. C. y Paz J. P., *Phase-Space Approach to the Study Decoherence in Quantum Walks*, Phys. Rev. A **68** 052305 (2003), quant-ph/0308104 (2003)
- [8] Teklemariam G., Fortunato E. M., López C. C., Emerson J. P., Paz J. P., Havel T. F. y Cory D., *Method for Moduling Decoherence on a Quantum Information Processor*, Phys. Rev. A **67**, 062316 (2003), quant-ph/0303115.
- [9] Weinstein Y. S., Lloyd S., Emerson J. V. y Cory D. G., *Experimental Implementation of the Quantum Baker's Map*, Phys Rev Lett **89** 157902 (2002), quant-ph/0201064 (2002)
- [10] Bianucci P., *Decoherencia en Mapas Cuánticos*, (tesis de seminario, UBA, 2001).
- [11] Guckenheimer J. y Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations os Vector Fields*, (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [12] Balazs N. L. y Voros A., Ann. Phys, **190** (1989) 1.
- [13] Saraceno M. , Ann. Phys., **199** (1990) 37.
- [14] Saraceno M. y Voros A., *Towards a semiclassical theory of the quantum baker's map*, Physica D **79** (1994) 206.
- [15] Rubin R. y Salwen N., Ann. Phys **269** (1998) 159.

-
- [16] Schack R. y Caves C. M., *Shifts on a Finite Qubit String: A Class of Quantum Baker's Map*, *Applicable Algebra and Engineering, Communication and Computing*, **10** 305 (2000), quant-ph/9810050
- [17] Scott A. J. y Caves C. M., *Entangling power of the quantum baker's map*, *J. Phys. A* **36** 9553 (2003), quant-ph/0305046 (2003)
- [18] Brun T. A., Hilary A. C. y Ambainis A., *Quantum Random Walks With Decoherent Coins*, *Phys. Rev. A* **67**, 032304 (2003), quant-ph/0210161 (2002)
- [19] Brun T. A., Hilary A. C. y Ambainis A., *Quantum Walks Driven by Many Coins*, *Phys. Rev. A* **67**, 052317 (2003), quant-ph/0210180 (2002)
- [20] Wojcik D. K. y Dorfman J. R., *Quantum Multibaker Maps: Extreme Quantum Regime*, *Phys. Rev. E* **66**, 036110 (2002), quant-ph/0203494 (2002).
- [21] Wojcik D. K. y Dorfman J. R., *Crossover From Diffusive to Ballistic Transport in Periodic Quantum Chains*, *Physica D* **187** 223-243 (2004), quant-ph/0212036 (2002).
- [22] Bianucci P., Miquel C., Paz J. P. y Saraceno M., *Discrete Wigner Functions and the Phase Space Representation of Quantum States*, quant-ph/0106091 (2001)
- [23] Miquel C., Paz J. P. y Saraceno M., *Quantum Computers in Phase Space*, *Phys. Rev. A* **65**, 062309 (2002), quant-ph/0204149 (2002)
- [24] Bianucci P., Miquel C., Paz J. P. y Saraceno M., *Discrete Wigner Functions and the Phase Space Representation of Quantum States*, quant-ph/0106091 (2001)
- [25] Paz J. P., Roncaglia A. J. y Saraceno M., *Qubits in Phase Space: Wigner Function Approach to Quantum Error Correction and the Mean King Problem*, quant-ph/0410117 (2004)