

SUPERCONDUCTIVIDAD DE COLOR EN MODELOS DE QUARKS NO LOCALES

Rene Sergio Duhau

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Octubre de 2004

TEMA: Superconductividad de color en modelos de quarks no locales.

ALUMNO: Rene Sergio Duhau.

LU N°: 156/88.

PALABRAS CLAVES: Simetrías de QCD, modelo de Nambu y Jona-Lasinio en $SU(2)$, modelo quiral, interacciones quark-antiquark y quark-quark, interacciones no locales, diagramas de fases, transición de fases quiral.

LUGAR DE TRABAJO: Laboratorio Tandem, Unidad de Actividad de Física, Centro Atómico Constituyentes (CAC), Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA), Av. Gral. Paz 1499, (1650) San Martín.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Norberto N. Scoccola.

FECHA DE INICIACION: Septiembre de 2003.

FECHA DE FINALIZACION: Agosto de 2004.

FECHA DE EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Director

Profesor de Tesis de Licenciatura

Resumen

En la presente tesis de licenciatura estudiamos el diagrama de fases de materia de quarks de dos sabores, utilizando un modelo relativista con interacciones covariantes no locales, orientando nuestros cálculos a la región de bajas temperaturas y densidades moderadas. En este trabajo utilizamos reguladores no locales del tipo gaussiano, lorentziano y del modelo de instantones, de manera de estudiar la dependencia de los resultados con el tipo de regulador. En nuestros cálculos consideramos los dos sabores más livianos de quarks (*up y down*), asumiendo simetría de isospín ($m_u = m_d$). El Lagrangiano utilizado describe interacciones no locales de cuatro fermiones que permite el estudio de condensados tipo quark-quark y quark-antiquark. En particular enfocamos los cálculos en el canal escalar antitriplete de color para los condensados quark-quark y el canal escalar singlete de color para los condensados quark-antiquark.

Los resultados obtenidos indican que si bien los diagramas de fases coinciden cualitativamente con los de modelos con interacciones locales, los *gaps* de la fase superconducctora a valores medios del potencial químico son mayores. En consecuencia, obtenemos que en tal región la temperatura crítica en la cual desaparece la fase superconducctora es del orden de 100-120 MeV.

Por último, se estudian los cambios en el diagrama de fases cuando se varía la relación entre las constantes de acoplamiento de los canales analizados. Encontramos que, cuando la relación entre las constantes de acoplamiento quark-quark y quark-antiquark son algo superiores al valor comúnmente usado ($3/4$), el punto triple y el *end point* del diagrama de fases $T - \mu$ se juntan y aparece una fase donde tanto el condensado quiral como el de diquarks adquieren valores distintos de cero.

Índice general

1. Introducción	8
2. El modelo quiral tipo NJL en SU(2) y sus extensiones no locales	13
2.1. La Cromodinámica Cuántica (QCD)	13
2.1.1. Las simetrías de la QCD	14
2.2. El modelo NJL	16
2.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica. Mesones	17
2.3. Interacciones tipo NJL	20
2.4. Interacciones no locales y separables	22
3. Extensión del modelo a T y μ finitos	26
3.1. La acción efectiva	26
3.2. Formalismo de tiempo imaginario	28
3.3. Potencial termodinámico	30
3.4. Ecuaciones del gap	31
3.5. Condensados y densidad de quarks. Susceptibilidad quiral	32
4. Resultados numéricos para diferentes reguladores. Diagramas de fases	34
4.1. Regulador Gaussiano	34
4.2. Regulador Lorentziano	36
4.3. Regulador del modelo de instantones	36
4.4. Dependencia de los diagramas de fase con la relación entre las constantes de acoplamiento	37
5. Conclusiones	46
A. Transformaciones de Fierz	48
B. Transformación del término de integrales fermiónicas	53
C. Cálculo de $\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger$	56

D. Regularización del potencial termodinámico	59
E. Cálculo de los condensados de quarks	61

Capítulo 1

Introducción

El estudio del diagrama de fases de la cromodinámica cuántica (QCD), es actualmente uno de los temas de mayor interés en el campo de las interacciones fuertes. Poco tiempo después que se aceptara la idea de que los hadrones están formados por quarks y gluones confinados, se sugirió que a altas temperaturas o densidades tal confinamiento podría desaparecer [1]. En este marco, entonces, existen claramente dos fases: la fase hadrónica de quarks y gluones confinados y el llamado plasma de quarks y gluones (QGP). El correspondiente diagrama de fases es como el que se muestra en la figura 1.1. En la naturaleza, el plasma de quarks y gluones seguramente existió en el universo recién formado, pocos microsegundos después del Big Bang cuando la temperatura era muy elevada. No es tan claro, sin embargo, que existan hoy en día estados de la materia en que los quarks no estén confinados. Una posibilidad que ha merecido cierta atención es que se produzcan en el interior de objetos estelares singulares como las estrellas de neutrones [2]. En los últimos años, se han encarado proyectos experimentales de colisionadores de iones pesados específicamente diseñados para la creación e identificación del plasma de quarks y gluones. Uno de ellos es el *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) en Brookhaven (USA), el cual se puso en operación en el año 2000. Si bien existen indicios de que se ha alcanzado la fase de quarks libres, los resultados están aún en discusión [3]. Otro proyecto, en construcción en el CERN, es el *Large Hadron Collider* (LHC), en el cual se depositan grandes esperanzas de llegar a crear el plasma de quarks y gluones, debido a la elevada energía que se espera que alcancen los haces colisionantes.

Durante casi dos décadas, se creyó que el diagrama de fases era básicamente el mostrado en la figura 1.1. En el año 75 apareció el primer trabajo sugiriendo la posibilidad de apareamientos de Cooper en materia de quarks [1]. Dado que la QCD es asintóticamente libre, es decir, la interacción se debilita a pequeñas distancias, a densidades suficientemente elevadas y bajas temperaturas es posible que exista una superficie de Fermi de quarks casi-libres. Las interacciones entre quarks cerca de la superficie de Fermi son ciertamente atractivas en algunos canales (ya que la QCD enlaza quarks para formar bariones) y, tal como demostraron Bardeen, Cooper y Schrieffer, si existe algún canal en el cual la interacción es

atractiva también hay un estado de menor energía libre que el dado por la superficie de Fermi. Puesto que un par de quarks no puede ser singlete de color, el correspondiente condensado rompe la simetría local de color propia de la QCD ($SU(3)_{color}$). Por tal motivo, a este fenómeno se lo llama “superconductividad de color”. Aunque luego aparecieron trabajos relacionados con esta idea, su importancia para el conocimiento del diagrama de fases de la QCD no fué reconocida hasta fines de los años 90. Aparecieron entonces nuevos enfoques del fenómeno de la superconductividad de color que indicaban que los *gaps* en el espectro de fermiones podrían ser del orden de los 100 MeV, mucho mayores de lo que se suponía anteriormente [4, 5]. Si tenemos en cuenta que la temperatura crítica aumenta con el gap, esos resultados implicaban que la región de superconductividad de color se extendía más allá de lo que inicialmente se pensaba, agregando una nueva fase al diagrama mostrado en la figura 1.1.

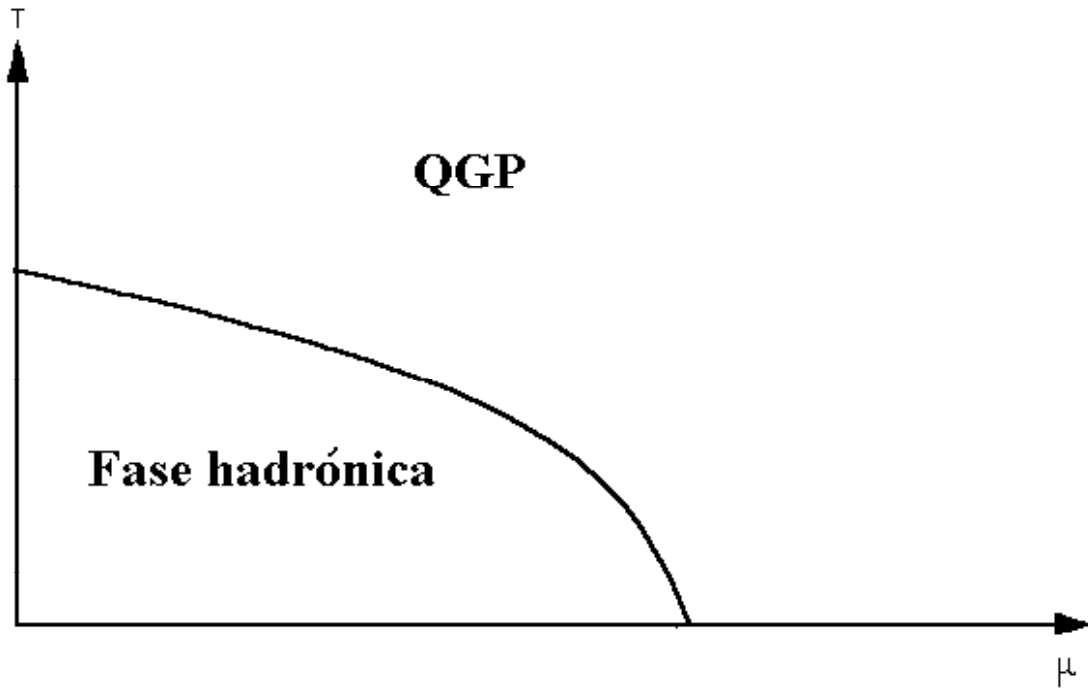


Figura 1.1: Diagrama de fases de la QCD anterior a los trabajos sobre superconductividad de color. En la figura aparecen simplemente la fase de materia hadrónica y la del plasma de quark y gluones libres.

Una vez que la idea de la superconductividad de color fué aceptada, surgieron nuevas posibilidades. Una de ellas [6], se muestra en el diagrama de fases de la figura 1.2. Es de esperar por ejemplo que, para potenciales químicos suficientemente grandes, los quarks *up*, *down* y *strange* estén apareados en los condensados llamados *Color-Flavor Locked* (CFL).

Sin embargo, dado que la masa del quark *strange* es un orden de magnitud superior a las de los quarks *up* y *down*, deberían antes aparecer condensados de quarks *up* y *down* apareados, la fase conocida como *Two Color-Flavor Superconductivity* (2SC). Más recientemente se ha sugerido la presencia incluso de otras fases que podrían ocupar parcialmente el lugar de la fase 2SC o quizás reemplazarla por completo [7].

Lo anteriormente expuesto sirve para señalar el conocimiento incompleto que se tiene de la estructura de fases de QCD. El principal método para obtener las propiedades termodinámicas de materia con interacciones fuertes y, en particular, su ecuación de estado, es el cálculo de la QCD en red [8]. La idea básica es utilizar un espacio-tiempo discreto, una red de puntos, para calcular la función de partición gran canónica de un sistema de fermiones que interactúan a través del Lagrangiano de QCD. Disponiendo de suficiente poder de cómputo, es posible en principio disminuir el espaciamiento de la red e incrementar el tamaño del sistema de manera de acercarse, respectivamente, tanto al límite del continuo como al termodinámico. Al mismo tiempo, es posible muestrear un número suficientemente grande de configuraciones de manera que el error estadístico sea arbitrariamente pequeño. Sin embargo, los métodos del tipo Monte Carlo utilizados comúnmente para evaluar la función de partición sólo son confiables para el caso en que el potencial químico de las partículas sea cero. La extensión de los cálculos a potenciales químicos distintos de cero presenta grandes dificultades y sólo recientemente se han obtenido algunos resultados que están aún en discusión [9].

Debido a que los resultados exactos obtenidos directamente a partir de la QCD son al día de hoy bastante limitados, es natural recurrir a modelos efectivos que resultan entonces herramientas útiles para lograr avances en este campo de la física. Uno de los modelos efectivos que ha recibido gran atención en los últimos años es el de Nambu y Jona-Lasinio (NJL). Su historia se remonta al año 1961, en el que Y. Nambu y G. Jona-Lasinio publicaron dos trabajos titulados *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity* [10]. Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de algún límite en el cual el pión es un bosón de Goldstone (no másico) asociado con la ruptura espontánea de la simetría quiral. Lo que ellos pretendían era explicar la pequeña masa que distingue al pión de otros hadrones. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasinio partieron de un Lagrangiano con una interacción local entre nucleones (los bloques básicos de materia conocidos hasta ese momento) con simetría quiral, cuya ruptura espontánea da lugar a un bosón de Goldstone que ellos indentificaron con el pión.

Cuando la QCD fué finalmente formulada, a mediados de los años 70, el modelo NJL empezó a ser abandonado debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Sin embargo, QCD resulta aplicable en forma exitosa fundamentalmente en el rango de altas energías. Para estudiar los procesos de bajas energías, aún hoy en día es necesario recurrir a aproximaciones o modelos efectivos. En este contexto, en la segunda parte de los años 80, surgió la idea de reinterpretar el modelo NJL como un modelo para un sistema de quarks en lugar de nucleones. En este esquema, se considera que los grados de libertad de los gluones están “congelados”, dando lugar a interacciones efectivas entre los quarks. Este modelo, así como sus generalizaciones, ha sido utilizado en numerosos estudios de las propiedades

hadrónicas tanto en su versión para dos sabores como en el caso de considerar también el quark *strange* [11, 12]. Un problema del modelo NJL relacionado con el uso de interacciones locales, es que se debe introducir algún tipo de regularización para evitar que resulten divergentes los diagramas involucrados en la determinación de cantidades como la auto-energía de los quarks y el condensado de quarks. Esto introduce ciertas ambigüedades en el cálculo de dichas propiedades, así como de las correcciones debidas a los lazos de mesones. A lo largo de la última década han aparecido trabajos que proponen el uso de interacciones no locales para solucionar este tipo de inconvenientes, a cambio de algunas complicaciones en los cálculos [13]. Una de las propuestas de mayor interés surge de la relación entre el modelo NJL y el modelo de líquido de instantones [14]. En este último modelo se supone que la solución de instantón representa la fluctuación estable dominante del campo de gluones. La interacción efectiva entre los quarks surge de la cuantización de los modos cero alrededor de dichas soluciones. Dicha interacción es no local y en general se expresa en el espacio de momentos a través de un factor de forma $r(p)$. Esto motivó a diversos autores a utilizar este tipo de interacciones no locales para generalizar los modelos tipo NJL, considerando no sólo el factor de forma particular que surge del modelo de instantones sino también del tipo gaussiano o lorentziano. El uso de interacciones no locales tiene diversas ventajas ya que, por ejemplo, las anomalías son automáticamente preservadas [15] y la acción efectiva es finita a todo orden en la expansión en lazos [16] (es decir tanto los lazos fermiónicos como los de mesones son finitos). Por otro lado recientemente [28] se ha demostrado que mediante una adecuada elección del factor de forma es posible lograr que el propagador fermiónico no tenga polos reales y que por lo tanto los quarks no puedan aparecer como estados asintóticos. Esto es interpretado como una forma de implementar la propiedad de confinamiento que posee la QCD, la cual no presenta el modelo NJL local.

En la presente tesis se utiliza una generalización del modelo NJL para $SU(2)$ con interacciones no locales para estudiar las transiciones entre tres fases diferentes: la fase de simetría quirial rota, la fase superconductora de color-sabor (2SC) y la fase de gas de quarks libres.

En el Capítulo 2 se exponen las características generales de la QCD y se presentan el modelo local de Nambu y Jona-Lasinio en $SU(2)$, como así también su generalización y la forma de introducir interacciones no locales. En el Capítulo 3, comenzando con la función de partición a temperatura y potencial químico nulos, se obtiene el potencial termodinámico gran canónico a temperatura y potencial químico distintos de cero. Este desarrollo se realiza con la introducción de campos bosónicos y en la aproximación de campo medio, desechando las fluctuaciones de dichos campos. A partir del potencial gran canónico se derivan todas las magnitudes necesarias para construir el diagrama de fases de la materia en estudio. En el Capítulo 4 se presentan los resultados numéricos obtenidos con reguladores de tipo gaussiano, lorentziano y del modelo de instantones. En el Capítulo 5 se exponen las conclusiones del trabajo. Por último, en los Apéndices se describirán con más detalle algunos cálculos mencionados en el cuerpo principal de la tesis.

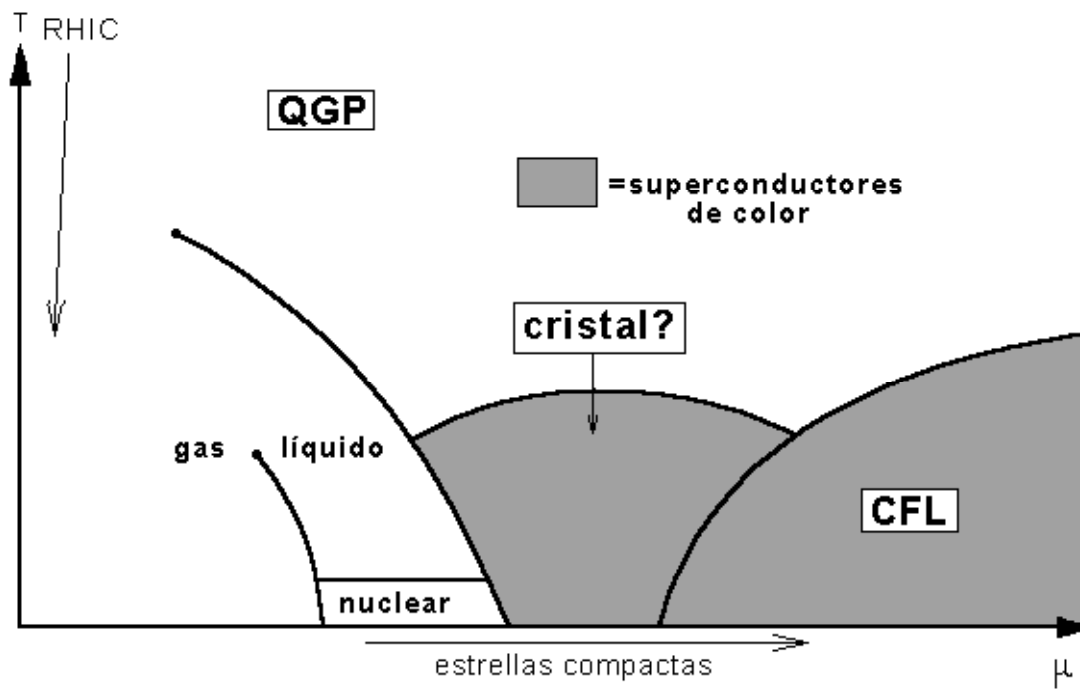


Figura 1.2: Conjetura del diagrama de fases de QCD en el plano $T - \mu$. La figura muestra las regiones de temperatura y densidad en las cuales la materia existe como fluido nuclear, gas de hadrones, o plasma de quarks y gluones. La flecha de la izquierda corresponde a la región actualmente en investigación en los aceleradores de iones pesados de alta energía. La flecha en la parte inferior traza el camino seguido por una estrella de neutrones mientras se forma.

Capítulo 2

El modelo quiral tipo NJL en $SU(2)$ y sus extensiones no locales

2.1. La Cromodinámica Cuántica (QCD)

La Cromodinámica Cuántica [18] es una teoría de gauge no abeliana que describe las interacciones fuertes entre quarks a través del intercambio de gluones. El Lagrangiano de la QCD es

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m})\psi(x) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \\ c(x) \\ t(x) \\ b(x) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

representa el campo de quarks con tres colores y seis sabores, las masas desnudas de los quarks están agrupadas en la matriz de masa \hat{m} definida por $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, m_c, m_t, m_b)$ en el espacio de sabor. La derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a \quad (2.3)$$

está relacionada con los campos gluónicos A_μ^a (con índice de color $a = 1, \dots, 8$), y

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.4)$$

es el tensor de campo gluónico, siendo λ^a los generadores de $SU(3)$ (matrices de Gell-Mann), f^{abc} las correspondientes constantes de estructura y g la constante de acoplamiento.

Tal como está construido, el Lagrangiano de QCD es invariante ante transformaciones de gauge $SU(3)$ en el espacio de color. Por el carácter no abeliano del grupo de gauge, la QCD tiene ciertas características que la diferencian de las teorías de gauge abelianas como la electrodinámica cuántica. Algunas de estas particularidades son :

- el Lagrangiano de la QCD contiene autoacoplamientos gluónicos (vértices de tres y cuatro gluones), por lo que los gluones transportan carga de color.
- la QCD es asintóticamente libre, es decir, el acoplamiento se debilita a cortas distancias o, equivalentemente, a grandes impulsos [18].
- inversamente, el acoplamiento se vuelve intenso a bajos impulsos. Por tal motivo, no es posible aplicar perturbaciones en la QCD para describir hadrones de masas menores que ~ 2 GeV. Esto hace que resulte difícil de comprender en detalle el fenómeno del confinamiento, es decir, el hecho de que objetos de color, como quarks y gluones, no existan como grados de libertad físicos en el vacío [19].

2.1.1. Las simetrías de la QCD

Consideraremos, de aquí en adelante el caso de dos sabores de quarks (u y d). Supongamos además, por el momento, quarks sin masa (un caso llamado límite quirral) representados por el campo de Dirac $\psi(x)$. En esta situación particular, (2.1) se transforma en

$$\mathcal{L}_{QCD}^{(m=0)} = \bar{\psi}(x)i\gamma_\mu D^\mu\psi(x) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Los fermiones sin masa tienen una helicidad (o quiralidad) bien definida, lo cual significa que sus espines están alineados (dextrógiros) o anti-alineados (levógiros) con sus impulsos. Si introducimos los campos dextrógiro, ψ_R , y levógiro, ψ_L , dados por

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi, & \psi_L &= \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi, \\ \bar{\psi}_R &= \psi_R^\dagger\gamma_0 = \bar{\psi}\frac{1 - \gamma_5}{2}, & \bar{\psi}_L &= \psi_L^\dagger\gamma_0 = \bar{\psi}\frac{1 + \gamma_5}{2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

el término fermiónico del Lagrangiano dado en (2.5), $\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}i\gamma_\mu D^\mu\psi$, se separa en dos partes

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}_R i\gamma_\mu D^\mu\psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma_\mu D^\mu\psi_L, \quad (2.7)$$

y es invariante ante transformaciones quirales de sabor $U(2)_R \otimes U(2)_L$ que actúan sobre los campos dextrógiro y levógiro

$$\begin{aligned} U(2)_R &: \psi_R \rightarrow \exp(i\tau_s\alpha_R^s)\psi_R, \\ U(2)_L &: \psi_L \rightarrow \exp(i\tau_s\alpha_L^s)\psi_L, \end{aligned} \quad (2.8)$$

con parámetros $\alpha_{R,L}^s$, siendo τ_s las matrices de Pauli para $s=1,2,3$ y $\tau_0 = \mathbb{I}$. Las correspondientes corrientes de Noether son

$$J_{sR}^\mu = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\tau_s\psi_R, \quad J_{sL}^\mu = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\tau_s\psi_L, \quad (2.9)$$

con $\partial_\mu J_{sR}^\mu = \partial_\mu J_{sL}^\mu = 0$. Alternativamente, podemos escribir

$$J_{sR,L}^\mu = \frac{1}{2}[V_s^\mu \pm A_s^\mu] \quad (2.10)$$

en términos de las corrientes vectoriales y vectoriales axiales conservadas

$$V_s^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\tau_s\psi, \quad A_s^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\tau_s\psi, \quad (2.11)$$

con $\partial_\mu V_s^\mu = \partial_\mu A_s^\mu = 0$. Entonces, la simetría quiral $U(2)_R \otimes U(2)_L$ es equivalente a la invariancia ante el grupo $U(2)_V \otimes U(2)_A$ con transformaciones en el espacio de sabor

$$\begin{aligned} U(2)_V : \psi &\rightarrow \exp(i\tau_s\alpha_V^s)\psi, \\ U(2)_A : \psi &\rightarrow \exp(i\gamma_5\tau_s\alpha_A^s)\psi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

De esta manera, \mathcal{L}_ψ es invariante bajo el grupo de transformaciones

$$U(2)_R \otimes U(2)_L = SU(2)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.13)$$

Dado que en el término $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$ del \mathcal{L}_{QCD} no aparecen los campos fermiónicos, lo anterior también es válido para el Lagrangiano sin el término de masa, $\mathcal{L}_{QCD}^{(m=0)}$.

Sin embargo, el análisis anterior de las simetrías no es válido cuando consideramos el término de masa en el \mathcal{L}_{QCD} :

$$\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x)\hat{m}\psi(x), \quad (2.14)$$

pues ahora las cuadridivergencias de las corrientes dejan, en general, de ser cero

$$\partial_\mu V_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x)\left[\hat{m}, \tau_s\right]\psi(x), \quad (2.15)$$

$$\partial_\mu A_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x)\left\{\hat{m}, \tau_s\right\}\gamma_5\psi(x). \quad (2.16)$$

A lo largo de este trabajo vamos a suponer que las masas de los quarks u y d son iguales ($m_u = m_d = m$), de manera que

$$\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d) = m\mathbb{I}. \quad (2.17)$$

Así, el conmutador de (2.15) se hace cero y en total resultan cuatro las corrientes conservadas ($s = 0, \dots, 3$).

Las transformaciones $SU(2)_V$ y $U(1)_V$ son las transformaciones unitarias que corresponden a la conservación del isospín y del número bariónico, respectivamente. Las transformaciones quirales $SU(2)_A$ y axiales $U(1)_A$ alteran la paridad de un dado estado. Por ello, la realización de dichas simetrías en la naturaleza debería implicar para cada multiplete

la existencia de otro multiplete de paridad opuesta. Esto no es lo que se observa experimentalmente, de ahí se induce que tanto $SU(2)_A$ como $U(1)_A$ no se manifiestan en forma directa.

Se cree que $SU(2)_A$ es una simetría espontáneamente rota. Al ocurrir esto, en el caso de quarks de masa nula, aparecen $(N_s^2 - 1)$ modos de excitación de los campos de quarks y gluones, de masa nula, llamados bosones de Goldstone. Estos bosones se asocian con los piones, ya que experimentalmente se observa que la masa de los piones, si bien no es nula, es mucho menor que la de los nucleones. La expresión matemática de una simetría es la conmutación del hamiltoniano del sistema con el operador U correspondiente a la cantidad conservada, esto es, $[H, U] = 0$. Cuando una simetría está espontáneamente rota, lo que ocurre no es que el conmutador deja de ser nulo, sino que el vacío deja de ser invariante frente a las transformaciones del grupo de simetría del operador U . Como consecuencia, el estado fundamental deja de ser único y pasa a estar degenerado. Esto se puede expresar como $[H, U] = 0$, pero $HU|0\rangle \neq 0$.

Por otro lado, la simetría $U(1)_A$ está rota a nivel cuántico por la llamada “anomalía axial”. Esto significa que si bien la teoría clásica posee una dada simetría, en el proceso de cuantización ella se pierde dado que la corriente de Noether recibe una contribución extra que hace que su cuadrdivergencia deje de ser nula.

Si queremos partir de un Lagrangiano efectivo más simple que el de la QCD pero con sus mismas características y simetrías, nos vemos naturalmente llevados a considerar el Lagrangiano utilizado por Y. Nambu y G. Jona-Lasinio en su trabajo de 1961 [10]. Éste fue construido para nucleones con interacciones locales, y de manera que respetase las simetrías dadas por el grupo $SU(2)_V \otimes U(1)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_A$ (más tarde excluyeron la simetría $U(1)_A$ por consideraciones fenomenológicas). En nuestro caso, sólo es necesario reinterpretar dicho Lagrangiano como uno de quarks, asumiendo que las interacciones locales se corresponden con una interacción efectiva resultante de complicados procesos gluónicos.

El modelo de Nambu y Jona-Lasinio ofrece un esquema simple para estudiar la ruptura espontánea de simetría quiral y sus manifestaciones en la física de hadrones, como la generación dinámica de masa de los quarks, la aparición de un condensado de quarks y el rol de los piones como bosones de Goldstone. Tal vez el punto débil más importante del modelo es que no posee la propiedad de confinamiento de color de la QCD. Su aplicabilidad está entonces limitada a aquellos fenómenos hadrónicos y nucleares que no dependen sensiblemente en los detalles del mecanismo de confinamiento. Sin embargo, para muchos aspectos importantes de la física hadrónica de bajas energías, las simetrías de QCD son probablemente tanto o más importantes que el confinamiento. Es en este contexto que trabajaremos de aquí en adelante.

2.2. El modelo NJL

El modelo NJL parte de las siguientes hipótesis:

- Considera a los quarks livianos u y d como los grados de libertad del sistema.
- Asume que en el límite de bajas energías, los grados de libertad gluónicos están absorbidos dentro de una interacción efectiva y local entre quarks.
- Construye esta interacción en acuerdo con las simetrías de la QCD.

El Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - \hat{m})\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.18)$$

con la matriz de masas desnudas dada por $\hat{m} = m\mathbb{I}$. El término de interacción del Lagrangiano, \mathcal{L}_{int} , es de tipo local y de cuatro patas. Esta interacción debe satisfacer la simetría quiral $U(2)_R \otimes U(2)_L$ junto a la simetría $SU(3)_{color}$. El \mathcal{L}_{int} originalmente propuesto por Nambu y Jona-Lasinio es

$$\mathcal{L} = \lambda[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (2.19)$$

2.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica. Mesones

Tal como se señaló anteriormente, el modelo NJL originalmente fué pensado para nucleones interactuantes. Dado que en esa época no se sabía de la existencia de los quarks, el confinamiento de los mismos no constituía, obviamente, un problema. Por otro lado, aún en la época anterior a la QCD existían evidencias de una corriente axial (aproximadamente) conservada y, por lo tanto, de la validez de la simetría quiral. Puesto que la simetría quiral implica fermiones sin masa en el Lagrangiano, el problema era encontrar un mecanismo que explicara la gran masa de los nucleones sin destruir tal simetría. La idea de Nambu y Jona-Lasinio fué que el *gap* en el espectro de masas de los nucleones podría generarse análogamente al *gap* de energía de un superconductor, tal como lo predice la teoría BCS, en esa época recientemente formulada. De esta manera, propusieron un Lagrangiano quiralmente simétrico. Luego del desarrollo de la QCD, el modelo NJL fué reinterpretado al nivel de quarks. Esto agregó entonces el problema de la ausencia de confinamiento y, en principio, limitó la aplicación del modelo. Sin embargo, existen muchas situaciones donde el límite quiral es la característica principal de QCD, siendo el confinamiento menos relevante. El ejemplo más importante de ello, que veremos más adelante, es la identificación del pión como el bosón de Goldstone de la simetría quiral espontáneamente rota.

Consideremos el Lagrangiano original del modelo NJL (ecuación 2.19). La aproximación de Hartree (campo medio) es equivalente a linealizar la interacción, es decir, reemplazar los términos $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$ por $2\bar{\psi}\Gamma\psi\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$, siendo $\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$ el valor de expectación del vacío y Γ cualquiera de los operadores que aparecen en el término de interacción del Lagrangiano. Gráficamente, el proceso se muestra en la figura 2.1.

Como el vacío debe ser invariante de Lorentz y debe conservar paridad, el único valor de expectación no nulo en (2.19) es $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, correspondiente al condensado quark-antiquark.

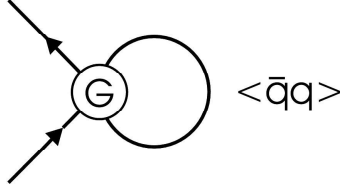


Figura 2.1: Cierre del lazo fermiónico, que esquematiza a la ecuación del gap.

Entonces, la ecuación de Dirac en la aproximación de campo medio resulta

$$[i \not{\partial} - m + g \langle \bar{\psi} \psi \rangle] \psi(x) = 0. \quad (2.20)$$

Aparece entonces en el Lagrangiano un nuevo término de masa generado por una interacción escalar suficientemente fuerte entre fermiones. Este término origina un cambio en la masa de los quarks dado por

$$M = m - g \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (2.21)$$

Al mecanismo descrito se lo conoce como generación dinámica de masa fermiónica, y a la ecuación (2.21) se la denomina ecuación del gap del modelo NJL, en analogía con la ecuación correspondiente que determina el gap de energía en un superconductor.

En la aproximación de campo medio, el condensado $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ está dado por

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -i \text{tr}[S_F(0)], \quad (2.22)$$

donde la traza actúa sobre los espacios de sabor, color y Dirac y S_F es el propagador de Dirac, definido por

$$S_F(x - y) = -i \langle T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{\not{p} - M + i\epsilon}. \quad (2.23)$$

La aparición de $S_F(0)$ en $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ refleja el lazo cerrado de la figura 2.1, con la línea fermiónica comenzando y terminando en el mismo punto del espacio-tiempo. Como la masa dinámica M aparece en la expresión de $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$, entonces la ecuación del gap es una ecuación autoconsistente. Utilizando (2.23) y (2.22), (2.21) se puede escribir como

$$M = m + 4N_C N_S g i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (2.24)$$

donde N_C y N_S es el número de colores y sabores respectivamente.

La integral de la ecuación anterior es cuadráticamente divergente y requiere, por lo tanto, de un procedimiento de regularización apropiado. Si introducimos un *cut-off* de momento

espacial Λ e integramos sobre la componente temporal p_0 obtenemos

$$M = m + \frac{N_C N_S}{\pi^2} \int_0^\Lambda \vec{p}^2 dp \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad (2.25)$$

ecuación que tiene una solución no trivial con $M \neq m$ cuando la constante de acoplamiento g excede un valor crítico que depende de Λ . Esto ocurre aún en el límite quiral ($m=0$), en cuyo caso los quarks adquieren una masa dinámica.

La generación dinámica de masa va en paralelo con la restructuración del vacío: para $g > g_{crit}$ el vacío contiene un condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ no nulo. Como la densidad escalar $\bar{\psi}\psi$ rompe la simetría quiral, el estado fundamental no presenta la simetría $U(2)_R \otimes U(2)_L$ del Lagrangiano. La simetría quiral es espontáneamente rota, y el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ es el parámetro de orden correspondiente.

Para resumir, se distingue entre estos dos casos de realización de la simetría quiral:

- a) La fase Wigner-Weyl en la cual $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$ y los fermiones no adquieren masa dinámica. Equivalentemente, la carga axial $Q_5 = \int d^3x A_0(x)$ aniquila el vacío: $Q_5 |0\rangle = 0$. En el modelo NJL este es el caso para $g < g_{crit}$.
- b) La fase Nambu-Goldstone en la cual $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ y los fermiones adquieren masa dinámica. En esta fase existe un bosón de Nambu-Goldstone no másico. La carga axial no aniquila el vacío: $Q_5 |0\rangle \neq 0$. En el modelo NJL esto sucede cuando g excede a la constante de acoplamiento crítica g_{crit} .

Para ver cómo emerge el pión en este modelo como el bosón de Goldstone sin masa, construimos la matriz T que surge de resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (ecuación de dos cuerpos) en el canal quark-antiquark para un dado cuadrimomento cuadrático q^2 del mesón:

$$T_M(q^2) = \frac{g}{1 - g \Pi_M(q^2)}, \quad (2.26)$$

donde $\Pi_M(q^2)$, la polarización quark-antiquark, está dada por

$$\Pi_M(q^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[\Gamma_M S(p+q) \Gamma_M S(p)] \quad (2.27)$$

y $S(p) = (\not{p} - M + i\epsilon)^{-1}$ es el propagador del quark *vestido*. En la figura 2.2 se muestra esquemáticamente como obtener la ecuación (2.26) iterando el vértice de cuatro patas.

Para el Lagrangiano (2.19) tenemos el canal sigma ($\Gamma_\sigma = \mathbb{I}$) y tres canales de piones ($\Gamma_{\pi_a} = i\gamma_5 \tau_a$, $a = 1, 2, 3$). Calculando las trazas y utilizando la ecuación del gap para $M \neq 0$ obtenemos

$$\Pi_\sigma(q^2) = \frac{1}{g} \left(1 - \frac{m}{M} \right) - \frac{1}{2} (q^2 - 4M^2) I(q^2), \quad (2.28)$$

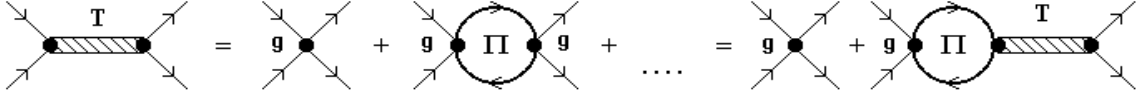


Figura 2.2: Ecuación de Bethe-Salpeter para la matriz quark-antiquark T (los propagadores de mesones aparecen como bandas sombreadas). Las líneas sólidas corresponden a los propagadores de quarks vestidos en la aproximación de Hartree .

$$\Pi_{\pi_a}(q^2) = \frac{1}{g} \left(1 - \frac{m}{M} \right) - \frac{1}{2} q^2 I(q^2), \quad (2.29)$$

donde

$$I(q^2) = 4N_C N_S i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+q)^2 - M^2 + i\epsilon][p^2 - M^2 + i\epsilon]}. \quad (2.30)$$

La masa m_π del pión queda determinada por los polos de la matriz T_M , es decir por la condición

$$1 - g \Pi_\pi(q^2 = m_\pi^2) = 0. \quad (2.31)$$

Si $m = 0$ (límite quiral) es fácil ver de (2.29) y (2.31) que $m_\pi = 0$, lo que significa que el pión es un bosón de Goldstone, un modo de masa nula como consecuencia de una ruptura espontánea de simetría. Si consideramos ahora el término $\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi$, que rompe explícitamente la simetría quiral, con una masa fermiónica desnuda m no nula, obtendremos una masa del pión distinta de cero.

La constante de decaimiento f_π del pión puede obtenerse como el elemento de matriz

$$2f_\pi q^\mu \delta_{ab} = \langle 0 | A_a^\mu | \pi_b(q) \rangle = \langle 0 | \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_a \psi | \pi_b(q) \rangle \quad (2.32)$$

que describe el decaimiento de un pión con índice de isospín b a través de la corriente axial A_a^μ . Utilizando nuevamente la aproximación de campo medio, se obtiene la relación

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (2.33)$$

2.3. Interacciones tipo NJL

Luego de la reinterpretación del modelo de Nambu y Jona-Lasinio como un modelo de quarks, han sido propuestas generalizaciones que incluyen otros términos de interacción además de los originalmente propuestos (ecuación (2.19)). Por tal motivo se conocen como *interacciones tipo NJL* [20]. Este tipo de generalizaciones, al incluir por ejemplo interacciones en los canales de diquarks, nos permiten estudiar el fenómeno de la superconductividad de color, y son el punto de partida de los cálculos del presente trabajo.

Dado que las corrientes fundamentales de quarks en la QCD son las corrientes de color $J_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi$, es natural analizar la interacción local más simple que es posible construir a través del acoplamiento de dos de tales corrientes:

$$\mathcal{L}_{int} = -G \sum_{g=1}^8 (\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda^g\psi)^2, \quad (2.34)$$

donde G es una constante de acoplamiento efectiva. Es fácil ver que esta interacción es invariante ante las transformaciones de sabor $U(2)_R \otimes U(2)_L$. Tal como se describe en el Apéndice A, es posible reescribir la interacción (2.34) a través de las transformaciones de Fierz, de manera de obtener términos en los canales escalar y pseudoescalar singletes de color y escalar antitriplete de color

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2} [(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] + \frac{h}{2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi_c)(\bar{\psi}_c i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi), \quad (2.35)$$

donde se han introducido los campos conjugados de carga ψ_c y $\bar{\psi}_c$, definidos por

$$\psi_c = C\bar{\psi}^T, \quad (2.36)$$

$$\bar{\psi}_c = \psi^T C, \quad (2.37)$$

siendo C el operador de conjugación de carga, definido por

$$C = i\gamma^2\gamma^0. \quad (2.38)$$

Además, las transformaciones de Fierz fijan una relación entre g , h y G :

$$g = \frac{16}{9}G, \quad h = \frac{4}{3}G, \quad (2.39)$$

por lo que

$$\frac{h}{g} = \frac{3}{4}. \quad (2.40)$$

Como se muestra en el Apéndice A, además de estos términos las transformaciones de Fierz originan, a partir del \mathcal{L}_{int} (2.34), acoplamientos en otros canales que en principio deben tenerse en cuenta. Sin embargo, los valores de la mayoría de los condensados que surgen de estos canales resultan poco significativos, hasta donde han sido estudiados, por lo que no serán considerados en este trabajo.

Si bien la interacción de corriente de color (2.34) introduce una sola constante de acoplamiento G que se convierte, a través de las transformaciones de Fierz, en las constantes g y h , no se conoce un motivo fundamental para mantener una relación estricta entre estas nuevas constantes de acoplamiento (relación (2.40)). La interacción más general de cuatro

patas compatible con las simetrías de la QCD puede también construirse a partir de combinaciones de todas las posibles corrientes conservadas relacionadas con esas simetrías, cada una con su propia constante de acoplamiento. Teniendo esto en cuenta, dedicamos una parte de este trabajo a analizar los cambios que se producen en el diagrama de fases para distintos valores de la relación h/g .

Consideremos el \mathcal{L}_{int} dado en (2.35). Por cuestiones fenomenológicas se sabe que, a temperatura y potencial químicos nulos, solamente el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ adquiere un valor distinto de cero. Del condensado $\langle \bar{\psi}_c i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 \psi \rangle$ se espera que tenga valores distintos de cero sólo a densidades elevadas, mientras que tanto los condensados $\langle \bar{\psi} i\gamma_5 \tau_s \psi \rangle$ como los $\langle \bar{\psi} \tau_{1,2,3} \psi \rangle$ siempre son nulos. Teniendo esto en cuenta, y dado que en el presente trabajo nos limitaremos a analizar las predicciones del modelo a nivel de campo medio, podemos simplificar el \mathcal{L}_{int} dado en (2.35) y de ahora en más utilizar el siguiente:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) + \frac{h}{2}(\bar{\psi}i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi_c)(\bar{\psi}_c i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi). \quad (2.41)$$

Por supuesto otros términos deben ser incluidos en caso de querer estudiar, por ejemplo, las propiedades de los piones.

2.4. Interacciones no locales y separables

Tal como se mencionó anteriormente, el término de interacción del Lagrangiano de NJL es del tipo local y de cuatro patas. La naturaleza local de dichas interacciones permite simplificar notablemente los cálculos, pero también trae consecuencias no deseadas, principalmente la divergencia de integrales y el no confinamiento. Para salvar la primer dificultad, hay varios tipos de regularización usados en la literatura (*cut-offs*, Pauli-Villars, etc.). Todos ellos llevan a resultados cualitativamente parecidos, por lo cual no parece haber una razón física para decidirse por uno u otro esquema. En cuanto a la segunda, el modelo usado lleva a la existencia de quarks no confinados, libres, hecho contrario a la experiencia.

Una posible solución a estos problemas es la sugerida por los estudios de la representación de instantones del vacío de la QCD [21]. En esta imagen, la interacción de los quarks con los instantones induce un vértice efectivo, no local y separable. La naturaleza separable de la interacción permite seguir, hasta cierto punto, con las simplificaciones en los cálculos del caso local, a la vez que la no localidad provee al modelo de un *cut-off* natural. En muchos trabajos se han utilizado reguladores suaves que mantienen estas mismas características, como por ejemplo funciones gaussianas y lorentzianas. Tal elección se mantiene en el presente trabajo.

Consideremos el término escalar del \mathcal{L}_{int} dado en (2.41). Una manera de realizar su extensión no local es introduciendo los reguladores a través del reemplazo

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{q}(x)q(x), \quad (2.42)$$

donde $q(x)$ está dado por

$$q(x) = \int d^4y r(x-y)\psi(y), \quad (2.43)$$

donde el factor de forma o regulador $r(x-y)$ es local en el espacio de momentos, es decir

$$r(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(x-y)p} r(p), \quad (2.44)$$

y por ser invariante de Lorentz $r(p)$ solo puede ser función de p^2 . En el caso en que $r(p) = 1$ para todo momento p , su transformada de Fourier resulta ser una delta:

$$r(x-y) = \delta(x-y) \quad (2.45)$$

y se recupera el caso local.

La extensión no local del restante término de interacción es similar a (2.42):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi_c(x) &\rightarrow \bar{q}(x)i\gamma_5\tau_2\lambda_2q_c(x) \\ \bar{\psi}_c(x)i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi(x) &\rightarrow \bar{q}_c(x)i\gamma_5\tau_2\lambda_2q(x). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como sucede en la versión local del modelo NJL, la simetría quirral es espontáneamente rota en este esquema no local para valores suficientemente grandes de la constante de acoplamiento g . Trabajando en la aproximación de Hartree, con N_c colores y N_s sabores en el sistema, la autoenergía o masa dinámica del quark $\Sigma(p)$ viene dada por

$$\Sigma(p) = m + 4gN_cN_s r^2(p) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(k)r^2(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)}, \quad (2.47)$$

donde m es la masa desnuda del quark. Evaluando $\Sigma(p)$ en $p = 0$ se obtiene

$$\Sigma(0) = m + 4gN_cN_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(k)r^2(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)}, \quad (2.48)$$

con lo cual podemos reescribir la ecuación (2.47) como

$$\Sigma(p) = m + [\Sigma(0) - m] r^2(p). \quad (2.49)$$

Entonces, para determinar $\Sigma(q)$ sólo hace falta conocer la constante $\Sigma(0)$.

En el espacio de Minkowski, para que un quark exista en forma aislada se debe cumplir que

$$\Sigma^2(p_p) = p_p^2 \quad (2.50)$$

para valores reales p_p del cuadri-impulso. En el sistema de referencia de la partícula ($\vec{p} = 0$) y utilizando la ecuación (2.49), obtenemos

$$m + [\Sigma(0) - m] r^2(p_0) = p_0. \quad (2.51)$$

Se ve que, según el factor de forma $r(p)$ que se utilice, puede existir un valor crítico de $\Sigma(0)$ a partir del cual no existan soluciones reales de esta ecuación. Dicho de otra manera, el propagador del quark no tendrá polos reales, lo cual puede interpretarse como una situación de confinamiento. Para determinar dicho valor crítico, basta pedir que se cumplan dos condiciones en ese punto: que las dos curvas definidas por los miembros izquierdo y derecho de (2.50) se crucen (esto es la ecuación (2.51)), y que tengan la misma pendiente, es decir

$$2 [\Sigma(0) - m] r(p_0) \frac{dr}{dp_0} = 1. \quad (2.52)$$

Entonces, las ecuaciones (2.51) y (2.52) definen el $\Sigma(0)$ crítico.

Por ejemplo, podemos considerar como factor de forma a la función gaussiana del cuadrado euclídeo

$$r(p) = e^{-\frac{p^2}{2\Lambda^2}}, \quad (2.53)$$

donde Λ es un parámetro del modelo que describe el rango de la no localidad. Esta función cumple con los requerimientos básicos de ser invariante de Lorentz y de decaer suficientemente rápido para momentos altos, de manera de mantener acotadas las integrales. Pasando el regulador $r(p)$ al espacio de Minkowski ($p_0 \rightarrow i p_0$), la ecuación (2.51) queda

$$m + [\Sigma(0) - m] e^{\frac{p_0^2}{\Lambda^2}} = p_0, \quad (2.54)$$

que se representa en la figura 2.3. En ella vemos que, modificando el valor del parámetro $\Sigma(0)$, hacemos que la exponencial suba o baje intersectando o no a la recta. De esta forma, la ecuación (2.51) tendrá dos, una (caso crítico) o ninguna solución real. En este último caso, habrá dos soluciones complejas correspondientes al caso de un par de polos complejos en el propagador del quark. Esto, a su vez, corresponde a quarks aislados con una vida media finita, similar a lo que ocurre en otros modelos de confinamiento [22, 23].

Entonces, una adecuada elección del regulador no local y de los parámetros del modelo permite llevarnos a cierta forma de confinamiento de los quarks, haciendo que el propagador no tenga polos a energías reales. En el espacio euclídeo, esto equivale a que el propagador no tenga polos imaginarios puros.

La justificación final del factor de forma usado (y de un modelo en general) viene dada por su poder explicativo y predictivo de la realidad. En los trabajos realizados en $SU(2)$ con reguladores gaussianos [28], las propiedades obtenidas para los mesones muestran un buen acuerdo con lo observado empíricamente.

Como la QCD es asintóticamente libre, cuando la temperatura y el potencial químico aumentan, el acoplamiento efectivo entre los quarks disminuye. Varios autores han mostrado que en un cierto punto el sistema sufre una transición a una nueva fase en donde aparece el color y la simetría quiral es restaurada [11, 12, 24]. Para potencial químico cero y temperatura finita, se observa que esta transición es suave. Sin embargo, el hecho de que esta transición

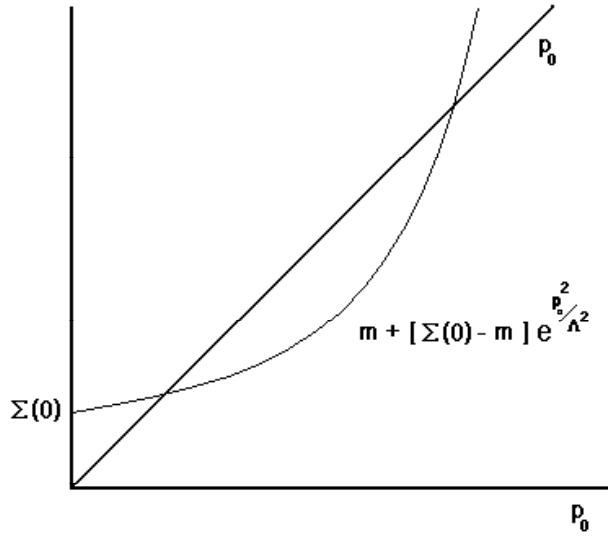


Figura 2.3: Solución gráfica de la ecuación (2.54). La intersección de las curvas representa la existencia de quarks aislados con masa.

sea o no de primer orden para potencial químico finito y temperatura cero, depende fundamentalmente de los parámetros del modelo y de las aproximaciones realizadas. Recientemente se ha investigado esta transición en extensiones no locales del modelo NJL en $SU(2)$ para temperatura y potencial químico finitos [25, 26]. Utilizando varios reguladores no locales, se mostró que la transición quiral es de primer orden para valores bajos de temperatura, pero a partir de cierto punto la transición es suave.

Capítulo 3

Extensión del modelo a T y μ finitos

Comenzamos este Capítulo desarrollando el formalismo necesario para el modelo quiral tipo NJL no local en el caso de temperatura y potencial químicos nulos.

3.1. La acción efectiva

Nuestro punto de partida es la función de partición gran canónica a temperatura y potencial químico nulos

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E}, \quad (3.1)$$

en la cual S_E es la acción efectiva euclídea. Generalizando la expresión (2.41) del \mathcal{L}_{int} al caso no local, la acción S_E queda definida por

$$S_E = \int d^4x \{ \bar{\psi}(x) [-i \not{\partial} + \hat{m}] \psi(x) - \frac{g}{2} j^S(x) j^S(x) - \frac{h}{2} j^{P^\dagger}(x) j^P(x) \}, \quad (3.2)$$

donde $\psi(x)$ es el vector de campos fermiónicos, $\not{\partial}$ es el operador euclídeo

$$\not{\partial} = \gamma_4 \frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}, \quad (3.3)$$

con $\gamma_4 = i\gamma_0$, $\tau = it$, y \hat{m} es la matriz de masas desnudas de los quarks que puede escribirse como $\hat{m} = \text{diag}(m, m) = mI_{sabor}$. Las corrientes $j^S(x)$, $j^{P^\dagger}(x)$ y $j^P(x)$ están dadas por

$$j^S(x) = \bar{q}(x)q(x), \quad (3.4)$$

$$j^P(x) = \bar{q}_c(x) i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q(x), \quad (3.5)$$

$$j^{P^\dagger}(x) = \bar{q}(x) i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q_c(x). \quad (3.6)$$

Introduciendo los campos auxiliares escalares $S(x)$ y de diquarks $P(x)$ y $P^\dagger(x)$, la función de partición (3.1) puede ser expresada como integrales funcionales en términos de estos

nuevos campos como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 = & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int d^4x \bar{\psi}(x)[-i\partial + \hat{m}]\psi(x)} \mathcal{D}S \mathcal{D}P^\dagger \mathcal{D}P \delta[S(x) - j^S(x)] \delta[P^\dagger(x) - j^{P^\dagger}(x)] \times \\ & \times \delta[P(x) - j^P(x)] e^{\int d^4x [\frac{g}{2}S(x)S(x) + \frac{h}{2}P^\dagger(x)P(x)]}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde hemos utilizado las funcionales deltas

$$\delta[S(x) - j^S(x)] = N_S \int \mathcal{D}\sigma e^{\int d^4x \sigma(x)[S(x) - j^S(x)]}, \quad (3.8)$$

$$\delta[P^\dagger(x) - j^{P^\dagger}(x)] = N_{P^\dagger} \int \mathcal{D}\Delta e^{\int d^4x [P^\dagger(x) - j^{P^\dagger}(x)] \frac{\Delta(x)}{2}}, \quad (3.9)$$

$$\delta[P(x) - j^P(x)] = N_P \int \mathcal{D}\Delta^\dagger e^{\int d^4x \frac{\Delta^\dagger(x)}{2} [P(x) - j^P(x)]}, \quad (3.10)$$

siendo N_S , N_{P^\dagger} y N_P constantes de normalización. Si reemplazamos las expresiones de las deltas en la función de partición, ésta adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 = & N_S N_{P^\dagger} N_P \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\Delta^\dagger \mathcal{D}\Delta \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int d^4x [\bar{\psi}(x)(-i\partial + \hat{m})\psi(x) + \sigma(x)j^S(x) + j^{P^\dagger}(x)\frac{\Delta(x)}{2} + \frac{\Delta^\dagger(x)}{2}j^P(x)]} \times \\ & \times \int \mathcal{D}S e^{\int d^4x [\frac{g}{2}S(x)S(x) + \sigma(x)S(x)]} \int \mathcal{D}P^\dagger \mathcal{D}P e^{\frac{1}{2} \int d^4x [hP^\dagger(x)P(x) + P^\dagger(x)\Delta(x) + \Delta^\dagger(x)P(x)]}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde aparecen claramente tres términos correspondientes a integrales sobre los campos $\bar{\psi}$, S y $P^\dagger P$. Veremos a continuación como simplificar estos términos.

Comencemos con el término de la integral sobre $P^\dagger P$. Completando cuadrados y resolviendo la integral Gaussiana resultante (que es una constante, llamada aquí N_δ) obtenemos

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}P^\dagger \mathcal{D}P e^{\frac{1}{2} \int d^4x [hP^\dagger(x)P(x) + P^\dagger(x)\Delta(x) + \Delta^\dagger(x)P(x)]} = \\ = \int \mathcal{D}P^\dagger \mathcal{D}P e^{\frac{h}{2} \int d^4x [P^\dagger(x) + \frac{\Delta^\dagger(x)}{h}][P(x) + \frac{\Delta(x)}{h}]} e^{-\frac{1}{2h} \int d^4x \Delta^\dagger(x)\Delta(x)} = N_\delta e^{-\frac{1}{2h} \int d^4x \Delta^\dagger(x)\Delta(x)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Procedemos en forma similar para la integral sobre S

$$\int \mathcal{D}S e^{\int d^4x [\frac{g}{2}S(x)S(x) + \sigma(x)S(x)]} = \int \mathcal{D}S e^{\frac{g}{2} \int d^4x [S(x) + \frac{\sigma(x)}{g}]^2} e^{-\int d^4x \frac{\sigma^2(x)}{2g}} = N_\sigma e^{-\int d^4x \frac{\sigma^2(x)}{2g}}. \quad (3.13)$$

Asumimos ahora que los campos σ y Δ tienen valores de campo medio no nulos $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$, respectivamente

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \bar{\sigma} + \delta\sigma(x) \\ \Delta(x) &= \bar{\Delta} + \delta\Delta(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos entonces desarrollar la acción efectiva hasta el orden deseado en términos de $(\delta\sigma, \delta\Delta)$ alrededor de los valores medios. En el presente trabajo utilizaremos el desarrollo a orden cero, que corresponde a la aproximación de campo medio (ACM).

Entonces, en (3.12) y (3.13) reemplazamos los campos σ y Δ por sus valores medios $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$ y llegamos a la siguiente simplificación

$$\int \mathcal{D}P^\dagger \mathcal{D}P e^{\frac{1}{2} \int d^4x [hP^\dagger(x)P(x) + P^\dagger(x)\Delta(x) + \Delta^\dagger(x)P(x)]} = N_\delta e^{-V_E^4 \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h}}, \quad (3.15)$$

$$\int \mathcal{D}S e^{\int d^4x [\frac{g}{2}S(x)S(x) + \sigma(x)S(x)]} = N_\sigma e^{-V_E^4 \frac{\bar{\sigma}^2}{2g}}, \quad (3.16)$$

donde V_E^4 es el volumen del espacio euclídeo cuadrimensional.

Finalmente, los términos fermiónicos de la acción, utilizando la ACM y en el espacio de impulsos, quedan

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[- \int d^4x [\bar{\psi}(x)(-i\not{\partial} + \hat{m})\psi(x) + \sigma(x)j^S(x) + j^{P^\dagger}(x)\frac{\Delta(x)}{2} + \frac{\Delta^\dagger(x)}{2}j^P(x)] \right] = \\ & = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[- \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\bar{\psi}(p)(-\not{p} + \hat{m})\psi(p) + \bar{\psi}_c(p)(\not{p} + \hat{m})\psi_c(p)] + \right. \\ & \quad \left. + \bar{q}(p)\bar{\sigma}q(p) + \bar{q}_c(p)\bar{\sigma}q_c(p) + \bar{q}(p)i\gamma_5\lambda_2\tau_2\bar{\Delta}q_c(-p) + \bar{q}_c(-p)i\gamma_5\lambda_2\tau_2\bar{\Delta}^*q(p) \right]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Los detalles de los cálculos se encuentran en el Apéndice B.

3.2. Formalismo de tiempo imaginario

En esta sección veremos los cambios necesarios para extender el modelo a temperatura y potencial químico finitos. De esta manera, podremos estudiar el comportamiento de las distintas fases para distintos valores de temperatura y potencial químico.

En este trabajo utilizamos el formalismo de tiempo imaginario [27], que consiste en reemplazar la cuarta componente del momento euclídeo de la siguiente manera

$$p_4 \rightarrow \omega_n - i\mu, \quad (3.18)$$

donde $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ son las frecuencias discretas de Matsubara correspondientes a los modos fermiónicos. En lo que sigue asumiremos que solamente aquellas cantidades que contienen p_4 dependen de la temperatura y del potencial químico, y que los parámetros del modelo, que se fijan de manera de reproducir propiedades del vacío, son válidos a temperaturas y densidades distintas de cero. Además, supondremos que los potenciales químicos de los quarks *up* y *down* coinciden ($\mu_u = \mu_d = \mu$).

Es posible demostrar que el reemplazo (3.18) se manifiesta en los campos fermiónicos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\psi(p) &= \psi(\vec{p}, p_4) \rightarrow \psi(\vec{p}, \omega_n - i\mu) \\
\bar{\psi}(p) &= \bar{\psi}(\vec{p}, p_4) \rightarrow \bar{\psi}(\vec{p}, \omega_n - i\mu) \\
\psi(-p) &= \psi_c(-\vec{p}, -p_4) \rightarrow \psi_c(-\vec{p}, -\omega_n - i\mu) \\
\bar{\psi}_c(-p) &= \bar{\psi}_c(-\vec{p}, -p_4) \rightarrow \bar{\psi}_c(-\vec{p}, -\omega_n - i\mu),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
q(p) &\rightarrow q(\vec{p}, \omega_n - i\mu) \\
\bar{q}(p) &\rightarrow \bar{q}(\vec{p}, \omega_n - i\mu) \\
q_c(-p) &\rightarrow q_c(-\vec{p}, -\omega_n - i\mu) \\
\bar{q}_c(-p) &\rightarrow \bar{q}_c(-\vec{p}, -\omega_n - i\mu).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Además, al discretizarse la cuarta componente del impulso, la integral sobre esta variable se transforma en una sumatoria, debiéndose realizar el siguiente cambio

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p) = \int \frac{dp_4}{2\pi} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} f(\vec{p}, p_4) \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} f(\vec{p}, \omega_n - i\mu). \tag{3.21}$$

Utilizando (3.19), (3.20) y (3.21) en el término de la acción (3.17), llegamos a la siguiente expresión para la función de partición a T y μ finitos

$$\mathcal{Z}^{ACM}(T, \mu) = N e^{-V_E^4 [\frac{\sigma^2}{2g} + \frac{|\Delta|^2}{2h}]} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\frac{1}{2} T \sum \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \bar{\Psi}(p) \mathbb{D} \Psi(p)}, \tag{3.22}$$

donde

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -\not{p} + \Sigma_p + i\mu\gamma^4 & |r(\vec{p}, \omega_n - i\mu)|^2 i\gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \bar{\Delta} \\ |r(\vec{p}, \omega_n - i\mu)|^2 i\gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \bar{\Delta}^* & -\not{p} + \Sigma_p^* - i\mu\gamma^4 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

$$\Sigma_p = \hat{m} + \bar{\sigma} r^2(\vec{p}, \omega_n - i\mu), \tag{3.24}$$

$$\bar{\Psi}(p) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}(\vec{p}, \omega_n - i\mu) & \bar{\psi}_c(-\vec{p}, -\omega_n - i\mu) \end{pmatrix}, \quad \Psi(p) = \begin{pmatrix} \psi(\vec{p}, \omega_n - i\mu) \\ \psi_c(-\vec{p}, -\omega_n - i\mu) \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

y siendo N una constante de normalización.

Dado que las integrales sobre los campos fermiónicos son del tipo gaussianas, pueden resolverse en forma exacta

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\frac{1}{2} T \sum \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \bar{\Psi}(p) \mathbb{D} \Psi(p)} = e^{T \sum \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} T r \ln \mathbb{D}}, \tag{3.26}$$

donde la traza actúa sobre los espacios de conjugación de carga, sabor, color, Dirac y coordenadas. Como la parte de la acción que nos interesa es la real, usamos la siguiente igualdad

$$Re(Tr \ln \mathbb{D}) = \frac{1}{2} Tr \ln \mathbb{D} + \frac{1}{2} Tr \ln \mathbb{D}^\dagger = \frac{1}{2} Tr(\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger), \quad (3.27)$$

con la cual, finalmente, obtenemos para la función de partición

$$\mathcal{Z}^{ACM}(T, \mu) = N e^{-V_E^4 [\frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - T \sum \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} Tr \ln(\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger)]}, \quad (3.28)$$

donde ahora la traza es sobre los espacios de conjugación de carga, sabor, color y Dirac. De lo anterior, identificamos a

$$S_E^{ACM}(T, \mu) = V_E^4 \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - T \sum \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} Tr \ln(\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger) \right] \quad (3.29)$$

como la acción efectiva en la ACM. Realizando el cálculo de $\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger$, cuyos detalles se dan en el Apéndice C, llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{1}{4} Tr \ln \mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger = 4 \ln \left[A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2 \right] + 2 \ln \left[A^2(0) - B - 4C^2 \right], \quad (3.30)$$

donde, para abreviar la escritura, definimos

$$\begin{aligned} A(|\bar{\Delta}|) &= \omega_n^2 + \vec{p}^2 + |\Sigma_p|^2 + \mu^2 + |r^2(p)\bar{\Delta}|^2, \\ B &= 4\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2\Sigma_p), \\ C &= \mu Re\Sigma_p + \omega_n Im\Sigma_p. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como en la expresión anterior el impulso solo aparece como \vec{p}^2 , es natural hacer el cambio a coordenadas esféricas en el espacio de momentos, recordando que $d^3 \vec{p} = 4\pi \vec{p}^2 dp$, donde $dp \equiv d|\vec{p}|$; con lo cual obtenemos la siguiente expresión para la acción efectiva en la ACM

$$S_E^{ACM}(T, \mu) = V_E^4 \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \left[2 \ln \left[\frac{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2}{T^2} \right] + \ln \left[\frac{A^2(0) - B - 4C^2}{T^2} \right] \right] \right\}. \quad (3.32)$$

3.3. Potencial termodinámico

Desde el punto de vista de la mecánica estadística, en un *ensamble* gran canónico la función de partición en la aproximación de campo medio, a T y μ finitas, está dada por

$$Z^{ACM}(T, \mu) = e^{-S_E^{ACM}(T, \mu)}, \quad (3.33)$$

donde S_E^{ACM} es la acción efectiva euclídea en la aproximación de campo medio, dada por la ecuación (3.32).

El potencial termodinámico gran canónico está definido por

$$\Omega^{ACM}(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln Z^{ACM}(T, \mu) = \frac{T}{V} S_E^{ACM}(T, \mu) = -p(T, \mu). \quad (3.34)$$

Utilizando el formalismo de tiempo imaginario, y reemplazando en la ecuación (3.32) el volumen cuadrimensional V_E^4 por V/T , siendo V el volumen tridimensional del espacio coordinado, obtenemos la siguiente expresión para el potencial termodinámico

$$\Omega^{ACM}(T, \mu) = \frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \left\{ 2 \ln \left[\frac{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2}{T^2} \right] + \ln \left[\frac{A^2(0) - B - 4C^2}{T^2} \right] \right\}. \quad (3.35)$$

Se puede demostrar que, en general, la integral de la ecuación anterior es divergente. Sin embargo, tal como mostramos en el Apéndice D, puede ser regularizada hasta llegar a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \Omega^{ACM}(T, \mu) = & \frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \left\{ 2 \ln \left[\frac{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\vec{p}^2 + m^2)} \right] \right. \\ & \left. + \ln \left[\frac{A^2(0) - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\vec{p}^2 + m^2)} \right] \right\} \\ & - \frac{6T}{\pi^2} \int \vec{p}^2 dp \left[\ln \left(1 + e^{-\left(\frac{\mu - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T}\right)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\left(\frac{\mu + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T}\right)} \right) \right], \quad (3.36) \end{aligned}$$

la cual es fundamental para los cálculos realizados en el presente trabajo.

3.4. Ecuaciones del gap

Una vez obtenido el potencial termodinámico, debemos encontrar los valores de $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$ que lo minimizan. Estos valores se obtienen de las soluciones de las ecuaciones del gap

$$\frac{\partial \Omega^{ACM}(T, \mu)}{\partial \bar{\sigma}} = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \Omega^{ACM}(T, \mu)}{\partial \bar{\Delta}} = 0. \quad (3.38)$$

Usando (3.36), las ecuaciones (3.37) y (3.38) equivalen a

$$\bar{\sigma} - \frac{4gT}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \left\{ 2 \left[\frac{A(|\bar{\Delta}|)D - 2F - 2CE}{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2} \right] + \left[\frac{A(0)D - 2F - 2CE}{A^2(0) - B - 4C^2} \right] \right\} = 0, \quad (3.39)$$

$$\bar{\Delta} \left[1 - \frac{8hT}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \frac{|r(p)|^4 A(|\bar{\Delta}|)}{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2} \right] = 0, \quad (3.40)$$

donde D, E y F son

$$D = \text{Re}\Sigma_p \frac{\partial \text{Re}\Sigma_p}{\partial \bar{\sigma}} + \text{Im}\Sigma_p \frac{\partial \text{Im}\Sigma_p}{\partial \bar{\sigma}}, \quad (3.41)$$

$$E = \mu \frac{\partial \text{Re}\Sigma_p}{\partial \bar{\sigma}} + \omega_n \frac{\partial \text{Im}\Sigma_p}{\partial \bar{\sigma}}, \quad (3.42)$$

$$F = \vec{p}^2 \text{Im}\Sigma_p \frac{\partial \text{Im}\Sigma_p}{\partial \bar{\sigma}}. \quad (3.43)$$

Las ecuaciones del gap se resolvieron numéricamente para cada valor de T y μ , y en caso de obtener más de una solución nos quedamos con la que minimiza al potencial termodinámico Ω .

3.5. Condensados y densidad de quarks. Susceptibilidad quiral

Una vez obtenido el potencial termodinámico, podemos derivar las expresiones de otras cantidades de interés para estudiar y entender las características de las transiciones de fases. Dos de ellas son el condensado quark-antiquark $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que es el valor de expectación del vacío para cada sabor de quark de $\bar{\psi}\psi$ y el condensado quark-quark $\langle \psi\psi \rangle$, valor de expectación del vacío para cada sabor de quark de $\psi\psi$. Tal como detallamos en el Apéndice E:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial m}, \quad (3.44)$$

$$\langle \psi\psi \rangle = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{k=0}, \quad (3.45)$$

donde para el cálculo de $\langle \psi\psi \rangle$ debe introducirse el término adicional $-k \bar{\psi}_C(x) i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 \psi(x)$ en la acción efectiva. Esto lleva a un potencial termodinámico que tiene la forma dada en (3.36) pero con el reemplazo

$$r^2(p)\bar{\Delta} \rightarrow r^2(p)\bar{\Delta} - k. \quad (3.46)$$

Luego de obtener analíticamente las derivadas de (3.44) y (3.45), calculamos numéricamente los valores de los condensados una vez resueltas las ecuaciones del gap, esto es, una vez encontrados los valores de $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$ que minimizan el potencial termodinámico Ω .

Otra magnitud física de interés en este trabajo, es la densidad de quarks ρ_q . Esta se define como el valor de expectación del vacío de la componente temporal de la corriente conservada

asociada a la simetría $U(1)_V$. Podemos derivarla del potencial termodinámico de la siguiente manera

$$\rho_q = -\frac{\partial\Omega^{ACM}}{\partial\mu}. \quad (3.47)$$

Por último, también es de nuestro interés la susceptibilidad quiral χ , definida por

$$\chi = -\frac{\partial^2\Omega^{ACM}}{\partial m^2}. \quad (3.48)$$

Utilizando (3.44), la relación anterior se puede escribir como

$$\chi = -\frac{\partial\langle\bar{\psi}\psi\rangle}{\partial m}. \quad (3.49)$$

La susceptibilidad quiral es una magnitud clave para identificar una transición de fase tipo *crossover*, dado que en una transición de este tipo la susceptibilidad presenta un máximo. Entonces, buscamos el máximo de la susceptibilidad en función del potencial químico, es decir, buscamos el μ tal que

$$\frac{\partial\chi}{\partial\mu} = 0, \quad (3.50)$$

o equivalentemente, usando (3.49), el μ para el cual

$$\frac{\partial^2\langle\bar{\psi}\psi\rangle}{\partial\mu\partial m} = 0. \quad (3.51)$$

Capítulo 4

Resultados numéricos para diferentes reguladores. Diagramas de fases

Realizamos los cálculos utilizando tres tipos de reguladores, comúnmente usados en la literatura. En este Capítulo mostraremos y discutiremos los resultados obtenidos para cada regulador. En cada caso, el modelo utilizado incluye tres parámetros libres: la masa desnuda de los quarks m , la constante de acoplamiento g , y el *cut-off* covariante Λ . Los valores de estos parámetros para cada regulador se fijaron, siguiendo a trabajos anteriores [25], de manera de reproducir los valores experimentales del condensado quiral, la masa del pión y de la constante de decaimiento del pión, a temperatura y densidad cero. Tal como mencionamos en la sección (2.3), no existen argumentos contundentes para afirmar que la relación entre las constantes de acoplamiento de los canales quark-quark y quark-antiquark sea necesariamente la dada por (2.40). Así, en las secciones siguientes (4.1), (4.2) y (4.3) utilizamos $h/g = 3/4$, mientras que en la sección (4.4) estudiamos los cambios que aparecen en los diagramas de fase al variar la relación h/g .

4.1. Regulador Gaussiano

En este caso el regulador está dado por

$$r(p) = e^{-p^2/2\Lambda^2}, \quad (4.1)$$

el cual ha sido definido, al igual que los demás reguladores, en el espacio de momentos euclídeo. Consideramos dos conjuntos de parámetros. El conjunto I corresponde a $g = 50 \text{ GeV}^{-2}$, $m = 10,5 \text{ MeV}$ y $\Lambda = 627 \text{ MeV}$ mientras que el conjunto II a $g = 30 \text{ GeV}^{-2}$, $m = 7,7 \text{ MeV}$ and $\Lambda = 760 \text{ MeV}$. Si bien ambos conjuntos de parámetros reproducen de manera aceptable las propiedades anteriormente mencionadas a temperatura y densidad cero, en el caso del conjunto I el propagador del quark no tiene polos reales, lo que sí ocurre con el conjunto II. Por este motivo, al I se lo considera como el conjunto confinante [28].

En la figura 4.1 mostramos los valores de campos medios $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$ obtenidos al resolver numéricamente las ecuaciones del gap (3.39) y (3.40) para distintos valores de T y μ , donde los paneles izquierdos corresponden al conjunto I y los derechos al conjunto II. En la misma figura mostramos los correspondientes condensados $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ y $\langle\psi\psi\rangle$. Como vemos, para valores pequeños de T y μ (líneas llenas) el sistema está en la fase quiral, en la cual $\bar{\sigma} \neq 0$ and $\bar{\Delta} = 0$. Para valores crecientes de μ , manteniendo fija T , existe un valor crítico donde se produce una caída brusca de $\bar{\sigma}$ a la vez que un repentino incremento en $\bar{\Delta}$, punto a partir del cual se alcanza la fase 2SC, caracterizada por $\bar{\sigma} \cong 0$ y $\bar{\Delta} \neq 0$. En el Cuadro 4.1 se muestran los valores de la discontinuidad en el valor de campo medio $\bar{\Delta}$ en el potencial químico crítico, $\bar{\Delta}_c$, para $T = 0$. Si repetimos el proceso para valores más altos de T ocurre algo similar hasta alcanzar el “punto triple”(3P). Para temperaturas ligeramente más altas que T_{3P} (líneas a rayas) el salto en $\bar{\sigma}$ y el incremento en $\bar{\Delta}$ suceden en dos valores diferentes de μ . Entre estos dos valores de μ tenemos $\bar{\sigma} \cong 0$ y $\bar{\Delta} = 0$. Además, desaparece la discontinuidad en el comportamiento de $\bar{\Delta}$ como función de μ . Para temperaturas por encima del *end point* (EP) la discontinuidad en $\bar{\sigma}$ también desaparece (líneas punteadas). Finalmente, para temperaturas por encima de la temperatura crítica para potencial químico cero obtenemos $\bar{\sigma} \cong 0$ para todos los valores de μ analizados. En la región correspondiente al *crossover*, el punto de transición está definido como aquel para el cual la susceptibilidad quiral χ es máxima. En el Cuadro 4.1 mostramos las posiciones de los diferentes puntos críticos. Hacia abajo, en la figura 4.1, aparecen los condensados quiral $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ y de diquarks $\langle\psi\psi\rangle$, cuyo comportamiento es similar al de los valores medios de los campos $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$, respectivamente. Cabe mencionar que el hecho de que el condensado quiral alcance valores positivos para μ grandes se debe al procedimiento utilizado para regularizar el potencial termodinámico (específicamente al término $\Omega_{(r)}^{ACM}$, ecuación (D.10)).

En la figura 4.2 mostramos los diagramas de fases correspondientes. Igual que antes, los paneles izquierdos corresponden al conjunto I y los derechos al conjunto II. Por otro lado, los paneles superiores corresponden a los diagramas de fases en el plano $T - \mu$ mientras que los inferiores a los diagramas en el plano $T - \rho/\rho_0$, siendo $\rho_0 = 1,3 \times 10^6 MeV$ la densidad de materia nuclear. En todos los casos, se han indicado con líneas llenas las transiciones de fase de primer orden, con líneas a rayas las transiciones de segundo orden y con líneas punteadas el *crossover* entre la fase quiral y la fase de gas de quarks libres.

Como puede verse en los diagramas de fases $T - \mu$, en el punto triple pueden coexistir las tres fases. Es interesante remarcar que para valores del potencial químico inferiores a μ_{3P} , la línea de transición (tanto la sección de primer orden como la de *crossover*) coincide exactamente con la que se obtendría en ausencia de interacciones en el canal de diquarks ($h = 0$). Por otro lado, para $\mu > \mu_{3P}$ la línea de la transición de primer orden es diferente de la obtenida en la referencia [25]. Esto se ve más claramente en los diagramas de fases $T - \rho/\rho_0$, donde se ha indicado con línea llena fina la transición de fases de primer orden correspondiente a $h = 0$. Como puede apreciarse, la existencia de interacciones en el canal quark-quark aumenta el tamaño de la fase mixta. Notar que para $T < T_{3P}$ la fase mixta está compuesta por la fase quiral y la 2SC mientras que para $T > T_{3P}$ la mezcla es entre la

fase quiral y la de gas de quarks libres.

Comparando los resultados de los conjuntos I y II, vemos que son cualitativamente muy similares, apreciándose solo pequeñas diferencias cuantitativas en las posiciones de los puntos críticos.

4.2. Regulador Lorentziano

El regulador Lorentziano es de la forma

$$r(p) = \frac{1}{1 + p^2/\Lambda^2}, \quad (4.2)$$

donde los parámetros son $g = 14,19 \text{ GeV}^{-2}$, $m = 4,57 \text{ MeV}$, $\Lambda = 940 \text{ MeV}$. Nuevamente, resolvimos numéricamente las ecuaciones del gap para diferentes valores de temperatura y potencial químico. Obtuvimos que el comportamiento cualitativo de los valores de los campos medios $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$ y de los condensados es muy parecido al caso del regulador Gaussiano (figura 4.1) y, por lo tanto, no hemos incluido una figura para estas magnitudes. Sin embargo, es interesante aclarar que, tal como se muestra en el Cuadro 4.1, en este caso la discontinuidad para $\bar{\Delta}$ a $T = 0$ en el potencial químico crítico, $\bar{\Delta}_c$, es algo menor. En la figura 4.3 mostramos los correspondientes diagramas de fases en los planos $T - \mu$ y $T - \rho/\rho_0$. Como en el caso Gaussiano, se observa la existencia de un EP, punto en el cual la transición de fases quiral de primer orden se transforma en una transición tipo *crossover*, y de un 3P en el cual coexisten las tres fases. En el Cuadro 4.1 se muestran las posiciones de estos puntos, que son similares al caso del conjunto II del regulador Gaussiano.

4.3. Regulador del modelo de instantones

Por último, el modelo de instantones de la QCD predice una interacción no local separable con un regulador dado por

$$r(p) = -x \frac{d}{dx} [I_0(x)K_0(x) - I_1(x)K_1(x)] \Big|_{x=\sqrt{p^2}\rho/2}, \quad (4.3)$$

donde I y K son las funciones de Bessel modificadas y ρ es el tamaño medio de instantón. En nuestro trabajo hemos tomado el valor estándar $\rho = 1/3 \text{ fm}$, y fijamos la constante de acoplamiento en $g = 18,35 \text{ GeV}^{-2}$ de manera de reproducir el valor típico de la densidad de instantones $n \approx 1 \text{ fm}^{-4}$ [14]. Usando estos valores, junto con $m_c = 4,9 \text{ MeV}$, es posible reproducir los valores experimentales de la masa del pión y de su constante de decaimiento. El valor resultante del condensado quiral a temperatura y potencial químico cero es $-(256 \text{ MeV})^3$.

Igual que con los reguladores anteriores, resolvimos las ecuaciones del gap para distintos valores de T y μ y obtuvimos el comportamiento de los valores de campo medio y de los condensados, que resulta ser similar a los casos de los reguladores anteriores. Por eso, como en el caso anterior, solo se muestran los diagramas de fases en los planos $T - \mu$ y $T - \rho/\rho_0$ (figura 4.4). La posición de los puntos críticos junto con los valores de $\bar{\Delta}_c$ se dan en el Cuadro 4.1. Vemos que, aunque la posición del punto triple es casi idéntica que en los casos del regulador Lorentziano y del conjunto II del regulador Gaussiano, T_{EP} es un poco más alta. Así, para el regulador de instantones, la línea correspondiente a la transición de primer orden que une el 3P con el EP es un poco más larga. Por lo demás, los diagramas de fases son similares a los descritos en las subsecciones anteriores.

4.4. Dependencia de los diagramas de fase con la relación entre las constantes de acoplamiento

Hasta aquí, mostramos los resultados obtenidos suponiendo que $h/g = 0,75$. Sin embargo, tal como se mencionó anteriormente, existe cierta incertidumbre en la elección de este valor. Por esto, es interesante explorar las consecuencias de variar la relación h/g . Dado que es improbable que valores grandes de esta relación tengan lugar en QCD pues llevarían a la ruptura de la simetría de color en el vacío, en este trabajo estudiamos el rango $0 < h/g \leq 1$. Además, como los resultados obtenidos para diferentes reguladores son cualitativamente muy similares, en el presente estudio utilizamos el conjunto II de parámetros para el regulador Gaussiano.

Para valores de h/g en el rango $0,17 < h/g < 0,82$, los diagramas de fases resultantes son cualitativamente similares a los mostrados en la figura 4.2, aunque los detalles (en particular, la posición de los puntos críticos) dependen de la relación h/g . Para $h/g < 0,17$ existe un cambio cualitativo dado que deja de existir el punto triple. En este caso, aún a muy bajas temperaturas, a medida que aumentamos μ en algún punto encontramos una transición de fases de primer orden entre la fase quiral y la fase de gas de quarks libres. Para valores ligeramente superiores a ese μ crítico obtenemos $\bar{\sigma} \simeq \bar{\Delta} = 0$. Si continuamos aumentando μ encontramos una transición de fases de segundo orden entre la fase de gas de quarks libres y la fase 2SC. En el panel superior de la figura 4.5 mostramos el diagrama de fases correspondiente en el plano $T - \mu$. En este diagrama de fases, la línea de transición entre la fase quiral y la fase de gas de quarks libres (tanto la sección de *crossover* como la de primer orden) coincide exactamente con la obtenida para $h = 0$ [25]. Para $h/g > 0,82$ nuevamente la situación es cualitativamente distinta, dado que en ese rango el 3P y el EP coinciden en un único punto. De hecho, a medida que h/g se acerca por debajo a $h/g = 0,82$, la línea de transición de primer orden que conecta el 3P y el EP se vuelve progresivamente más corta, y a ese valor particular desaparece. Además, para $h/g > 0,82$ existe una pequeña región a bajas temperaturas, por debajo del 3P, en la cual $\bar{\sigma}$ y $\bar{\Delta}$ tienen ambos valores distintos de

cero. Esta región está separada de la fase quirral por una transición de segundo orden y de la fase 2SC por una transición de primer orden. Esta situación se aprecia en el panel inferior de la figura 4.5, donde mostramos el diagrama de fases en el plano $T - \mu$ para el caso $h/g = 0,90$. La posible existencia de una fase de este tipo ha sido mencionada en la referencia [29].

En la figura 4.6 mostramos el comportamiento de los puntos críticos en función de h/g . En el panel superior mostramos la posición del potencial químico crítico μ_c a $T = 0$. La línea llena corresponde al μ_c de primer orden, mientras que la línea a rayas al de segundo orden. En el rango $0,17 < h/g < 0,82$ tenemos solamente μ_c de primer orden. Para valores de h/g inferiores a ese μ_c el sistema se encuentra en la fase quirral, y en la fase 2SC para valores superiores. Para valores de $h/g < 0,17$ tenemos además un μ_c de segundo orden, lo cual es debido a que la línea que separa la fase de gas de quarks libres de la fase 2SC corta al eje μ , tal como se ve en los diagramas de fases en el plano $T - \mu$. A medida que h/g se hace más pequeño, la posición del μ_c de segundo orden crece rápidamente, señalando la desaparición de la fase 2SC para valores decrecientes de la constante de acoplamiento de diquarks. Para $h/g > 0,82$ aparece nuevamente un μ_c de segundo orden pero ahora debajo del μ_c de primer orden debido a la aparición de la fase donde $\bar{\sigma} \neq 0$ y $\bar{\Delta} \neq 0$. En el panel inferior de la figura 4.6 mostramos la posición del 3P y el EP como funciones de h/g , donde la escala de temperatura debe leerse a la derecha, mientras que la escala de potencial químico a la izquierda. Para valores de $h/g < 0,17$ solamente existe el EP, cuya posición es independiente de la constante de acoplamiento de diquarks. El 3P aparece en $h/g = 0,19$ y su posición en temperatura (potencial químico) aumenta (disminuye) al incrementarse h/g . Para valores de $h/g > 0,82$ el 3P y el EP se funden en un solo punto cuya posición en temperatura (potencial químico) aumenta (disminuye) al crecer h/g .

Regulador	Punto triple		<i>End point</i>		$T_c(\mu = 0)$	$\bar{\Delta}_c(T = 0)$
	T_{3P}	μ_{3P}	T_{EP}	μ_{EP}	T_0	$\bar{\Delta}_0$
Gaussiano - conjunto I	64	193	69	180	115	182
Gaussiano - conjunto II	54	215	58	207	120	132
Lorentziano	48	217	59	195	116	114
Modelo de instantones	49	216	65	179	118	142

Cuadro 4.1: Temperaturas críticas, potenciales químicos y $\bar{\Delta}(T = 0)$ (todos en MeV) para diferentes reguladores.

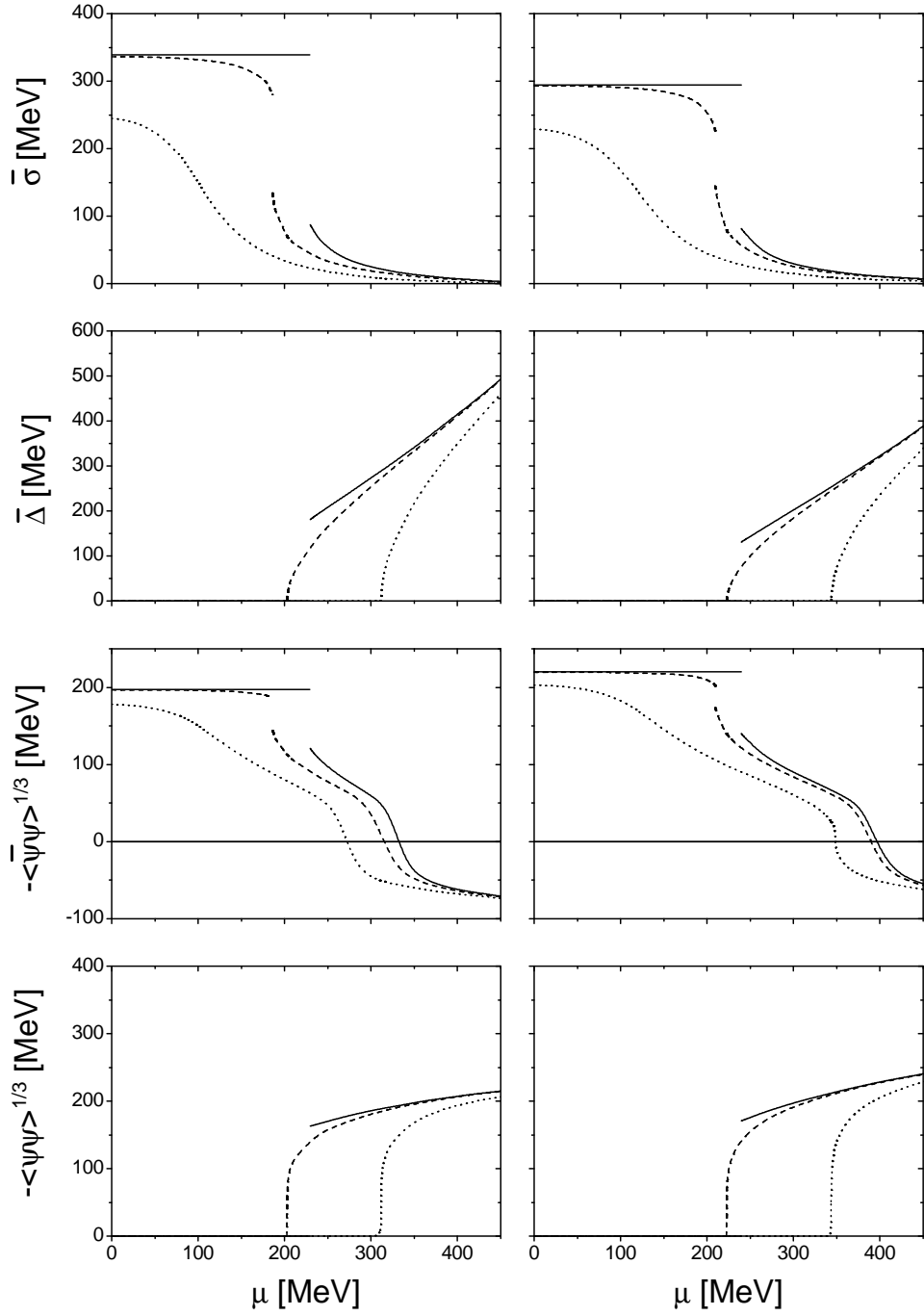


Figura 4.1: Comportamiento de los campos medios $\bar{\sigma}$, $\bar{\Delta}$ y de los condensados $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, $\langle\psi\psi\rangle$ para el regulador Gaussiano, como función del potencial químico para tres valores diferentes de temperatura. Los paneles izquierdos corresponden al conjunto I y los derechos al conjunto II. Las líneas llenas corresponden a $T = 0$, las líneas a rayas a $T = 67\text{MeV}$ para el conjunto I ($T = 57\text{MeV}$ para el conjunto II) y las líneas punteadas a $T = 100\text{MeV}$.

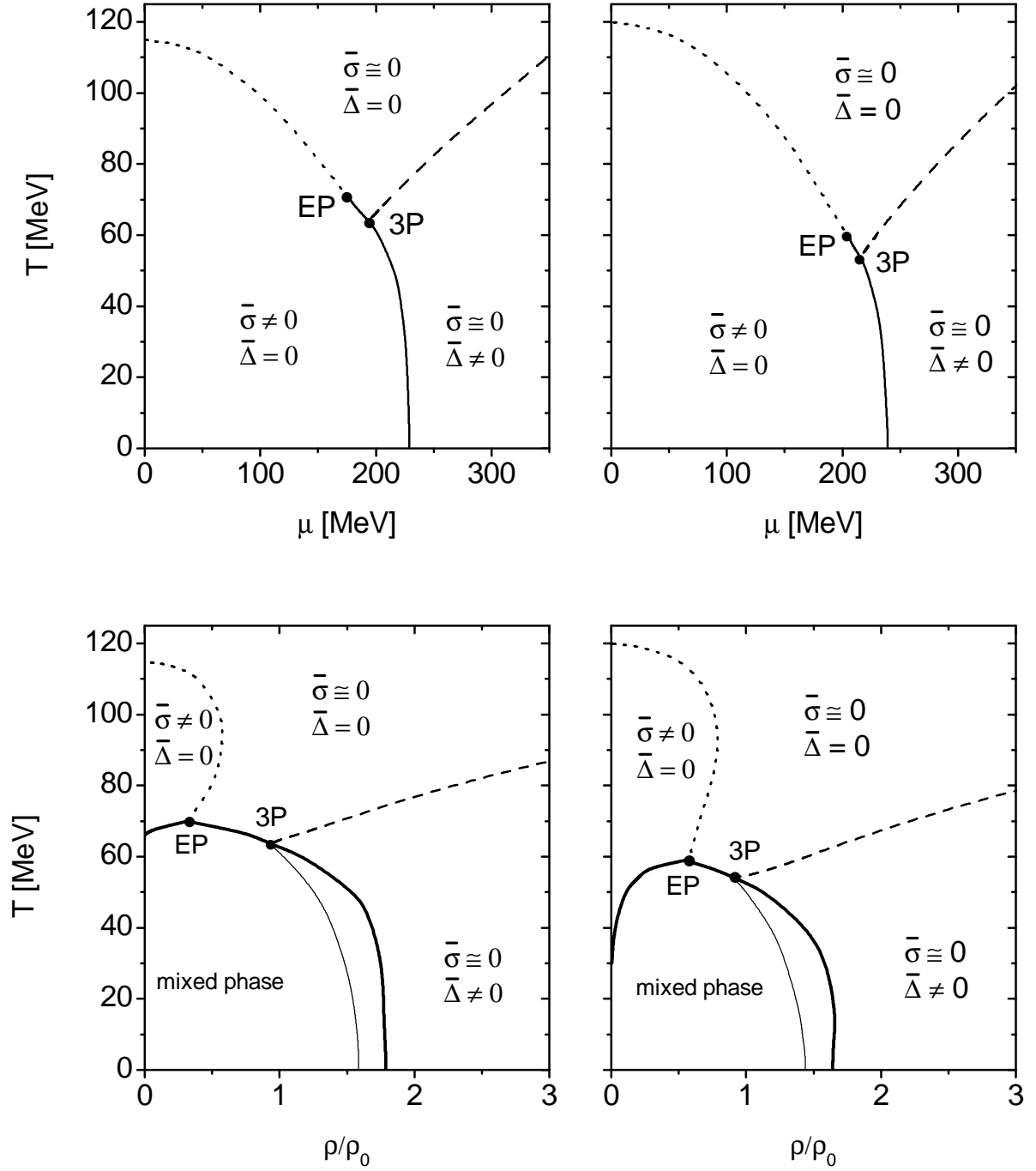


Figura 4.2: Diagramas de fases para el regulador Gaussiano. Los paneles izquierdos corresponden al conjunto I y los derechos al conjunto II. Los paneles superiores muestran los diagramas de fases en el plano $T - \mu$ y los inferiores en el plano $T - \rho/\rho_0$. Las líneas llenas indican las transiciones de fases de primer orden, las líneas a rayas las transiciones de fases de segundo orden y las punteadas las transiciones tipo *crossover*.

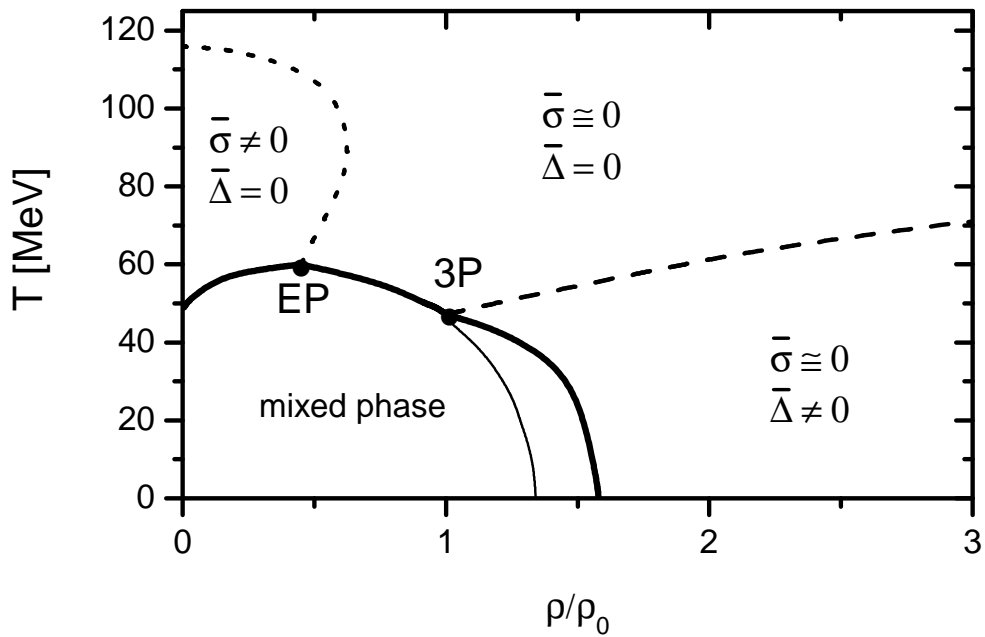
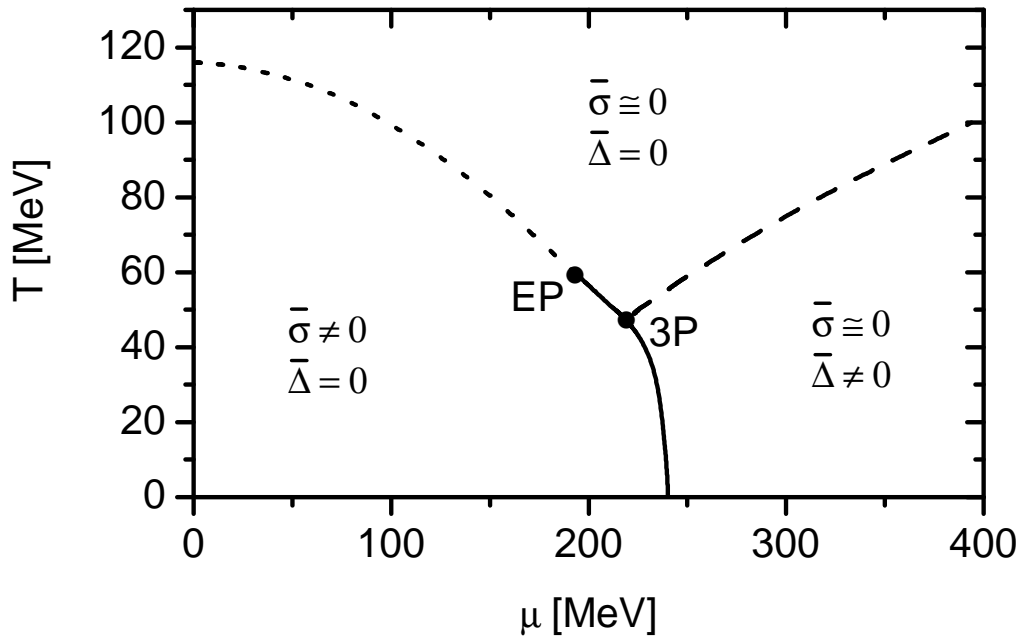


Figura 4.3: Diagramas de fases para el regulador Lorentziano. Los paneles superiores muestran el diagrama de fases en el plano $T - \mu$ y los inferiores en el plano $T - \rho/\rho_0$. Las líneas llenas indican las transiciones de fases de primer orden, las líneas a rayas transiciones de segundo orden y las punteadas las transiciones tipo *crossover*.

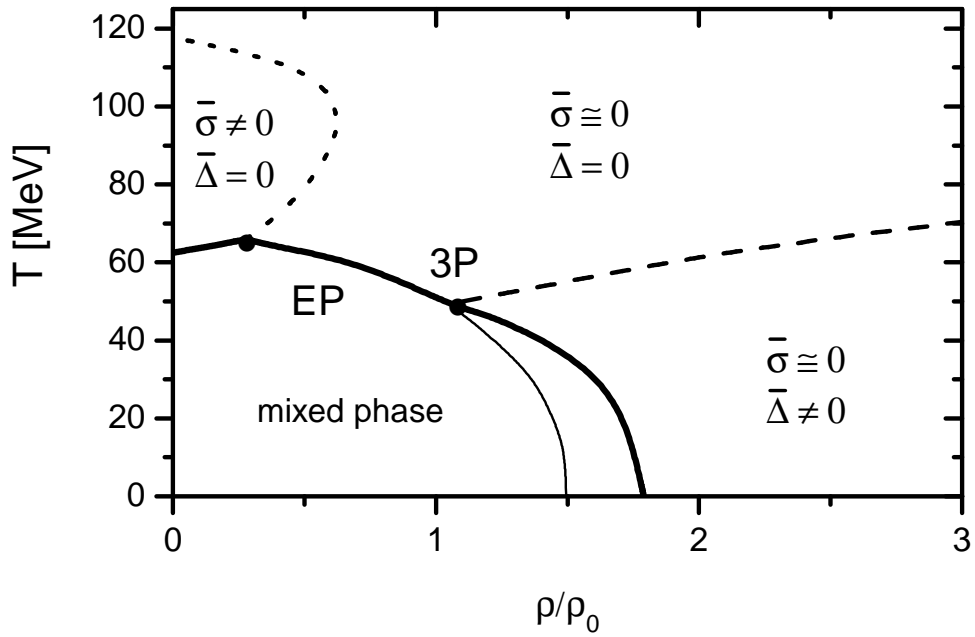
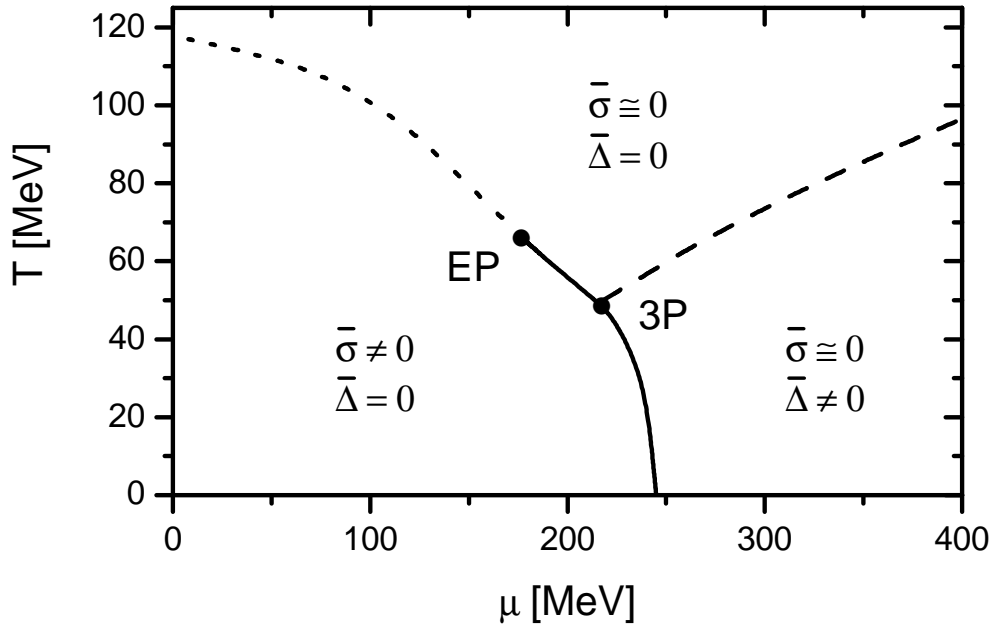


Figura 4.4: Diagramas de fases para el regulador del modelo de instantones. Los paneles superiores corresponden a los diagramas de fases en el plano $T - \mu$ y los inferiores a los diagramas de fases en el plano $T - \rho/\rho_0$. Las líneas llenas indican transiciones de fases de primer orden, las líneas a rayas transiciones de segundo orden y las punteadas las transiciones tipo *crossover*.

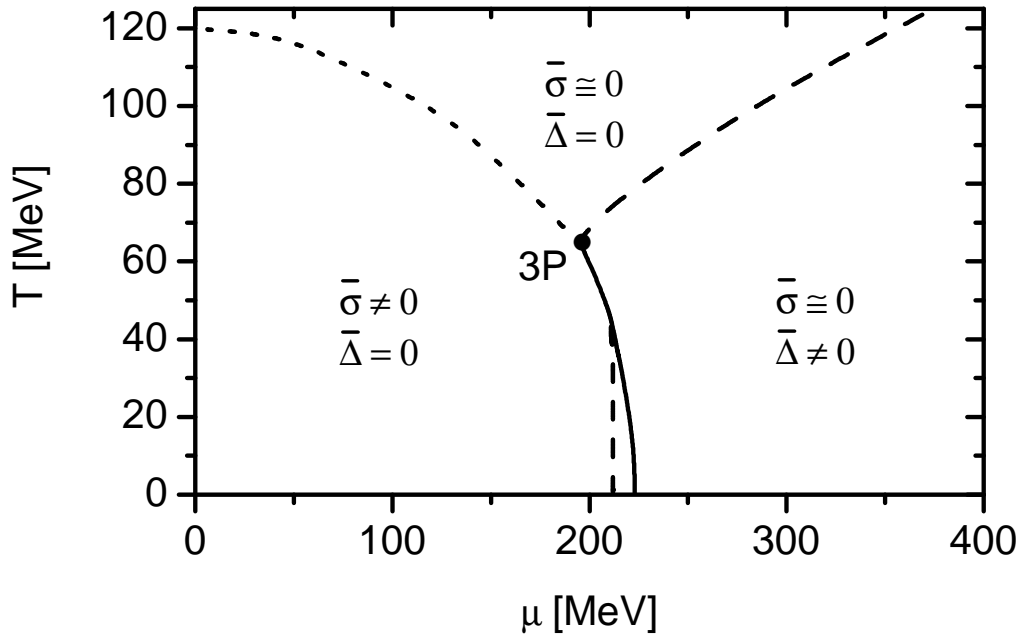
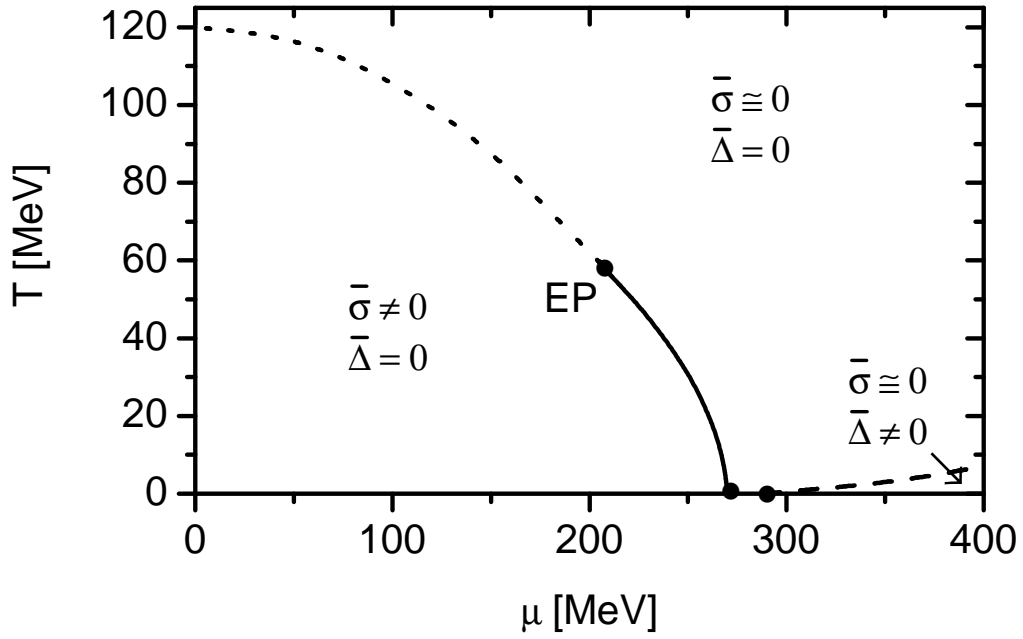


Figura 4.5: Diagramas de fases para el regulador Gaussiano (conjunto II). Los paneles superiores corresponden a la relación $h/g = 0,15$ mientras que los inferiores a $h/g = 0,9$.

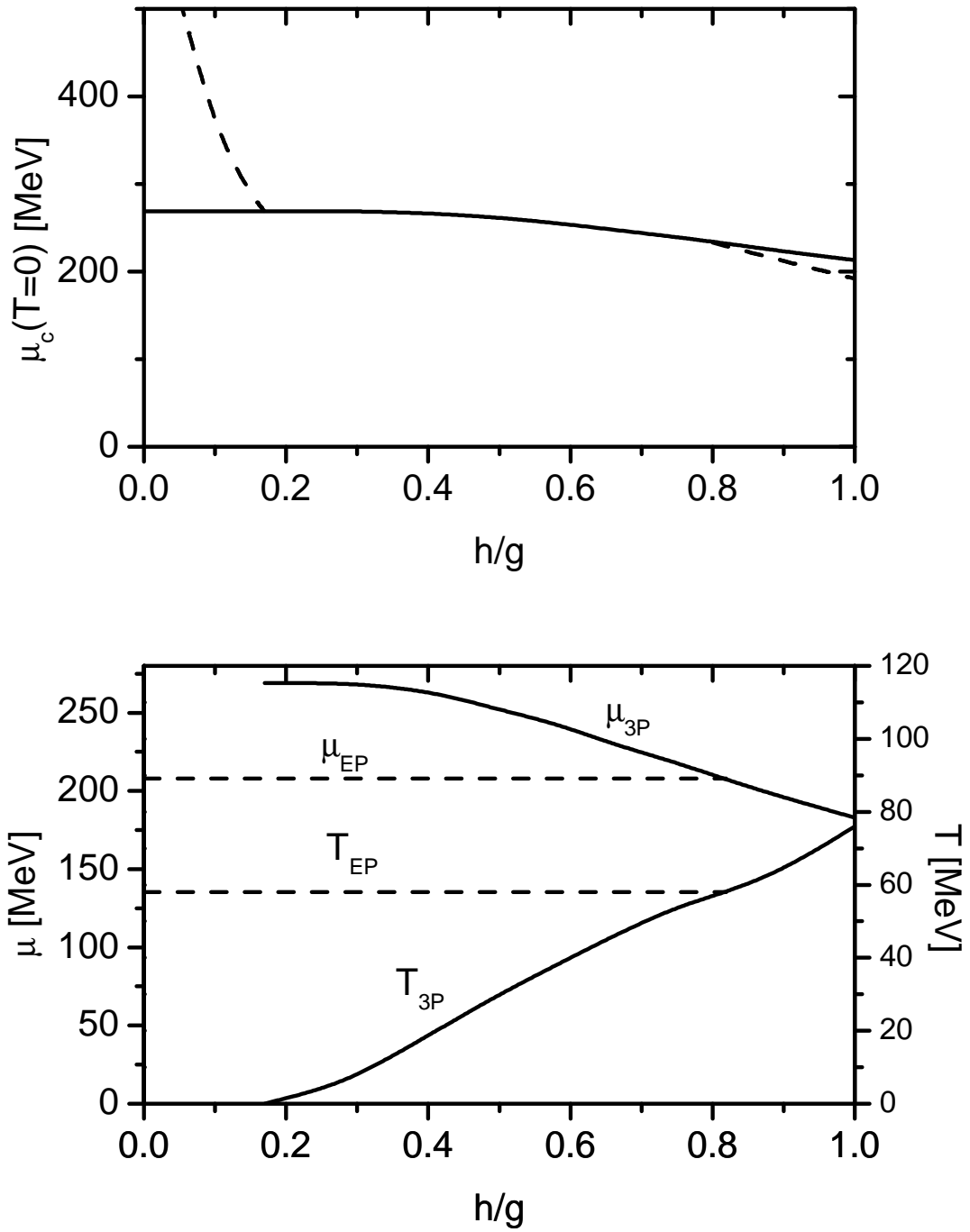


Figura 4.6: Comportamiento de los puntos críticos para el regulador Gaussiano (conjunto II) como función de h/g . El panel superior muestra el potencial químico crítico a $T = 0$, mientras que el inferior la posición del punto triple y del *end point*.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo estudiamos el comportamiento de materia de quarks *up* y *down* a temperatura y potencial químico finitos utilizando un modelo quiral con interacciones no-locales, covariantes y separables, tanto en el canal escalar quark-antiquark como el canal quark-quark. En los cálculos numéricos consideramos tres tipos de reguladores: gaussianos, lorentzianos y del modelo de instantones. En todos estos casos elegimos los parámetros libres del modelo de manera de reproducir los valores experimentales tanto de la masa del pión como de su constante de decaimiento, como así también para obtener un valor del condensado quiral que concuerde razonablemente con el obtenido mediante las reglas de suma de QCD en red. Dado que la relación entre el valor de las constantes de acoplamiento de los canales quark-antiquark y quark-quark no está claramente establecida, adoptamos en un principio el valor estándar $h/g = 3/4$ que surge de algunos modelos de interacciones para QCD. Encontramos que para los reguladores usados los diagramas de fases son bastante similares. En particular, obtuvimos que siempre aparecen dos puntos críticos: un punto triple en el cual la línea que indica la transición de segundo orden que separa la fase 2SC de la de gas de quarks libres se encuentra con la línea que marca la transición de primer orden entre la fase quiral y la 2SC a bajas temperaturas; y un *end point* que aparece a temperaturas más altas y en el cual la transición de primer orden se transforma en una del tipo *crossover*. Respecto de las posiciones del punto triple y el *end point*, obtuvimos predicciones muy similares con los distintos reguladores. Existe, por otro lado, una temperatura crítica $T_c(\mu = 0)$ por encima de la cual el condensado quiral es nulo para cualquier valor del potencial químico. Tal como mostramos en el Cuadro 4.1, los valores de $T_c(\mu = 0)$ están en el rango 115 – 120 MeV, algo inferiores a los obtenidos en simulaciones en red que predicen $T_c(\mu = 0) \approx 140 - 190$ MeV [30]. Tal como se aprecia en el Cuadro 4.1, una de las diferencias más evidentes en los resultados alcanzados con los diferentes reguladores es la relativa a la discontinuidad en $\bar{\Delta}$ en el potencial químico crítico a $T = 0$, para la cual obtuvimos valores que van de 114 a 182 MeV. Estos valores son mayores que los obtenidos con modelos con interacciones instantáneas, ya sean cálculos a nivel de campo medio [31, 20] o cálculos en red [32]. Señalamos que en nuestro caso (ver figura 4.1) la discontinuidad en $\bar{\Delta}$ registra un fuerte incremento al aumentar μ

luego de la transición de fases. Esto lleva a mayores valores de la discontinuidad para valores del potencial químico del orden de 400 MeV, por encima del cual deberían incluirse grados de libertad de extrañeza. En consecuencia, también obtenemos valores más altos para la temperatura crítica necesaria para alcanzar la fase de gas de quarks libres, tal como puede verse comparando los diagramas de fases de nuestro trabajo con los de cálculos realizados utilizando el modelo NJL [20].

Tal vez la comparación mas útil del presente trabajo haya que hacerla con uno similar para el modelo NJL, para los dos sabores de quarks más livianos pero con interacciones locales en los canales quark-antiquark y quark-quark [33]. En ese caso se propusieron dos formas de parametrización del modelo, una de las cuales es similar a la usada en nuestros cálculos. Con tal parametrización llegan, por ejemplo, a un potencial químico crítico, a $T = 0$, de $\mu_c \approx 321\text{MeV}$, valor superior a los obtenidos con cualquiera de los reguladores que hemos usado ($\mu_c(T = 0) \approx 229 - 245\text{MeV}$). Otro punto de comparación es el relativo al punto triple. Si bien para la temperatura del punto triple deducen un valor de $T_{3P} \approx 55\text{MeV}$ cercano a nuestros cálculos ($T_{3P} \approx 48 - 64\text{MeV}$), para el potencial químico del punto triple obtienen $\mu_{3P} \approx 305\text{MeV}$, alrededor de 100MeV por encima de nuestra estimación para cualquiera de los reguladores. Por último, y relacionado con las observaciones anteriores, comparando el diagrama de fases en el plano $T - \mu$ que aparece en tal trabajo con cualquiera de los obtenidos en el presente puede apreciarse la mayor extensión de la fase quiral.

En la parte final de este trabajo investigamos las consecuencias de variar h/g en el rango $0 < h/g \leq 1$. Dada la similitud de los resultados obtenidos para distintos reguladores, sólo hemos considerado para ello el caso del conjunto II del regulador gaussiano. Encontramos que para $h/g < 0,17$ no existe punto triple. Por otro lado, para $h/g > 0,82$, el punto triple y el *end point* se juntan en un solo punto, a la vez que aparece una fase donde tanto el condensado quiral como el de diquarks alcanzan valores no nulos. Es interesante remarcar que el valor $h/g = 0,82$ es bastante cercano al valor estándar usado en la mayoría de los cálculos con este modelo ($h/g = 0,75$). Así, sería importante identificar posibles consecuencias fenomenológicas de tener materia de quarks con un diagrama de fases donde el 3P coincidiera con el EP.

En este trabajo no hemos tenido en cuenta grados de libertad de extrañeza, los cuales deben considerarse para prolongar el estudio del diagrama de fases para valores más altos de potencial químico que los que hemos considerado. Al proceder de esta forma, es de esperar la aparición de la fase Color-Flavor Locked (CFL), donde se producen condensados de quarks strange con up y down. Trabajos realizados en modelos tipo NJL indican que la fase CFL surge para $\mu \gtrsim 430\text{MeV}$ [34].

Apéndice A

Transformaciones de Fierz

Una interacción de cuatro quarks en general puede tener diversos canales $\bar{\psi}\psi$ y $\psi\psi$. Muchas veces se expresa como un producto de bilineales en uno de esos canales. Un ejemplo de ello es la interacción que surge de considerar el intercambio de “gluones pesados”

$$\mathcal{L}_{int} = -G(\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda_g I_{sabor}\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^g I_{sabor}\psi), \quad (\text{A.1})$$

donde λ_g , $g = 1, \dots, 8$, son las matrices de Gell-Mann que operan en el espacio de color e I_{sabor} es la identidad en el espacio de sabor. En la ecuación anterior y en las siguientes se usa la convención de que índices repetidos implica suma.

El propósito de las transformaciones de Fierz es expresar la interacción en términos de productos de bilineales en los otros canales. Existen, para ello, dos transformaciones de Fierz distintas. Si en la expresión (A.1) escribimos explícitamente los índices obtenemos

$$\mathcal{L}_{int} = -G\bar{\psi}_{aiu}\psi_{bjv}\bar{\psi}_{ckw}\psi_{dlx}(\gamma_\mu)_{ab}(\gamma^\mu)_{cd}(\lambda_g)_{ij}(\lambda^g)_{kl}(\delta)_{uv}(\delta)_{wx} \quad (\text{A.2})$$

donde $abcd$ son los índices correspondientes al espacio de Dirac, $ijkl$ los índices del espacio de color y uvw los del espacio de sabor. La primera transformación de Fierz que aplicamos nos permite reescribir el Lagrangiano de interacción relacionando el primer campo fermiónico con el último y el tercer campo con el segundo. Para el espacio de Dirac, la primera transformación de Fierz se expresa, en general, de la siguiente manera [20]

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{I})_{ab}(\mathbb{I})_{cd} \\ (i\gamma_5)_{ab}(i\gamma_5)_{cd} \\ (\gamma^\mu)_{ab}(\gamma_\mu)_{cd} \\ (\gamma^\mu\gamma_5)_{ab}(\gamma_\mu\gamma_5)_{cd} \\ (\sigma^{\mu\nu})_{ab}(\sigma_{\mu\nu})_{cd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbb{I})_{ad}(\mathbb{I})_{cb} \\ (i\gamma_5)_{ad}(i\gamma_5)_{cb} \\ (\gamma^\mu)_{ad}(\gamma_\mu)_{cb} \\ (\gamma^\mu\gamma_5)_{ad}(\gamma_\mu\gamma_5)_{cb} \\ (\sigma^{\mu\nu})_{ad}(\sigma_{\mu\nu})_{cb} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde $\sigma^{\mu\nu} = i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Para la transformación de (A.2) nos interesa solamente el término $(\gamma^\mu)_{ab}(\gamma_\mu)_{cd}$ de (A.3).

Además, para los espacios de color y sabor usamos las siguientes identidades

$$(\lambda_g)_{ij}(\lambda^g)_{kl} = \frac{2}{N_c}(N_c^2 - 1)(\delta)_{il}(\delta)_{kj} - \frac{1}{N_c}(\lambda_g)_{il}(\lambda^g)_{kj}, \quad (\text{A.4})$$

$$(\delta)_{uv}(\delta)_{wx} = \frac{1}{2}(\tau_s)_{ux}(\tau^s)_{wv}, \quad (\text{A.5})$$

donde para el espacio de sabor la suma incluye, además de las tres matrices de Pauli τ_1, τ_2 y τ_3 , a la matriz τ_0 , múltiplo de la matriz identidad: $\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{N_s}}I$. De esta manera, el \mathcal{L}_{int} se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = G \left\{ \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} [(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} [(\bar{\psi}\gamma_\mu\tau_s\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\tau^s\psi) \right. \\ \left. + (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\tau^s\psi)] - \frac{1}{4N_c} [2(\bar{\psi}\tau_s\lambda_g\psi)(\bar{\psi}\tau^s\lambda^g\psi) - (\bar{\psi}\gamma_\mu\tau_s\lambda_g\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\tau^s\lambda^g\psi) \right. \\ \left. - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_s\lambda_g\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\tau^s\lambda^g\psi) + 2(\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\lambda_g\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\lambda^g\psi)] \right\}. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Los dos primeros términos de la expresión anterior contienen la interacción escalar y pseudoescalar en el canal quark-antiquark. La segunda transformación de Fierz nos permite relacionar, en los términos restantes, el primer campo fermiónico con el tercero y el último con el segundo. De esta manera obtenemos, entre otros canales quark-quark, la interacción escalar antitriplete de color. Escribiendo los índices de Dirac, color y sabor en los términos a transformar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = G \left\{ \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} [(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] \right. \\ \left. - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \bar{\psi}_{aiu}\psi_{bjv}\bar{\psi}_{ckw}\psi_{dlx}(\delta)_{ij}(\delta)_{kl}(\tau_s)_{uv}(\tau^s)_{wx}[(\gamma_\mu)_{ab}(\gamma^\mu)_{cd} + (\gamma_\mu\gamma_5)_{ab}(\gamma^\mu\gamma_5)_{cd}] \right. \\ \left. - \frac{1}{4N_c} \bar{\psi}_{aiu}\psi_{bjv}\bar{\psi}_{ckw}\psi_{dlx}(\lambda_g)_{ij}(\lambda^g)_{kl}(\tau_s)_{uv}(\tau^s)_{wx}[2(\delta)_{ab}(\delta)_{cd} - (\gamma_\mu)_{ab}(\gamma^\mu)_{cd} \right. \\ \left. - (\gamma_\mu\gamma_5)_{ab}(\gamma^\mu\gamma_5)_{cd} + 2(i\gamma_5)_{ab}(i\gamma_5)_{cd}] \right\}. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

La segunda transformación de Fierz para el espacio de Dirac es

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{I})_{ab}(\mathbb{I})_{cd} \\ (i\gamma_5)_{ab}(i\gamma_5)_{cd} \\ (\gamma^\mu)_{ab}(\gamma_\mu)_{cd} \\ (\gamma^\mu\gamma_5)_{ab}(\gamma_\mu\gamma_5)_{cd} \\ (\sigma^{\mu\nu})_{ab}(\sigma_{\mu\nu})_{cd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i\gamma_5 C)_{ad}(C i\gamma_5)_{cb} \\ (C)_{ad}(C)_{cb} \\ (\gamma^\mu\gamma_5 C)_{ad}(C\gamma_\mu\gamma_5)_{cb} \\ (\gamma^\mu C)_{ad}(C\gamma_\mu)_{cb} \\ (\sigma^{\mu\nu} C)_{ad}(C\sigma_{\mu\nu})_{cb} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

donde C es el operador de conjugación de carga definido en (2.38). Ahora, para la transformación de (A.7) nos interesan todas las combinaciones de matrices de Dirac que aparecen en (A.8) a excepción de $\sigma^{\mu\nu}$.

Para el espacio de color usamos

$$(\delta)_{ij}(\delta)_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{N_c} (\delta)_{ik}(\delta)_{lj} + (\lambda_g)_{ik}(\lambda^g)_{lj} \right], \quad (\text{A.9})$$

junto con

$$(\lambda_g)_{ij}(\lambda^g)_{kl} = \left(1 - \frac{1}{N_c}\right) \left[\frac{2}{N_c} (\delta)_{ik}(\delta)_{lj} + (\lambda_S)_{ik}(\lambda^S)_{lj} \right] - \left(1 + \frac{1}{N_c}\right) (\lambda_A)_{ik}(\lambda^A)_{lj}, \quad (\text{A.10})$$

donde en la expresión anterior, así como en las siguientes, utilizaremos los índices S y A para indicar las matrices simétricas y antisimétricas respectivamente. Por último, para el espacio de sabor utilizaremos la identidad

$$(\tau_s)_{uv}(\tau^s)_{wx} = \frac{2}{N_c} (\delta)_{uv}(\delta)_{wx} + (\tau_{S'})_{uv}(\tau^{S'})_{wx} - (\tau_{A'})_{uv}(\tau^{A'})_{wx}. \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, en el Lagrangiano aparecen los términos de interés, que son los del tipo $(\bar{\psi}i\gamma_5\tau\lambda C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5\tau\lambda\psi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = G \left\{ \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} [(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] \right. \\ - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{S'}\lambda_g C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5\tau^{S'}\lambda^g\psi) + \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{A'}\lambda_g C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5\tau^{A'}\lambda^g\psi) \\ + \frac{N_c - 1}{2N_c^2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{S'}\lambda_S C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5\tau^{S'}\lambda^S\psi) - \frac{N_c - 1}{2N_c^2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{A'}\lambda_S C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5\tau^{A'}\lambda^S\psi) \\ \left. + \frac{N_c + 1}{2N_c^2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{S'}\lambda_A C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5\tau^{S'}\lambda^A\psi) + \frac{N_c + 1}{2N_c^2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{A'}\lambda_A C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5\tau^{A'}\lambda^A\psi) \right\}. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Cabe señalar que además de estos términos aparecen otros que omitimos. Para simplificar la expresión anterior usamos el principio de Pauli. Un condensado de diquarks está definido por un valor de expectación

$$\langle \psi^T O \psi \rangle, \quad (\text{A.13})$$

donde O es un un operador que actúa en los espacios de Dirac, color y sabor

$$O = O_{Dirac} \otimes O_{color} \otimes O_{sabor}. \quad (\text{A.14})$$

Dado que el valor de expectación del operador O debe ser antisimétrico ante el intercambio de los campos fermiónicos

$$\psi^T O \psi = O_{aiubjv}\psi_{aiu}\psi_{bjv} = -O_{aiubjv}\psi_{bjv}\psi_{aiu} = -\psi^T O^T \psi, \quad (\text{A.15})$$

y obtenemos la restricción de que el operador O debe ser totalmente antisimétrico

$$O^T = -O. \quad (\text{A.16})$$

El hecho de que el operador $C\gamma_5$ sea antisimétrico ante la transposición hace posible prescindir de los términos que posean operadores en los espacios de color y sabor que combinados sean antisimétricos. Con esta simplificación llegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = G \left\{ \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} [(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] \right. \\ \left. - \frac{N_c - 1}{2N_c} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{S'}\lambda_S C\bar{\psi}^T)(\psi^T C i\gamma_5\tau^{S'}\lambda^S\psi) + \frac{N_c + 1}{2N_c} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{A'}\lambda_A C\bar{\psi}^T)(\psi^T C i\gamma_5\tau^{A'}\lambda^A\psi) \right\}. \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

En el tercer canal la interacción es repulsiva por lo que no lo tenemos en cuenta. Si identificamos las constantes de acoplamiento de los términos que quedan por $g/2$ y $h/2$, es decir

$$\frac{g}{2} = G \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{h}{2} = G \frac{N_c + 1}{2N_c}, \quad (\text{A.19})$$

la relación entre estas nuevas constantes es

$$\frac{h}{g} = \frac{N_c}{2(N_c - 1)}, \quad (\text{A.20})$$

si consideramos $N_c = 3$, entonces

$$\frac{h}{g} = \frac{3}{4}, \quad (\text{A.21})$$

que es la relación usada en la mayor parte de los cálculos.

De esta manera, el \mathcal{L}_{int} queda expresado como

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2} [(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] + \frac{h}{2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_{A'}\lambda_A C\bar{\psi}^T)(\psi^T C i\gamma_5\tau^{A'}\lambda^A\psi). \quad (\text{A.22})$$

El último término del \mathcal{L}_{int} contiene una suma sobre las matrices antisimétricas en los espacios de color y sabor. En el espacio de sabor $SU(2)$ existe una sola matriz antisimétrica, τ_2 . En el espacio de color, sin embargo, existen tres matrices antisimétricas, λ_2 , λ_5 y λ_7 , y los tres condensados correspondientes forman un vector en tal espacio. Dado que siempre es posible realizar una transformación global $SU(3)$ de color de manera de rotar tal vector en una dirección particular, sin perder generalidad podemos conservar en el \mathcal{L}_{int} uno sólo de estos tres términos, por ejemplo el correspondiente a λ_2

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2} [(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] + \frac{h}{2} (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_2\lambda_2 C\bar{\psi}^T)(\psi^T C i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi). \quad (\text{A.23})$$

Por último, usando las expresiones para ψ_c y $\bar{\psi}_c$ dadas en (2.36) y (2.37) respectivamente, podemos escribir (A.23) como

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2}[(\bar{\psi}\tau_s\psi)(\bar{\psi}\tau^s\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_s\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^s\psi)] + \frac{h}{2}(\bar{\psi}i\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi_c)(\bar{\psi}_ci\gamma_5\tau_2\lambda_2\psi). \quad (\text{A.24})$$

Apéndice B

Transformación del término de integrales fermiónicas

En este Apéndice se muestran algunos de los cálculos necesarios para obtener la siguiente igualdad, presentada en el Capítulo 3, válida en la ACM

$$\begin{aligned}
 & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^4x [\bar{\psi}(x)(-i \not{\partial} + \hat{m})\psi(x) + \sigma(x)j^S(x) + j^{P^\dagger}(x)\frac{\Delta(x)}{2} + \frac{\Delta^\dagger(x)}{2}j^P(x)] \right\} = \\
 & = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\bar{\psi}(p)(-\not{p} + \hat{m})\psi(p) + \bar{\psi}_c(p)(\not{p} + \hat{m})\psi_c(p)] \right. \\
 & \quad \left. + \bar{q}(p)\bar{\sigma}q(p) + \bar{q}_c(p)\bar{\sigma}q_c(p) + \bar{q}(p)i\gamma_5\lambda_2\tau_2\bar{\Delta}q_c(-p) + \bar{q}_c(-p)i\gamma_5\lambda_2\tau_2\bar{\Delta}^*q(p)] \right\}. \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

Partiendo de la contribución fermiónica a la acción euclídea escrita en términos de los campos ψ y $\bar{\psi}$, es posible obtener una expresión donde también aparezcan los campos ψ_c y $\bar{\psi}_c$ definidos en (2.36) y (2.37). El término de masa se transforma directamente utilizando la igualdad

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_c\psi_c, \quad (\text{B.2})$$

por lo que

$$\bar{\psi}\hat{m}\psi = \bar{\psi}_c\hat{m}\psi_c. \quad (\text{B.3})$$

Veamos a continuación el término que contiene a ∂_μ . Utilizando expresiones equivalentes a las (2.36) y (2.37) pero con los campos $\bar{\psi}$ y ψ en función de ψ_c y $\bar{\psi}_c$

$$\bar{\psi} = \psi_c^T C, \quad (\text{B.4})$$

$$\psi = C\bar{\psi}_c^T, \quad (\text{B.5})$$

siendo la matriz C el operador de conjugación de carga para fermiones definido en (2.38), podemos escribir

$$\begin{aligned} \int d^4x \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) &= \int d^4x \psi_c^T(x) iC\gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}_c^T(x) = \\ &= \int d^4x \psi_c^T(x) i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu \bar{\psi}_c^T(x) = - \int d^4x (\partial_\mu \bar{\psi}_c^T(x)) i\gamma^\mu \psi_c(x), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde usamos la identidad

$$C\gamma^\mu C = (\gamma^\mu)^T. \quad (\text{B.7})$$

Si en (B.6) integramos por partes el último término obtenemos que

$$- \int d^4x (\partial_\mu \bar{\psi}_c^T(x)) i\gamma^\mu \psi_c(x) = \int d^4x \bar{\psi}_c(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_c(x). \quad (\text{B.8})$$

De esta manera

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) (i\rlap{\not{\partial}} - \hat{m}) \psi(x) = \int d^4x \bar{\psi}_c(x) (i\rlap{\not{\partial}} - \hat{m}) \psi_c(x), \quad (\text{B.9})$$

pudiéndose entonces hacer el reemplazo

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) (-i\rlap{\not{\partial}} + \hat{m}) \psi(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\psi}(x) (-i\rlap{\not{\partial}} + \hat{m}) \psi(x) + \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\psi}_c(x) (-i\rlap{\not{\partial}} + \hat{m}) \psi_c(x) \quad (\text{B.10})$$

en la acción efectiva. Los dos últimos términos se pueden expresar en el espacio de impulsos teniendo en cuenta las siguientes relaciones

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ixp} \psi(p) \quad \bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ixp} \bar{\psi}(p), \quad (\text{B.11})$$

$$\psi_c(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ixp} \psi_c(p) \quad \bar{\psi}_c(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ixp} \bar{\psi}_c(p), \quad (\text{B.12})$$

donde (B.12) se deducen de (B.11) teniendo en cuenta que

$$\psi_c = C\bar{\psi}^T, \quad \bar{\psi}_c = \psi^T C. \quad (\text{B.13})$$

Por ejemplo, el último término de (B.10) se transforma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int d^4x \bar{\psi}_c(x) (-i\rlap{\not{\partial}} + \hat{m}) \psi_c(x) &= \int d^4x \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ixp} \bar{\psi}_c(p) \right] (-i\rlap{\not{\partial}} + \hat{m}) \left[\int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{ixp'} \psi_c(p') \right] = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} d^4x e^{ix(p'-p)} \bar{\psi}_c(p) (\not{p}' + \hat{m}) \psi_c(p') = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \left[(2\pi)^4 \delta(p' - p) \right] \bar{\psi}_c(p) (\not{p}' + \hat{m}) \psi_c(p') = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_c(p) (\not{p} + \hat{m}) \psi_c(p). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Con los resultados anteriores obtenemos que

$$\int d^4x \bar{\psi}(x)(-i\not{\partial} + \hat{m})\psi(x) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p)(-\not{p} + \hat{m})\psi(p) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_c(p)(\not{p} + \hat{m})\psi_c(p). \quad (\text{B.15})$$

La transformación del término $\int d^4x \sigma(x)j^s(x)$ se simplifica usando la ACM, reemplazando $\sigma(x)$ por su valor medio $\bar{\sigma}$:

$$\int d^4x \sigma(x)j^s(x) = \bar{\sigma} \int d^4x j^s(x). \quad (\text{B.16})$$

Usando la relación similar a (B.2) para \bar{q}_c y q_c

$$\bar{q}q = \bar{q}_c q_c, \quad (\text{B.17})$$

junto con la definición de j^S (ecuación (3.4)), llegamos a

$$\int d^4x j^S(x) = \frac{1}{2} \int d^4x \bar{q}(x)q(x) + \frac{1}{2} \int d^4x \bar{q}_c(x)q_c(x). \quad (\text{B.18})$$

Transformando al espacio de impulsos

$$\int d^4x \sigma(x)j^S(x) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{q}(p)\bar{\sigma}q(p) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{q}_c(p)\bar{\sigma}q_c(p). \quad (\text{B.19})$$

Análogamente a lo hecho para el término $\int d^4x \sigma(x)j^s(x)$

$$\begin{aligned} \int d^4x j^{P^\dagger}(x) \frac{\Delta(x)}{2} + \int d^4x \frac{\Delta^\dagger(x)}{2} j^P(x) &= \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{q}(p) i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 \bar{\Delta} q_c(-p) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{q}_c(-p) i\gamma_5 \tau_2 \lambda_2 \bar{\Delta}^* q(p). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Entonces, a partir de (B.15), (B.19) y (B.20) se obtiene (B.1).

Apéndice C

Cálculo de $\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger$

En el Capítulo 3 se usó la expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger &= \\ &= 4 \ln \left[(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + |\Sigma_p|^2 + \mu^2 + |r^2(p)\Delta|^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + \text{Im}^2\Sigma_p) - 4(\mu \text{Re}\Sigma_p + \omega_n \text{Im}\Sigma_p)^2 \right] \\ &\quad + 2 \ln \left[(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + |\Sigma_p|^2 + \mu^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + \text{Im}^2\Sigma_p) - 4(\mu \text{Re}\Sigma_p + \omega_n \text{Im}\Sigma_p)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

donde \mathbb{D} es

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -\not{p} + \Sigma_p + i\mu\gamma^4 & |r(p)|^2 i\gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \Delta \\ |r(p)|^2 i\gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \Delta^* & -\not{p} + \Sigma_p^* - i\mu\gamma^4 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

siendo

$$\not{p} = \omega_n \gamma^4 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma}, \quad (\text{C.3})$$

$$\Sigma_p = m + \bar{\sigma} r^2(\vec{p}, \omega_n - i\mu), \quad (\text{C.4})$$

$$r^2(p) = r^*(\vec{p}, \omega_n - i\mu) r(\vec{p}, \omega_n - i\mu). \quad (\text{C.5})$$

La matriz adjunta de (C.2) es

$$\mathbb{D}^\dagger = \begin{pmatrix} -\not{p}^\dagger + \Sigma_p^* + i\mu\gamma^4 & -|r(p)|^2 i\gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \Delta \\ -|r(p)|^2 i\gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \Delta^* & -\not{p}^\dagger + \Sigma_p - i\mu\gamma^4 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

dado que $\gamma^{4\dagger} = -\gamma^4$, $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$, $\tau_2^\dagger = \tau_2$ y $\lambda_2^\dagger = \lambda_2$.

Escribamos el producto $\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger$ como

$$\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Usando que $\gamma_5^2 = \mathbb{I}$ junto con la propiedad de los anticonmutadores de las matrices $\gamma_E^\mu = (\gamma^4, \vec{\gamma})$, que es $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$, se puede demostrar que $\not{p} \not{p}^\dagger = \omega_n^2 + \vec{p}^2$ y que $\not{p}^\dagger = -\not{p}$. Así, obtenemos que $d_{12} = d_{21} = 0$ y la matriz $\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger$ es diagonal en bloques

$$\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger = \text{diag} \left((\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2\Delta|^2\lambda_2^2) + 2i(\not{p}Im\Sigma_p + \mu\gamma^4 Re\Sigma_p + \mu\gamma^4\vec{p}\cdot\vec{\gamma}), \right. \\ \left. (\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2\Delta|^2\lambda_2^2) - 2i(\not{p}Im\Sigma_p + \mu\gamma^4 Re\Sigma_p + \mu\gamma^4\vec{p}\cdot\vec{\gamma}) \right). \quad (\text{C.8})$$

Luego calculamos la traza del logaritmo de la matriz $\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger$

$$\text{Tr} \ln(\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger) = \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} = \text{Tr} \begin{pmatrix} \ln d_{11} & 0 \\ 0 & \ln d_{22} \end{pmatrix} = \\ = \text{tr}(\ln d_{11} + \ln d_{22}) = \text{tr} \ln(d_{11}d_{22}), \quad (\text{C.9})$$

donde usamos como notación que Tr significa la traza sobre todos los espacios involucrados, mientras que tr sólo sobre los espacios de Dirac, color y sabor. Los pasos realizados en (C.9) son válidos pues, como se verá, las matrices sobre las que actúa la traza son diagonales en todos los espacios. Usando las expresiones de d_{11} y d_{22} dadas en (C.8) obtenemos

$$\text{Tr} \ln(\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger) = \text{tr} \ln[(\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2\Delta|^2\lambda_2^2)^2 + 4(\not{p}Im\Sigma + \mu\gamma^4 Re\Sigma_p + \mu\gamma^4\vec{p}\cdot\vec{\gamma})^2]. \quad (\text{C.10})$$

El segundo término del logaritmo de (C.10) podemos transformarlo hasta llegar a

$$(\not{p}Im\Sigma_p + \mu\gamma^4 Re\Sigma_p + \mu\gamma^4\vec{p}\cdot\vec{\gamma})^2 = -\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2\Sigma_p) - (\mu Re\Sigma_p + \omega_n Im\Sigma_p)^2; \quad (\text{C.11})$$

así, (C.10) queda

$$\text{Tr} \ln(\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger) = \\ = \text{tr} \ln[(\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2\Delta|^2\lambda_2^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2\Sigma_p) - 4(\mu Re\Sigma_p + \omega_n Im\Sigma_p)^2]. \quad (\text{C.12})$$

La matriz λ_2 es

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

y su cuadrado vale

$$\lambda_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

De esta manera, el primer término dentro del logaritmo de (C.12) es

$$\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2\Delta|^2\lambda_2^2 = \begin{pmatrix} \vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2\Delta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2\Delta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.15})$$

y la matriz de (C.12) es diagonal

$$\begin{aligned}
Tr \ln(\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger) &= \\
&= tr \ln \text{diag} \left((\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2 \Delta|^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2 \Sigma_p) - 4(\mu Re \Sigma_p + \omega_n Im \Sigma_p)^2, \right. \\
&\quad (\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2 + |r^2 \Delta|^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2 \Sigma_p) - 4(\mu Re \Sigma_p + \omega_n Im \Sigma_p)^2, \\
&\quad \left. (\vec{p}^2 + \mu^2 + |\Sigma_p|^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2 \Sigma_p) - 4(\mu Re \Sigma_p + \omega_n Im \Sigma_p)^2 \right). \quad (C.16)
\end{aligned}$$

Como la matriz queda diagonal en cada uno de los espacios, se puede aplicar el logaritmo a los elementos diagonales y tomar luego la traza. El resultado es

$$\begin{aligned}
Tr \ln \mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger &= \\
&= 4 \cdot 2 \left\{ 2 \ln \left[(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + |\Sigma_p|^2 + \mu^2 + |r^2(p) \Delta|^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2 \Sigma_p) - 4(\mu Re \Sigma_p + \omega_n Im \Sigma_p)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \ln \left[(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + |\Sigma_p|^2 + \mu^2)^2 - 4\vec{p}^2(\mu^2 + Im^2 \Sigma_p) - 4(\mu Re \Sigma_p + \omega_n Im \Sigma_p)^2 \right] \right\}, \quad (C.17)
\end{aligned}$$

donde el factor 4 proviene de la traza en el espacio de Dirac y el 2 de la traza en el espacio de sabor.

Dividiendo por 4 la última igualdad obtenemos (C.1).

Apéndice D

Regularización del potencial termodinámico

En la sección (3.3) obtuvimos la siguiente expresión para el potencial termodinámico en la aproximación de campo medio:

$$\Omega^{ACM}(T, \mu) = \frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \bar{p}^2 dp \left[2 \ln \left[\frac{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2}{T^2} \right] + \ln \left[\frac{A^2(0) - B - 4C^2}{T^2} \right] \right], \quad (D.1)$$

donde $A(|\bar{\Delta}|)$, B y C fueron definidas en (3.31), (3.31) y (3.31) respectivamente.

La integral de la ecuación (D.1) es divergente. Sin embargo, puede ser regularizada restándole el término correspondiente al potencial fermiónico libre, es decir, en ausencia de interacciones

$$\Omega_{(0)}^{ACM} = -\frac{3T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \bar{p}^2 dp \ln \left[\frac{(\omega_n^2 + \bar{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\bar{p}^2 + m^2)}{T^2} \right], \quad (D.2)$$

y sumándole luego este mismo término pero en su forma regularizada. Así, la transformación a realizar es

$$\Omega^{ACM} \rightarrow \Omega^{ACM} - \Omega_{(0)}^{ACM} + \Omega_{(r)}^{ACM}. \quad (D.3)$$

De esta manera, utilizando (D.2) y (D.1), obtenemos que

$$\Omega^{ACM}(T, \mu) = \frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \bar{p}^2 dp \left\{ 2 \ln \left[\frac{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \bar{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\bar{p}^2 + m^2)} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{A^2(0) - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \bar{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\bar{p}^2 + m^2)} \right] \right\} + \Omega_{(r)}^{ACM}. \quad (D.4)$$

Para obtener el término regularizado $\Omega_{(r)}^{ACM}$, reescribimos $\Omega_{(0)}^{ACM}$ como

$$\Omega_{(0)}^{ACM} = -\frac{6T}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \bar{p}^2 dp \ln \left[\frac{(\omega_n^2 + \bar{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\bar{p}^2 + m^2)}{T^2} \right]. \quad (D.5)$$

Transformando la diferencia de cuadrados dentro del corchete, la expresión anterior se puede escribir como

$$\Omega_{(0)}^{ACM} = -\frac{6T}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \ln \left[\frac{\omega_n^2 + (\mu^2 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})^2}{T^2} \right] - \frac{6T}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \ln \left[\frac{\omega_n^2 + (\mu^2 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})^2}{T^2} \right]. \quad (\text{D.6})$$

Usando la siguiente identidad

$$\ln \left[\frac{\omega_n^2 + (\mu \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})^2}{T^2} \right] = \int_1^{(\frac{\mu \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T})^2} \frac{d(\theta^2)}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} + \ln[1 + (2n+1)^2 \pi^2], \quad (\text{D.7})$$

y descartando el último término pues no depende de μ ni de T , (D.6) queda

$$\Omega_{(r)}^{ACM} = -\frac{6T}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \int_1^{(\frac{\mu - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T})^2} \frac{d(\theta)^2}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} - \frac{6T}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \int_1^{(\frac{\mu + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T})^2} \frac{d(\theta)^2}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2}. \quad (\text{D.8})$$

Para transformar las sumatorias usamos la siguiente identidad

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^\theta} \right], \quad (\text{D.9})$$

la cual reemplazamos en la ecuación (D.8) y luego de efectuar la integración en la variable θ obtenemos

$$\Omega_{(r)}^{ACM} = -\frac{6T}{\pi^2} \int \vec{p}^2 dp \left[\ln \left(1 + e^{-\left(\frac{\mu - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T}\right)^2} \right) + \ln \left(1 + e^{-\left(\frac{\mu + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T}\right)^2} \right) \right]. \quad (\text{D.10})$$

Finalmente, reemplazando (D.10) en (D.4), obtenemos la expresión para el potencial termodinámico gran canónico en la aproximación de campo medio

$$\Omega^{ACM}(T, \mu) = \frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \vec{p}^2 dp \left\{ 2 \ln \left[\frac{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\vec{p}^2 + m^2)} \right] + \ln \left[\frac{A^2(0) - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2(\vec{p}^2 + m^2)} \right] \right\} - \frac{6T}{\pi^2} \int \vec{p}^2 dp \left[\ln \left(1 + e^{-\left(\frac{\mu - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T}\right)^2} \right) + \ln \left(1 + e^{-\left(\frac{\mu + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{T}\right)^2} \right) \right]. \quad (\text{D.11})$$

Apéndice E

Cálculo de los condensados de quarks

En este Apéndice se detallan los cálculos de los condensados $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \equiv \langle\bar{\psi}\psi\rangle$ y $\langle 0|\psi^T Ci\gamma_5\lambda_2\tau_2\psi|0\rangle \equiv \langle\psi\psi\rangle$.

Comencemos con el cálculo de $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$. Para ello, usamos la función de partición gran canónica

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E}, \quad (\text{E.1})$$

donde S_E es la acción efectiva euclídea

$$S_E = \int d^4x \{ \bar{\psi}(x)[-i\not{\partial} + m]\psi(x) - \frac{g}{2}j^S(x)j^S(x) - \frac{h}{2}j^{P^\dagger}(x)j^P(x) \}. \quad (\text{E.2})$$

Teniendo en cuenta que

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi (\bar{\psi}\psi)e^{-\int d^4x \{ \bar{\psi}(x)[-i\not{\partial} + m]\psi(x) - \frac{g}{2}j^S(x)j^S(x) - \frac{h}{2}j^{P^\dagger}(x)j^P(x) \}}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\int d^4x \{ \bar{\psi}(x)[-i\not{\partial} + m]\psi(x) - \frac{g}{2}j^S(x)j^S(x) - \frac{h}{2}j^{P^\dagger}(x)j^P(x) \}}}, \quad (\text{E.3})$$

es fácil ver que la expresión anterior se reduce a

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -\frac{T}{V} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial m}. \quad (\text{E.4})$$

Considerando que

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln Z(T, \mu), \quad (\text{E.5})$$

podemos escribir a (E.4) como

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial m}. \quad (\text{E.6})$$

Para el cálculo de $\langle\psi\psi\rangle$ hay que agregar en la acción efectiva un término $k\psi^T Ci\gamma_5\lambda_2\tau_2\psi$, siendo k un parámetro. Luego derivamos respecto de k , en forma similar al caso $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$:

$$\langle\psi\psi\rangle = -\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{k=0}. \quad (\text{E.7})$$

Para simplificar los cálculos, es conveniente usar, por un lado, que

$$\psi^T C i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi = \bar{\psi}_c i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi, \quad (\text{E.8})$$

siendo $\psi^T C = \bar{\psi}_c$. Por otro lado, como $(\bar{\psi}_c i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi)^\dagger = \bar{\psi} i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi_c$, obtenemos que

$$\langle 0 | \bar{\psi}_c i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_c i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi | 0 \rangle^* = \langle 0 | \bar{\psi}_c i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi | 0 \rangle^\dagger = \langle 0 | \bar{\psi} i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi_c | 0 \rangle. \quad (\text{E.9})$$

Entonces, considerando (E.8) y (E.9), para calcular $\langle \psi \psi \rangle$ es lo mismo agregar en la acción efectiva los términos $\frac{k}{2} \bar{\psi}_c i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi + \frac{k}{2} \bar{\psi} i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi_c$ que solamente $k \psi^T C i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi$.

La acción modificada es

$$S_E = \int d^4 x \left[\bar{\psi}(x) (-i \not{\partial} + m) \psi(x) - \frac{g}{2} j^S(x) j^S(x) - \frac{h}{2} j^{P^\dagger}(x) j^P(x) - \frac{k}{2} \bar{\psi}_c(x) i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi(x) - \frac{k}{2} \bar{\psi}(x) i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \psi_c(x) \right], \quad (\text{E.10})$$

la cual se puede reescribir en el espacio de impulsos, en la aproximación de campo medio y formalmente en función de los campos $\bar{\Psi}(p)$ y $\Psi(p)$, tal como se hizo en el Capítulo 3. Así, llegamos a

$$S_E^{ACM} = V_E^4 \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} - T \sum \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \text{Tr} \bar{\Psi}(p) \mathbb{D} \Psi(p) \right], \quad (\text{E.11})$$

donde ahora la matriz \mathbb{D} , que actúa en los espacios de Dirac, color y sabor es

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -\not{p} + \Sigma_p + i\mu\gamma^4 & |r(p)|^2 i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \bar{\Delta} - k i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \\ |r(p)|^2 i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 \bar{\Delta}^* - k i \gamma_5 \lambda_2 \tau_2 & -\not{p} + \Sigma_p^* - i\mu\gamma^4 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.12})$$

Haciendo el producto $\mathbb{D} \mathbb{D}^\dagger$ para quedarnos con la parte real de la acción y dividiendo (E.11) por V_E^4 para obtener el potencial termodinámico, llegamos a

$$\begin{aligned} \Omega^{ACM}(T, \mu) &= \frac{\bar{\sigma}^2}{2g} + \frac{|\bar{\Delta}|^2}{2h} \\ &- \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \vec{p}^2 dp \left\{ 2 \ln \left[\frac{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + |\Sigma_p|^2 + \mu^2 + |r^2(p)\bar{\Delta} - k|^2)^2 - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2 + m^2)^2 - 4\mu^2(\vec{p}^2 + m^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[\frac{A^2(0) - B - 4C^2}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2 + m^2)^2 - 4\mu^2(\vec{p}^2 + m^2)} \right] \right\} \\ &- \frac{6T}{\pi^2} \int_0^\infty \vec{p}^2 dp \left[\ln(1 + e^{-\frac{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - \mu}{T}}) + \ln(1 + e^{-\frac{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + \mu}{T}}) \right], \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

donde $A(|\bar{\Delta}|)$, B y C están dados por (3.31), (3.31) y (3.31). Es fácil ver que la expresión anterior se puede derivar de la obtenida en el Capítulo 3 haciendo simplemente el cambio $r^2(p)\bar{\Delta} \rightarrow r^2(p)\bar{\Delta} - k$. Finalmente, derivando respecto de k y evaluando en $k = 0$ se obtiene

$$\langle \psi \psi \rangle = -\frac{8T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \vec{p}^2 dp \frac{\text{Re}[r^2(p)\bar{\Delta}] A(|\bar{\Delta}|)}{A^2(|\bar{\Delta}|) - B - 4C^2}, \quad (\text{E.14})$$

ecuación utilizada numéricamente para el cálculo del condensado $\langle\psi\psi\rangle$.

Bibliografía

- [1] J. C. Collins y M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1353.
- [2] D. Blaschke, N. K. Glendenning, A. Sedrakian (Eds.),
Physics of Neutron Stars Interiors, Springer, Berlin (2001).
- [3] Brookhaven National Laboratory, press release 03-49,
<http://www.bnl.gov/bnlweb/pubaf/pr/2003/bnlpr061103.htm>.
- [4] M. Alford, K. Rajagopal y F. Wilczek, Phys. Lett. **B 422**, 247 (1998).
- [5] R. Rapp, T. Schafer, E. V. Shuryak y M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. **81** , 53 (1998).
- [6] M. Alford, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **117**, 65-82 (2003).
- [7] T. Schafer, hep-ph/0304281.
- [8] D. H. Rischke, nucl-th/0305030.
- [9] Z. Fodor and S. D. Katz, JHEP **0203**, 014 (2002); JHEP **0404**, 050 (2004); C.R. Allton et al, Phys. Rev. **D66**, 074507 (2002); C. R. Allton, S. Ejiri, S. J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann and C. Schmidt, Phys. Rev. **D68**, 014507 (2003); P. de Forcrand and O. Philipsen, Nucl. Phys. **B642**, 290 (2002); M. D'Elia and M. P. Lombardo, Phys. Rev. **D67**, 014505 (2003).
- [10] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [11] U. Vogl y W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
- [12] S. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).
- [13] G. Ripka, *Quarks bound by chiral fields* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [14] T. Schafer y E. V. Schuryak, Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998).
- [15] E. Ruiz Arriola y L. L. Salcedo, Phys. Lett. B **450**, 225 (1999).

- [16] G. Ripka, Nucl. Phys. A **683**, 463 (2001); R. S. Plant y M. C. Birse, Nucl. Phys. A **703**, 717 (2002).
- [17] R. D. Bowler y M. C. Birse, Nucl. Phys. A **582**, 655 (1995); R. S. Plant y M. C. Birse, Nucl. Phys. A **628**, 607 (1998).
- [18] F. J. Ynduráin, *The theory of quark and gluon interactions* (Springer-Verlag, Heilderberg, 1999).
- [19] G. Ripka, *Dual Superconductor Models of Color Confinement* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004).
- [20] M. Buballa, hep-ph/0402234.
- [21] D. I. Dyakonov y V. Y. Petrov, Sov. Phys. JETP **62**, 204 (1985); Sov. Phys. JETP **62**, 431 (1985); Nucl. Phys. B **245**, 259 (1985); Nucl. Phys. B **272**, 457 (1986); D. I. Dyakonov, V. Y. Petrov y P. V. Pobylitsa, Nucl. Phys. B **306**, 809 (1988).
- [22] F. T. Hawes, C. D. Roberts y A. G. Williams, Phys. Rev. D **49**, 4683 (1994).
- [23] M. Stingl, Phys. Rev. D **34**, 3863 (1986); **36**, 651(E) (1987).
- [24] T. Hatsuda y T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, 221 (1994).
- [25] I. General, D. Gómez Dumm, N.N. Scoccola, Phys. Lett. B **506**, 267 (2001); D. Gómez Dumm, N.N. Scoccola, Phys. Rev. D **65**, 074021 (2002).
- [26] D. Blaschke, G. Bureau, Y. L. Kalinovsky, P. Maris y P. C. Tandy, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2267 (2001); B. Szczerbinska y W. Broniowski, Acta Phys. Pol. B **31**, 835 (2000).
- [27] J. I. Kapusta, *Finite-temperature field theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).
- [28] R.D. Bowler y M.C. Birse, Nucl. Phys. **A582**, 655 (1995); R.S.Plant y M.C. Birse, Nucl. Phys. **A628**, 607 (1998).
- [29] R. Rapp, T. Schafer, E. V. Shuryak y M. Velkovsky, Annals Phys. **280**, 35 (2000)
- [30] F. Karsch and E. Laermann, arXiv:hep-lat/0305025.
- [31] K. Rajagopal and F. Wilczek, in *At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD*, M. Shifman, ed. (World Scientific, Singapore, 2001); M. Alford, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **51**, 131 (2001); D. H. Rischke, Prog. Part. Nucl. Phys. **52**, 197 (2004).
- [32] S. Hand and D.N. Walters, Phys. Lett. **B548**, 196 (2002); Phys. Rev. **D69**, 076011 (2004).

[33] D. Blaschke, M. K. Volkov y V. L. Yudichev, Eur. Phys. J. **A17**:103-110, 2003.

[34] F. Neumann, M. Buballa y M. Oertel, Nucl. Phys. **A714**, 481 (2003).

Agradecimientos

A mis padres.

A mi director de tesis, el Dr. Norberto Scoccola.

A la Dra. Gabriela Grunfeld por su inestimable ayuda.

A los siguientes compañeros de estudios por su ayuda, estímulo y amistad en todos estos años:

Juan Pablo Babaro

Jorge Brea

Carlos Correa

Claudio Chilotte

Yoo Chi Deuk

Matías Fumata

Mariano Galvagno

Sergio Hassan

David Krygier

Diego Melo

Martín Moyano

Mario Rossi