

TRANSICIÓN DE FASES QUIRAL EN UNA EXTENSIÓN NO LOCAL
DEL MODELO DE NAMBU Y JONA-LASINIO

Ignacio José General

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Septiembre 2001

TEMA: Transición de fases quiral en un modelo no local de Nambu y Jona-Lasinio

PALABRAS CLAVE: Modelo no local de Nambu y Jona-Lasinio; temperatura y/o densidad finita; transición de fases quiral.

ALUMNO: Ignacio José General **L. U. N°:** 841/96

LUGAR DE TRABAJO: Laboratorio Tandar, Departamento de Física
Centro Atómico Constituyentes
Comisión Nacional de Energía Atómica

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Norberto N. Scoccola

FECHA DE INICIO: Diciembre de 1999

FECHA DE FINALIZACIÓN: Septiembre de 2001

FECHA DE EXÁMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Director

Profesor de Tesis de Licenciatura

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia una extensión no local y covariante del modelo de Nambu y Jona-Lasinio, a temperatura y potencial químico distintos de cero. Para ello se usa una interacción quark–quark separable. A lo largo del trabajo se ve que las cantidades físicas de interés se pueden expresar en función de los polos (y sus correspondientes residuos) del propagador del quark. Se consideran los casos en que dichos polos, en el espacio de Minkowski, son reales o complejos. En otros trabajos, el segundo caso fue propuesto como la realización del confinamiento de los quarks. También se estudia la transición quiral que sufre el sistema al cruzar ciertos valores críticos de temperatura y potencial químico, hallándose que ésta es siempre de primer orden para valores chicos de la temperatura y, para quarks másicos, la transición se torna suave al acercarse a un dado punto final. En el límite quiral, este punto se transforma en un punto tricrítico. Finalmente, se estudia la relación entre la transición deconfinante y la quiral.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Modelos quirales efectivos	5
2.1. Características generales de la QCD	5
2.2. El modelo de Nambu y Jona-Lasinio.	7
2.2.1. Aproximación de campo medio y generación dinámica de masa.	8
2.2.2. Bosones de Goldstone: el pión.	11
2.3. Interacciones no locales	12
2.3.1. Interacciones no locales y separables.	12
3. Interacciones no locales a temperatura y potencial químico finitos	16
3.1. Temperatura y potencial químico nulos.	17
3.2. Temperatura y potencial químico finitos.	21
3.2.1. Residuos en la ec. (3.39)	23
3.3. Condensado y densidad de quarks	27
3.3.1. Condensado de quarks.	27
3.3.2. Densidad de quarks.	28
4. Modelo gaussiano y resultados numéricos	33
5. Conclusiones	38
Apéndice I: Modelo NJL en el límite quiral	39
Apéndice II: Sumatoria sobre las frecuencias de Matsubara	41
Apéndice III: Polos de la ec. (3.14)	44
Apéndice IV: Corriente no local de Nöther	46
Bibliografía	48

1. INTRODUCCIÓN

”Si los hadrones realmente se rompen en quarks libres bajo las condiciones de alta temperatura que prevalecieron en el universo temprano, uno debería esperar poder encontrar algunos quarks libres como restos de esas épocas ... Si la fuerza de interacción entre dos quarks decrece al acercarlos, también se incrementa al separarlos ... la energía requerida para separar un quark de los otros, en un hadrón, crece al crecer la distancia entre ellos y, eventualmente, se hace lo suficientemente grande como para crear nuevos pares quark-antiquark a partir del vacío. Finalmente, uno termina no con varios quarks libres, sino con varios hadrones ... Los quarks estaban tan cerca unos de otros en el universo temprano, que no sentían estas fuerzas (entre ellos), y se podían comportar como partículas libres.” Estos quarks libres que nos describe Steven Weinberg [1], junto con los gluones, las partículas portadoras de la interacción fuerte, formaban un plasma de quarks y gluones que era la materia del universo en sus primeros microsegundos, cuando su temperatura era algo superior a los 150 MeV (10^9 K). A lo largo de estos primeros instantes y como consecuencia del Big Bang, el universo se expandió, enfriándose por debajo de una cierta temperatura crítica. Esto llevó a una transición en la composición de la materia: el plasma de quarks y gluones se transformó en un gas de nucleones y mesones. Al continuar el universo enfriándose dichas partículas se unieron para formar deuterio y, luego de las primeras reacciones nucleares del universo, los elementos livianos como el helio y el litio. A partir de esta etapa, y bajo la acción de la gravedad, estos primeros elementos químicos tendieron a unirse, formando así las estrellas y galaxias. Y, finalmente, por reacciones nucleares producidas dentro de las estrellas y durante explosiones estelares (novas y supernovas), se fueron formando los elementos pesados. Aquella sopa primordial de quarks y gluones es, entonces, el punto de partida de todos los elementos químicos.

La evolución del universo hasta nuestros días, se puede caracterizar por su expansión, lo que provoca su enfriamiento. La física experimental, entre otras cosas, intenta reproducir las condiciones existentes en esas épocas pasadas de nuestro universo dentro de los grandes aceleradores de partículas de la actualidad. En ellos se hacen colisionar núcleos atómicos con velocidades muy próximas a

la de la luz. Esto crea zonas "calientes" entre las partículas cuando ellas se encuentran muy cerca unas de otras, zonas con una gran densidad de energía, lo que perturba al vacío y a los campos de materia, causando la transformación de energía de colisión en pares de partículas. Cuanto mayor sea la energía de la colisión, mayor será la variedad de partículas que se puedan producir, y mayor el tiempo atrás en el que estemos "observando" al universo.

En junio del año 2000, el "Relativistic Heavy Ion Collider" o RHIC, en Brookhaven, se puso en operación. Este acelerador de partículas hace colisionar dos haces de iones de oro que viajan en sentidos opuestos, a velocidades muy cercanas a la de la luz, a lo largo de un anillo de 4 km de longitud. Los iones pueden alcanzar energías de 200 GeV por nucleon, es decir, la colisión puede remontarnos hasta los primeros microsegundos del universo. Por primera vez podríamos "ver" la transición de la materia ordinaria (quarks confinados) al plasma de quarks y gluones (quarks libres). Por otro lado, en el CERN se está construyendo, en la actualidad, el "Large Hadron Colider", otro acelerador de partículas que usará un anillo de 27 km. Se calcula que será capaz de hacer colisionar haces de plomo a energías cercanas al TeV por nucleon. Se espera que el LHC esté en funcionamiento para el año 2007. Estos hechos, la puesta en funcionamiento del RHIC y la construcción del LHC, han hecho que en los últimos años se prestara una considerable atención al estudio del diagrama de fases de la teoría de las interacciones fuertes.

El estado de la materia en que los quarks no están confinados dentro de los hadrones no es exclusivo del universo temprano, ya que también podría existir en el interior de las estrellas de neutrones. Estas estrellas se forman como resultado de la explosión de las supernovas y resultan ser extremadamente densas. Esto se debe a que están formadas por la propia materia de la supernova, interactuando con si misma a través de la fuerza gravitatoria, pero sin la presión producida por las constantes reacciones termonucleares en el interior de la misma antes de la explosión. De esta manera, la gravedad concentra, típicamente, una cantidad de materia (eléctricamente neutra) del orden de 1,5 masas solares, en una esfera de sólo 10 kms de radio, resultando en una densidad de alrededor de 10^{15} g/cm³, o sea, unas 5 veces la densidad de un núcleo atómico cargado. Esta densidad no es constante en todo el volumen de la estrella de neutrones, sino que la materia se comprime más y más a medida que se penetra a lo largo de su radio. Así, en la superficie exterior se encuentran átomos de materia ordinaria, con núcleos y electrones, pero más hacia el interior esta materia se encuentra tan comprimida por la fuerza de gravedad que los protones de los núcleos capturan a los electrones, transformando la materia en átomos más ricos en neutrones. Luego, más hacia el interior de la estrella, al llegar a una densidad de unos 10^{14} g/cm³ los núcleos

se disuelven completamente, resultando un fluido compuesto principalmente por neutrones, con un pequeño porcentaje de protones y electrones. Más profundo en la estrella de neutrones se alcanza una densidad de 10^{15} g/cm³. Si bien es difícil predecir que pasa a tales densidades, entre las posibilidades se encuentran la transformación de los electrones más energéticos en muones, la transformación de los nucleones más energéticos en bariones más pesados, conteniendo quarks strange, y la transformación de los nucleones en materia de quarks.

El estudio de la interacción entre quarks y gluones es el objeto de la exitosa teoría de gauge conocida como Cromodinámica Cuántica ó QCD. Éste es el ámbito natural para estudiar este tipo de cuestiones. El éxito de la QCD se ve fundamentalmente en el rango de las altas energías, donde los procesos de dispersión son calculados con una gran precisión. Esto se debe a la libertad asintótica que exhibe la teoría en este rango. Dicha propiedad consiste en que la interacción entre dos quarks debida al intercambio de un gluón desaparece en el límite de impulso infinito. Esto permite aplicar técnicas perturbativas en función de la constante de acoplamiento quark-gluón. Por otro lado, a bajas energías no se presenta el comportamiento de libertad asintótica, por lo que las técnicas de cálculo perturbativas dejan de resultar apropiadas. Así, uno tiene un lagrangiano completo, el de la QCD, conteniendo toda la dinámica del sistema, pero resulta muy complicado sacar información útil para la mayoría de los procesos físicos interesantes, como por ejemplo las propiedades de los hadrones. Por esta razón, varios métodos fueron desarrollados para aproximar QCD. Entre ellos está la "QCD en la red" que, en realidad, intenta resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discreto. Pero incluso aquí se presentan serios problemas, entre ellos la inclusión de un potencial químico finito [2]. Por ello, en este método también es necesario hacer aproximaciones. Otra opción es el de las teorías efectivas: se busca un lagrangiano simplificado que contenga las características principales de la QCD a bajas energías, como por ejemplo, sus simetrías.

Uno de los modelos efectivos más utilizados en este contexto es el modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL). Su historia se remonta al año 1961, año en el que Y. Nambu y G. Jona-Lasinio publicaron dos trabajos llamados "Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity" [3]. Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de algún límite en el cual el pión es un bosón de Goldstone (no másico) asociado con una ruptura espontánea de simetría. Lo que ellos pretendían era explicar la pequeña masa que distingue al pión de otros hadrones. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasinio partieron de un lagrangiano con una interacción de dos cuerpos entre nucleones (los bloques

básicos de materia conocidos hasta ese momento) no másicos, por ello con simetría quirial, cuya ruptura espontánea hace finita la masa de los nucleones y da lugar a un bosón de Goldstone que ellos identificaron con el pión.

Por ese tiempo, la QCD aún no existía. Cuando esta teoría finalmente fue formulada, a mediados de los años 70, el modelo NJL empezó a ser abandonado, debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Pero, como ya dijimos, debido a su libertad asintótica, la QCD resulta aplicable en forma exitosa fundamentalmente en el rango de las altas energías. Y para estudiar procesos de baja energía, aún hoy en día es necesario recurrir a aproximaciones o modelos efectivos. La última opción se puede realizar, por ejemplo, si se reinterpreta al modelo NJL como la descripción de un sistema de quarks en lugar de uno de nucleones. En este caso, también hay que suponer que los grados de libertad de los gluones se pueden congelar para dar interacciones efectivas entre los quarks.

El modelo NJL, reinterpretado de la manera antedicha, lleva a grandes simplificaciones con respecto a la QCD; y la naturaleza local de la interacción entre quarks ayuda notablemente en los cálculos. Sin embargo, es posible ver que justamente es esta localidad la que introduce consecuencias no deseadas al modelo como, por ejemplo, la existencia de integrales divergentes (y la correspondiente introducción de cut-offs arbitrarios). Por esta razón, uno se ve naturalmente conducido a introducir interacciones no locales que, como veremos más adelante, solucionan este tipo de problemas, a cambio de algunas complicaciones en los cálculos.

La opción de estudiar el plasma de quarks y gluones y su transición a materia hadrónica usando una extensión no local del modelo NJL es la tomada en la presente tesis, la cual está organizada de la siguiente manera. En el capítulo II se introducen los modelos quirales efectivos. En primer lugar se presentan ciertas características generales de la QCD, entre ellas sus simetrías. Luego se describe el modelo de Nambu y Jona-Lasinio y, por último, se introducen los modelos con interacciones no locales. En el capítulo III se explica cómo agregar temperatura y potencial químico al modelo con interacciones no locales, para lo que se usa el formalismo del tiempo imaginario. El modelo así desarrollado se aplica, en el capítulo IV, al caso particular en el que las interacciones no locales estén reguladas por un factor tipo gaussiano (que describe el rango de la no localidad), investigándose los resultados numéricos correspondientes. En el capítulo V se presenta una síntesis del trabajo y se establecen las conclusiones relevantes. Por último, en los apéndices I, II, III y IV se describen ciertos detalles de los cálculos mencionados a lo largo del texto principal de la presente tesis.

2. MODELOS QUIRALES EFECTIVOS

2.1. Características generales de la QCD

La Cromodinámica Cuántica es una teoría de gauge, no abeliana, que describe las interacciones fuertes. Sus grados de libertad consisten en campos fermiónicos (quarks) y campos de gauge (gluones). Los primeros vienen definidos por

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde u, d, s, \dots representan a los grados de libertad de sabor, cada uno de los cuales puede existir, a su vez, en 3 colores diferentes. Las masas de los quarks se expresan en una matriz de masa

$$m_0 = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El lagrangiano queda definido por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi} (i\gamma_\mu D^\mu - m_0) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda_a A_\mu^a \quad (2.4)$$

es la derivada covariante que incluye a los campos gluónicos A_μ^a (con índices de color $a = 1, \dots, 8$). Aquí g es la constante de acoplamiento y λ_a son los generadores del grupo de color $SU_C(3)$ (matrices de Gell-Mann). Finalmente,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.5)$$

es el tensor de los campos de gluones (siendo f_{abc} las constantes de estructura del grupo $SU_C(3)$).

Consideremos el caso de 2 sabores (u y d) y supongamos que los quarks correspondientes tienen masa nula (límite quirral). El lagrangiano (2.3) queda

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi} i \gamma_\mu D^\mu \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Este lagrangiano es invariante frente a las transformaciones de gauge de color $SU_C(3)$, que se manifiestan a través de los campos gluónicos en las derivadas covariantes. También es simétrico frente a las transformaciones del grupo de Lorentz y de sabor, que dan lugar al grupo $G = SU_V(2) \otimes U_V(1) \otimes SU_A(2) \otimes U_A(1)$. Estas transformaciones se indican en la tabla 1.

Las transformaciones $SU_V(2)$ y $U_V(1)$ son las transformaciones unitarias que corresponden a la conservación del isospín y del número bariónico, respectivamente. Las transformaciones axiales o quirales, $SU_A(2)$ y $U_A(1)$, alteran la paridad de un dado estado. Por ello, la realización de dichas simetrías en la naturaleza, debería implicar para cada multiplete la existencia de otro multiplete de paridad opuesta. Esto no es lo que se observa experimentalmente; de ahí se induce que tanto $SU_A(2)$ como $U_A(1)$ no se manifiestan en forma directa.

simetría	transformación	corriente
$SU_V(2) - isospín$	$\Psi \rightarrow \exp(-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}/2) \Psi$	$J_\mu^k = \bar{\Psi} \gamma_\mu \sigma^k \Psi$
$U_V(1) - n^{ro}bariónico$	$\Psi \rightarrow \exp(-i\alpha) \Psi$	$J_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$
$SU_A(2) - quirral$	$\Psi \rightarrow \exp(-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta} \gamma_5/2) \Psi$	$J_\mu^k = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \sigma^k \Psi$
$U_A(1) - axial$	$\Psi \rightarrow \exp(-i\beta \gamma_5) \Psi$	$J_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi$

TABLA 1: Simetrías de QCD con 2 sabores de masa nula.

($\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices de Pauli, α , β , $\boldsymbol{\theta}$ y \mathbf{w} son parámetros (o vectores de parámetros) independientes de las coordenadas espacio-temporales)

Se cree que $SU_A(2)$ es una simetría espontáneamente rota. Al ocurrir esto, en el caso de quarks de masa nula, aparecen tres ($N_F^2 - 1$) modos de excitación de los campos de quarks y gluones, de masa nula, llamados bosones de Goldstone. Estos tres bosones se asocian con los piones, ya que experimentalmente se observa que la masa de los piones, si bien no es nula, es mucho menor que la de los nucleones. La expresión matemática de una simetría es la conmutación del hamiltoniano (H) del sistema con el operador (U) correspondiente a la cantidad conservada, esto es, $[H, U] = 0$. Cuando una simetría está espontáneamente rota, lo que ocurre no es que el conmutador deja de ser nulo, sino que el vacío deja de ser invariante frente a las transformaciones del grupo de simetría del operador U . Como consecuencia de esto, el estado fundamental deja de ser único y pasa a estar degenerado. Esto se puede expresar como: $[H, U] = 0$, pero $HU|0\rangle \neq 0$.

Por otro lado, en cuanto a la simetría $U_A(1)$, ésta está rota a nivel cuántico por la llamada "anomalía axial". Esto significa que si bien la teoría clásica posee una dada simetría, en el proceso de cuantización ella se pierde porque la corriente de Nöther recibe una contribución extra que hace que su cuadridivergencia deje de ser nula.

Lo anterior también es válido para el caso de 3 sabores, simplemente reemplazando las matrices de Pauli, σ^k ($k = 1, 2, 3$), por las matrices de sabor λ^a ($a = 1, \dots, 8$).

Si ahora queremos partir de un lagrangiano efectivo, más simple que el de QCD pero con sus mismas características y simetrías, nos vemos naturalmente llevados a considerar el lagrangiano utilizado por Nambu y Jona-Lasinio en su trabajo de 1961. Éste fue construído para nucleones con interacciones de dos cuerpos, y de manera que respetase las simetrías dadas por el grupo $SU_V(2) \otimes U_V(1) \otimes SU_A(2) \otimes U_A(1)$ (más tarde excluyeron la simetría $U_A(1)$ por consideraciones experimentales). En nuestro caso, sólo es necesario reinterpretar dicho lagrangiano como uno de quarks, asumiendo que las interacciones locales de dos cuerpos se corresponden con una interacción efectiva, resultante de complicados procesos gluónicos.

2.2. El modelo de Nambu y Jona-Lasinio

Como ejemplo del modelo NJL, veamos el caso en que sólo se consideran dos especies de fermiones no masivos como, por ejemplo, los quarks u y d. Tenemos, entonces, partículas de spín 1/2, sin masa, descritas por el campo $\Psi(x)$. Este campo cuenta con cuatro grados de libertad espinoriales, dos de sabor ($N_f = 2$) y tres de color ($N_c = 3$). Sea el lagrangiano del modelo

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(x) i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi(x) - G \left[(\bar{\Psi}(x) \Psi(x))^2 + (\bar{\Psi}(x) i \gamma_5 \sigma \Psi(x))^2 \right]. \quad (2.7)$$

Este lagrangiano tiene simetría $U_V(1)$ (de número bariónico), $SU_V(2)$ (de isospín) y $SU_A(2)$ (quiral). El grupo $SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ es equivalente al grupo $SU_R(2) \otimes SU_L(2)$ que genera las transformaciones

$$SU_R(2) : \Psi_R \rightarrow \exp(-i \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}_R) \Psi_R, \quad (2.8)$$

$$SU_L(2) : \Psi_L \rightarrow \exp(-i \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}_L) \Psi_L, \quad (2.9)$$

donde $\boldsymbol{\theta}_{L,R}$ son vectores de parámetros arbitrarios, que se aplican sobre los campos derecho e izquierdo (right y left), definidos por

$$\Psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi, \quad \Psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi \quad (2.10)$$

$$\bar{\Psi}_R = \Psi_R^\dagger \gamma_0 = \bar{\Psi} \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad \bar{\Psi}_L = \bar{\Psi} \frac{1 + \gamma_5}{2}. \quad (2.11)$$

Por lo tanto, el lagrangiano (2.7) tiene las simetrías de la QCD descritas en la tabla 1.

¿Qué pasa si ahora agregamos un término de masa al lagrangiano? Es fácil ver que un término del tipo $\delta\mathcal{L} = -m_0 \bar{\Psi}\Psi$ rompe la simetría axial $SU_A(2)$ explícitamente ($\partial_\mu J_A^\mu \neq 0$), mientras que la simetría $SU_V(2)$ permanece intacta.

2.2.1. Aproximación de campo medio y generación dinámica de masa

Tomemos el lagrangiano de interacción del sistema:

$$\mathcal{L}_{int} = G \left[(\bar{\Psi}(x)\Psi(x))^2 + (\bar{\Psi}(x)i\gamma_5\sigma\Psi(x))^2 \right]. \quad (2.12)$$

En el tratamiento de Hartree, donde sólo se toman en cuenta los términos directos, la aproximación de campo medio corresponde a reemplazar los términos del tipo $(\bar{\Psi}\Gamma\Psi)^2$ por $2\bar{\Psi}\Gamma\Psi \langle \bar{\Psi}\Gamma\Psi \rangle$ en el lagrangiano (2.12), siendo $\langle \rangle$ el valor de expectación del vacío y Γ cualquiera de las combinaciones de las matrices de Dirac y de Pauli que aparecen en \mathcal{L}_{int} [4]. El proceso relevante se muestra, gráficamente, en la figura 1.

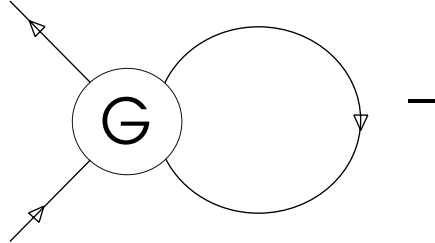


FIGURA 1: "Cierre del loop fermiónico" para linealizar la interacción en el lagrangiano 2.12.

El vacío debe ser invariante de Lorentz y debe conservar la paridad. Por ello, $\langle \bar{\Psi}i\gamma_5\sigma\Psi \rangle = 0$, y sólo sobrevive el valor de expectación de $\bar{\Psi}\Psi$, el condensado quark-antiquark. Entonces, el lagrangiano en la aproximación de campo medio queda

$$\mathcal{L}^{CM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}^{CM} = \bar{\Psi}(x)i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi(x) + 2G \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \bar{\Psi}\Psi. \quad (2.13)$$

Comparando esto con el lagrangiano de una partícula libre de masa m , $\mathcal{L}^{Dirac} = \bar{\Psi}(x)i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi(x) - m\bar{\Psi}\Psi$, vemos que es posible definir una masa dinámica de los quarks,

$$m = -2G \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle, \quad (2.14)$$

generada por la interacción de estas partículas con el vacío. Como ya dijimos, un término de masa en el lagrangiano, como el que apareció en (2.13), rompe la simetría quiral. A la ecuación (2.14) se la conoce como ecuación del gap del modelo NJL.

Examinemos al condensado $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$. En la aproximación de campo medio está dado por [5]:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -i.tr[S_F(0)], \quad (2.15)$$

donde tr denota una traza sobre índices espinoriales, de sabor y de color, y siendo S_F el propagador de Dirac definido por:

$$S_F(x-y) = -i \langle T[\Psi(x)\bar{\Psi}(y)] \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp[ip.(x-y)]}{\gamma_\mu p^\mu - m + i\varepsilon}. \quad (2.16)$$

Reemplazando (2.16) en (2.15) llegamos a una ecuación autoconsistente:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -i.tr \left[\int_{|\vec{p}| \leq \Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m + i\varepsilon} \right], \quad (2.17)$$

donde se ha introducido un parametro Λ para regularizar la integral que de otro modo sería divergente. El modelo NJL no queda definido hasta que no se determine algún procedimiento de regularización. Usando que, para una estructura escalar A ,

$$\frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - A} = \frac{\gamma_\mu p^\mu + A}{p^2 - A^2} \quad (2.18)$$

y

$$tr(\gamma^\mu) = 0, \quad (2.19)$$

podemos integrar la componente temporal por medio del teorema de los residuos. Entonces,

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -4i N_c N_f \int_{|\vec{p}| \leq \Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{m}{p_0^2 - E_p^2 + i\varepsilon'}, \quad (2.20)$$

donde $E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$, $N_f = 2$ y $N_c = 3$. Los polos del integrando están en $p_0 = \pm(E_p - i\delta)$. Integrando en el semiplano complejo superior y, luego, usando la ec. (2.14), queda

$$m = 4GN_cN_f \int_{|\vec{p}| \leq \Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{m}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \right]. \quad (2.21)$$

Suponiendo simetría esférica para hacer la integración espacial, se llega a:

$$m = \frac{GN_cN_fm}{\pi^2} \left[m^2 \ln m + \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + m^2} - m^2 \ln \left(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2} \right) \right]. \quad (2.22)$$

Aquí se ve que la ecuación del gap tiene una solución trivial $m = 0$. También puede existir una solución no trivial; para ver este segundo caso, reescribamos la ec. (2.22) (simplificando m , pues asumimos $m \neq 0$) de la siguiente manera:

$$\frac{\pi^2}{GN_cN_f\Lambda^2} = \frac{m^2}{\Lambda^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) - \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}} \right) \right] + \sqrt{1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}}. \quad (2.23)$$

El gráfico de esta ecuación, en función de $\frac{m^2}{\Lambda^2}$, se muestra en la figura 2. A medida que $G\Lambda^2$ se incrementa más allá del valor crítico π^2/N_cN_f , la masa m crece desde cero. De manera que la ecuación del gap tiene, además de la solución trivial ($m = 0$), una solución no trivial ($m \neq 0$) cuando la constante de acoplamiento G alcanza un valor mayor o igual a un G crítico definido por $G_{crit} = \pi^2/N_cN_f\Lambda^2$.

Resumiendo, distinguimos dos fases del sistema, en función de la existencia o no de la ruptura espontánea de la simetría quiral: La fase de Wigner-Weyl en la que $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = 0$, y los quarks son no másicos. Por ello, la simetría quiral del lagrangiano original se presenta en su forma usual. Este caso corresponde a $G < G_{crit}$. La otra fase corresponde a la fase de Nambu-Goldstone en la cual $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \neq 0$ (el vacío contiene un condensado), y los quarks adquieren una masa dinámica. Como en el lagrangiano aparece un término $\bar{\Psi}\Psi$, la simetría quiral es espontáneamente rota. En esta fase, que corresponde a $G \geq G_{crit}$ aparecen modos de frecuencia cero (bosones de Goldstone) que buscaremos en la subsección siguiente.

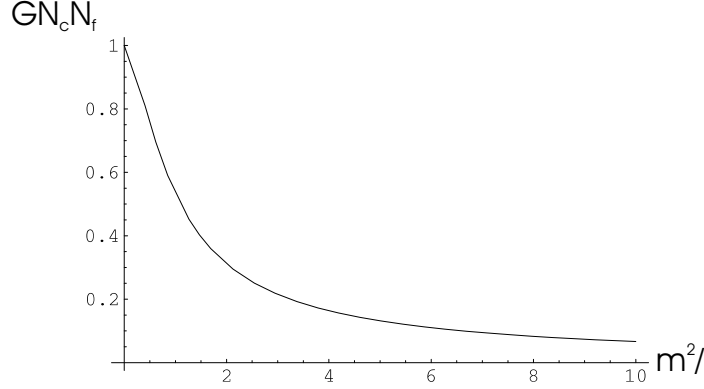


FIGURA 2: Gráfico de la ecuación autoconsistente (2.23). Sólo existen soluciones reales para $\pi^2/GN_c N_f \Lambda^2 \leq 1$.

2.2.2. Bosones de Goldstone: el pión

Para hallar los mesones debemos resolver, en forma consistente, el conjunto de ecuaciones formado por la ecuación del gap (ec. de un cuerpo) y la de Bethe-Salpeter (ec. de dos cuerpos). En particular, estudiaremos el canal asociado con el segundo término en el lagrangiano de interacción (2.12), $G (\bar{\Psi}(x) i\gamma_5 \sigma \Psi(x))^2$, que es responsable de la excitación del modo isovectorial pseudoescalar ($J^{PC} = 0^{-+}$) identificado con el pión.

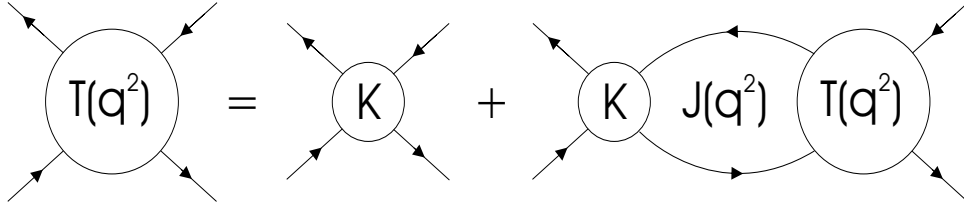


FIGURA 3: Esquematización de la ecuación autoconsistente de Bethe-Salpeter, que determina la matriz \mathbf{T} .

Las soluciones buscadas vienen dadas por los polos de la matriz \mathbf{T} , definida por (ver figura 3)

$$T_{ij}^{\alpha\beta}(q^2) = K + K J_{ij}^{\alpha\beta}(q^2) T_{ij}^{\alpha\beta}(q^2). \quad (2.24)$$

Aquí, $K = 2G$ es el núcleo de la interacción y J es la integral del loop (de

interacción) dada por

$$J_{ij}^{\alpha\beta}(q^2) = -i.tr \left\{ \int_{|\vec{p}| \leq \Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\Gamma_\alpha \lambda_i i S_F \left(p + \frac{q}{2} \right) \Gamma_\beta \lambda_j i S_F \left(p - \frac{q}{2} \right) \right] \right\}, \quad (2.25)$$

donde Γ_δ (tensores de Dirac) y λ_k (matrices de Pauli) seleccionan el canal apropiado: $\Gamma_P = i\gamma_5$ (canal pseudoescalar), $\lambda_i = \lambda_j = \sigma_3$ para crear la partícula π^0 , $\lambda_i = \sigma_+$ y $\lambda_j = \sigma_-$ para crear π^+ , y al revés para π^- . Para el caso de los piones debemos elegir $\Gamma_\alpha = i\gamma_5$ y λ_i, λ_j en una de las tres combinaciones ya dichas.

La suma infinita que sale de iterar la ec. (2.24) no es más que una suma geométrica; luego,

$$T_{ij}^{\alpha\beta}(q^2) = \frac{K}{1 - K J_{ij}(q^2)}. \quad (2.26)$$

Y dado que la masa del pión queda determinada por los polos de la matriz T , obtenemos

$$1 - 2G J_{ij}^{PP}(q^2 = m_\pi^2) = 0. \quad (2.27)$$

Utilizando la ecuación del gap es posible ver que una solución de esta ecuación es $m_\pi^2 = 0$ (recordemos que estamos en el límite quiral), lo que significa que el pión es un bosón de Goldstone, un modo de masa nula consecuencia de una ruptura espontánea de simetría.

En esta versión de dos sabores hemos mostrado los elementos esenciales del modelo NJL, tales como la simetría quiral del lagrangiano (2.7), la generación dinámica de la masa del quark, ec. (2.14), y la aparición del pión como bosón de Goldstone, ec. (2.27). Estos elementos son los mismos que aparecen, con variaciones en la forma de los cálculos, en las distintas versiones del modelo NJL, tanto en el caso de dos sabores de quarks másicos [6], como en el de tres sabores [7], [8]. En la sección siguiente generalizaremos lo anterior al caso de interacciones no locales.

2.3. Interacciones no locales

En la sección anterior hemos descrito un sistema de quarks interactuando a través de un vértice de cuatro puntos, invariante quiral, y local. La naturaleza local de dicha interacción permite simplificar notablemente los cálculos pero, también, trae consecuencias no deseadas: integrales divergentes y modelo no confinante. En cuanto a la primera consecuencia, hay varios tipos de regularización usados en la literatura (cut offs, Pauli-Villars, etc.), y todos ellos llevan a resultados cualitativamente parecidos, por lo cual no parece haber una razón física

para decidirse por uno u otro esquema. En cuanto a la segunda consecuencia, el modelo usado lleva a la existencia de quarks no confinados, libres, hecho contrario a la experiencia.

Una posible solución a estos problemas es la sugerida por los estudios de la representación de instantones del vacío de la QCD [9]. En esta imagen, la interacción de los quarks con los instantones induce un vértice efectivo de cuatro puntos, no local y separable. La naturaleza separable de la interacción permite seguir, hasta cierto punto, con las simplificaciones en los cálculos del caso local, a la vez que la no localidad provee al modelo de un cut-off natural.

2.3.1. Interacciones no locales y separables

Basados en lo ya dicho, consideremos una interacción de la forma:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{(2\pi)^8}{2} G f(p_1) f(p_2) f(p_3) f(p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (2.28)$$

donde el factor de forma f es, en realidad, $f(p_i^2)$ y cumple con la normalización $f(0) = 1$. En el caso en que $f(p) = 1$ para todo p , se recupera el caso local.

Trabajando en la aproximación de Hartree, con N_c colores y N_f sabores en el sistema, la ecuación del gap en el espacio euclídeo viene dada por

$$M(p) = m_c + 4N_c N_f G f^2(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k) f^2(k)}{k^2 + M^2(k)}, \quad (2.29)$$

donde m_c es la masa desnuda del quark y M es su masa dinámica. De ahora en más, todos los momentos que usemos estarán en el espacio euclídeo, a menos que se especifique otra cosa. Notemos que la integral en la ec. (2.29) es una constante. Evaluando $M(p)$ en cero se obtiene

$$M(0) = m_c + 4N_c N_f G \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k) f^2(k)}{k^2 + M^2(k)}. \quad (2.30)$$

Usando esto, podemos reescribir la ec. (2.29) como

$$M(p) = m_c + [M(0) - m_c] f^2(p). \quad (2.31)$$

Entonces, para determinar $M(p)$ sólo hace falta conocer la constante $M(0)$.

Para que un quark pueda existir en la capa de masa (aislado), en el espacio de Minkowski se debe cumplir que

$$M^2(p_p) = p_p^2 \quad (2.32)$$

(es cuando el propagador del quark tiene polos), para valores reales p_p del cuadrimomento. Parándonos en el sistema de la partícula ($\vec{p} = 0$) y usando la ec. (2.31), en dicho espacio queda

$$m_c + [M(0) - m_c] f^2(p_0) = p_0. \quad (2.33)$$

Dependiendo del factor de forma $f(p)$ que se use, habrá un valor crítico del parámetro $M(0)$ a partir del cual no existan soluciones reales de esta ecuación. O sea, el propagador del quark no tendrá polos reales. Como esto implica la imposibilidad de tener quarks en la capa de masa, es posible interpretar esto como una situación de confinamiento. Para determinar dicho valor, notemos que se deben cumplir dos condiciones en ese punto: las dos curvas definidas por los miembros derecho e izquierdo de (2.32) se deben cruzar (esto es la ec. (2.33)) y tener la misma pendiente. Entonces, la condición que falta es:

$$1 = 2 [M(0) - m_c] f(p_0) \frac{df}{dp_0}. \quad (2.34)$$

Las ecuaciones (2.33) y (2.34) definen el $M(0)$ crítico.

Como factor de forma podemos considerar una función gaussiana del cuadrimomento euclídeo, dado que tal función cumple con los requerimientos básicos de ser invariante de Lorentz y decaer suficientemente rápido para los momentos altos (de manera que mantiene a las integrales acotadas). Además, en el espacio coordinado también es una función que decae rápidamente con la distancia (implica confinamiento). Por lo tanto, en este trabajo usaremos

$$f(p) = \exp\left(-\frac{p^2}{2\Lambda^2}\right), \quad (2.35)$$

donde Λ es un cut-off natural al modelo que describe el rango de no localidad.

En este caso, la ec. (2.33) queda, pasando $f(p)$ al espacio de Minkowski ($p_0 \rightarrow ip_0$),

$$p_0 = m_c + [M(0) - m_c] \exp\left(\frac{p_0^2}{\Lambda^2}\right). \quad (2.36)$$

Esta ecuación se representa gráficamente en la figura 4. En ella vemos que, modificando el valor del parámetro $M(0)$ hacemos que la exponencial suba o baje, intersectando o no a la recta a 45°. De esta manera, (2.33) tendrá dos soluciones reales ($\Rightarrow \exists$ quarks en la capa de masa), una solución real (\Rightarrow caso crítico; es solución simultánea de las ecs. (2.33) y (2.34)) o no tendrá soluciones reales ($\Rightarrow \nexists$ quarks en la capa de masa). En este último caso, habrá dos soluciones complejas, correspondientes al caso de un par de polos complejos en el propagador del quark.

Y esto, a su vez, corresponde a quarks aislados con una vida media finita. Esto es similar a lo que ocurre en otros modelos de confinamiento [10], [11].

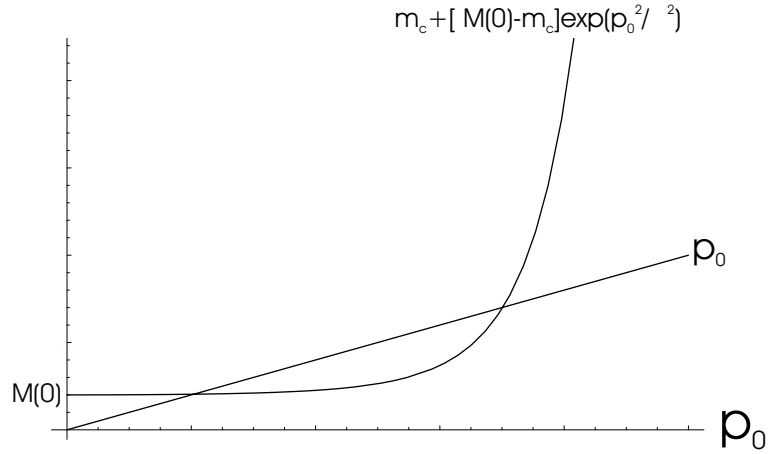


FIGURA 4: Solución gráfica de la ec. (2.36). La intersección de las curvas representa la existencia de quarks en la capa de masa.

De esta manera vemos que, efectivamente, una interacción del tipo propuesto puede solucionar el problema de la existencia de quarks en la capa de masa (lo que interpretamos como el problema del confinamiento), así como también el de las divergencias, con sólo modificar los valores de los parámetros propios del modelo, G , m_c y Λ .

La justificación final del factor de forma usado (y de un modelo en general) viene dada por su poder explicativo y predictivo de la realidad. Éste parece ser el caso del factor de forma gaussiano ya que, a partir de él, puede obtenerse una fenomenología de mesones en buen acuerdo con lo observado empíricamente [12], [13].

3. INTERACCIONES NO LOCALES A TEMPERATURA Y POTENCIAL QUÍMICO FINITOS

Nuestro objetivo es estudiar la transición de fases quiral de un sistema de quarks en función de la temperatura y del potencial químico. Debemos, entonces, introducir estos parámetros en nuestras ecuaciones, en particular, en la ecuación del gap. Esto lo vamos a hacer, luego de reescribir dicha ecuación en otra forma más conveniente, a través del formalismo del tiempo imaginario.

Retomemos la ec. del gap para interacciones no locales y separables, ec. (2.29):

$$M(p) = m_c + 4N_c N_f G f^2(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k) f^2(k)}{k^2 + M^2(k)}. \quad (3.1)$$

Despejando la ec. (2.31):

$$M(p) - m_c = [M_0 - m_c] f^2(p), \quad (3.2)$$

donde estamos llamando $M(0) = M_0$, y reemplazando en la ec. del gap (3.1), obtenemos

$$\frac{4\pi^2}{N_c N_f G} = I(M_0, m_c), \quad (3.3)$$

donde

$$I(M_0, m_c) = \frac{16\pi^2}{M_0 - m_c} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k) f^2(k)}{k^2 + M^2(k)}. \quad (3.4)$$

Siguiendo el formalismo del tiempo imaginario, introducimos la temperatura T y el potencial químico μ mediante la sustitución

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g(k) &= \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} g(k_0; \vec{k}) \\ &\longrightarrow T \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} g(w_j + i\mu; \vec{k}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$w_j = (2j + 1) \pi T. \quad (3.6)$$

Las w_j son las frecuencias de Matsubara, a las que se les suma un término que incluye al potencial químico. Debemos aclarar que, al introducir T y μ de esta manera, estamos asumiendo que los parámetros del modelo no dependen explícitamente de la temperatura ni del potencial químico, tal como ocurre, por ejemplo, en el modelo de instantones [14], [15], [16]. Definamos $r \equiv \left| \vec{k} \right|$ de manera tal que $k^2 = k_0^2 + r^2$ y $w^2 = (w_j + i\mu)^2 + r^2$. Entonces, haciendo el reemplazo anterior en la ec. (3.4), recordando que $f = f(k^2)$ y, por lo tanto, también es $M = M(k^2)$, y haciendo la integral angular, llegamos a

$$I(M_0, m_c, T, \mu) = \frac{16\pi^2 T}{M_0 - m_c} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{M(w^2)}{w^2 + M^2(w^2)} f^2(w^2). \quad (3.7)$$

Observamos que al recorrer j todos los números enteros, $2j + 1$ (que es lo que aparece en f) toma todos los valores impares positivos y negativos. Usando este hecho, podemos reescribir la sumatoria de la expresión anterior como otra que vaya de 0 a ∞ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g \left[((2j + 1) \pi T + i\mu)^2 \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} g \left[((2j + 1) \pi T + i\mu)^2 \right] + C.C. \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} g \left[((2j + 1) \pi T + i\mu)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Entonces,

$$I(M_0, m_c, T, \mu) = \frac{16T}{M_0 - m_c} \sum_{j=0}^{\infty} \int dr r^2 \operatorname{Re} \left[\frac{M(w^2)}{w^2 + M^2(w^2)} f^2(w^2) \right]. \quad (3.9)$$

Una aplicación sencilla y conocida en la literatura del formalismo recién visto es el modelo NJL ($f = 1$) en el límite quiral ($m_c = 0$). Para su desarrollo ver el apéndice I.

3.1. Temperatura y potencial químico nulos

Antes de plantear el caso general, resolvamos uno más simple que nos va a ser útil más adelante: el caso a temperatura y potencial químico cero. Para ello,

volvamos a la ecuación del gap:

$$\frac{4\pi^2}{N_c N_f G} = I(M_0, m_c), \quad (3.10)$$

con

$$I(M_0, m_c) = \frac{16\pi^2}{M_0 - m_c} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2) f^2(k)}{k^2 + M^2(k^2)}. \quad (3.11)$$

Usando que $d^4k = d\Omega k^3 dk$ ($d\Omega = \sin^2(\theta_1) \sin(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 d\phi$), y $0 \leq \theta_1 \leq \pi$; $0 \leq \theta_2 \leq \pi$; $0 \leq \phi \leq 2\pi$) y que $\int d\Omega = 2\pi^2$, la ec. (3.11) queda

$$I(M_0, m_c) = \frac{2}{M_0 - m_c} \int_0^\infty dk k^3 \frac{M(k^2) f^2(k)}{k^2 + M^2(k^2)}. \quad (3.12)$$

Esta expresión puede ser integrada numéricamente (al menos con el factor de forma gaussiano usado en este estudio), ya que converge a un valor finito. Esto nos va a ser útil en la próxima sección, cuando calculemos $I(M_0, m_c, T, \mu)$, es decir, cuando agreguemos temperatura y potencial químico.

Ahora, tratemos de llegar a otra expresión de $I(M_0, m_c)$ que, también, nos va a ser útil más adelante. Retomemos la ec. (3.11), separando las coordenadas espaciales de la temporal, e integrando la parte angular; obtenemos

$$I(M_0, m_c) = \frac{1}{M_0 - m_c} \frac{4}{\pi} \int dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dk_0 \frac{M(k^2) f^2(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)}. \quad (3.13)$$

Para resolver la integral en la variable k_0 podemos aplicar el teorema de los residuos al semiplano complejo superior del espacio de dicha variable; para eso es necesario, primero, calcular los polos del integrando, o sea, los k_p que cumplan

$$k_p^2 + [m_c + (M_0 - m_c) f^2(k_p^2)]^2 = 0, \quad (3.14)$$

con

$$k_p^2 = k_{0p}^2 + r^2. \quad (3.15)$$

El cálculo de los polos se detalla en el apéndice III. Siguiendo los pasos allí desarrollados se llega a que, en el espacio k , los polos aparecen en multipletes de a cuatro, con sus correspondientes en el espacio k_0 , como se muestra en la tabla 2. En ella asumimos que $R_p, I_p \geq 0$ y hemos definido

$$\tilde{E}_p = \sqrt{\frac{E_p^2 - R_p^2 + \sqrt{[(I_p^2 + k^2) - R_p^2]^2 + 4(R_p I_p)^2}}{2}}, \quad (3.16)$$

$$E_p^2 = I_p^2 + r^2. \quad (3.17)$$

k	\longrightarrow	k_0
$(R_p; I_p)$		$\left(\frac{R_p I_p}{E_p}; \tilde{E}_p\right)$
$(R_p; -I_p)$		$\left(\frac{R_p I_p}{E_p}; -\tilde{E}_p\right)$
$(-R_p; I_p)$		$\left(-\frac{R_p I_p}{E_p}; \tilde{E}_p\right)$
$(-R_p; -I_p)$		$\left(-\frac{R_p I_p}{E_p}; -\tilde{E}_p\right)$

TABLA 2: Polos del integrando de la ec. (3.13), expresados en los espacios k y k_0 .

Ahora, podemos calcular los residuos.

$$res \left\{ \frac{M(k^2) f^2(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)}; en k_0 = k_{0p} \right\} = \lim_{k_0 \rightarrow k_{0p}} \frac{M(k^2) f^2(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} (k_0 - k_{0p}). \quad (3.18)$$

Desarrollando esto se llega a

$$res(\dots) = \frac{1}{2} \frac{1}{k_{0p}} \frac{M(k_p^2) f^2(k_p^2)}{\left\{ 1 + 4(M_0 - m_c) f(k_p^2) \left[\frac{df(k^2)}{dk^2} \right]_{r=r_p} M(k_p^2) \right\}}. \quad (3.19)$$

Ahora, notemos que en el semiplano superior de k_0 los polos aparecen en multipletes de una componente si $R_p = 0$, o de dos si $R_p \neq 0$. Consideremos cada caso en forma separada.

Caso A - $R_p = 0$:

En este caso, $k_{0p} = i\tilde{E}_p = i\sqrt{(I_p^2 + r^2)} \rightarrow k_p = iI_p$. Reemplazando esto en (3.19),

$$res(\dots) = \frac{1}{2} \frac{1}{i\tilde{E}_p} \frac{M(k_p^2) f^2(k_p^2)}{\left\{ 1 + 4(M_0 - m_c) f(k_p^2) \left[\frac{df(k^2)}{dk^2} \right]_{k^2=k_p^2} M(k_p^2) \right\}}. \quad (3.20)$$

Caso B - $R_p \neq 0$:

Ahora tenemos: $k_{01} = \frac{R_p I_p}{E_p} + i\tilde{E}_p \rightarrow k_1 = R_p + iI_p$; $k_{02} = -\frac{R_p I_p}{E_p} + i\tilde{E}_p = -k_{01}^* \rightarrow k_2 = -R_p + iI_p = -k_1^*$. Si asumimos que f es una función real (M_0 y m_c lo son) entonces $F(k^{2*}) = F^*(k^2)$, donde

$$F(k_p^2) = \frac{M(k_p^2) f^2(k_p^2)}{\left\{ 1 + 4(M_0 - m_c) f(k_p^2) \left[\frac{df(k^2)}{dk^2} \right]_{k^2=k_p^2} M(k_p^2) \right\}}. \quad (3.21)$$

Entonces, sumando los residuos para los dos polos de este caso,

$$\begin{aligned} & \sum_{p_1 p_2} res(\dots) \\ &= -\frac{1}{i} \operatorname{Re} \left[\frac{M(k_1^2) f^2(k_1^2)}{e \left\{ 1 + 4(M_0 - m_c) f(k_1^2) \left[\frac{df(k^2)}{dk^2} \right]_{k^2=k_1^2} M(k_1^2) \right\}} \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde definimos

$$e = - \left(\tilde{E}_p - i \frac{R_p I_p}{\tilde{E}_p} \right) \quad (3.23)$$

y usamos que \tilde{E}_p es real.

Caso general:

Si ahora comparamos las expresiones finales de los residuos para los casos $R_p = 0$ y $R_p \neq 0$, (3.20) y (3.22) respectivamente, podemos ver que se pueden escribir en la forma general:

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{multiplete}} res(\dots) = -\frac{1}{i} \frac{1 + \Theta(R_p \neq 0)}{2} \\ & \times \operatorname{Re} \left[\frac{M(k_p^2) f^2(k_p^2)}{\left\{ 1 + 4(M_0 - m_c) f(k_p^2) \left[\frac{df(k^2)}{dk^2} \right]_{k^2=k_p^2} M(k_p^2) \right\} e} \frac{1}{e} \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\sum_{\text{multiplete}}$ significa evaluar la sumatoria sobre los miembros de un dado multiplete.

Habiendo obtenido esta forma genérica de los residuos, volvamos atrás, a la ec. (3.13):

$$\begin{aligned} I(M_0, m_c) &= \frac{1}{M_0 - m_c} \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dr r^2 2\pi i \sum_{\substack{\text{polos} \\ (\text{multipl.} \neq)}} res(\dots) \quad (3.25) \\ &= -\frac{4}{M_0 - m_c} \sum_{\substack{\text{polos} \\ (\text{multipl.} \neq)}} \int_0^\infty dr [1 + \Theta(R_p \neq 0)] \end{aligned}$$

$$\times \text{Re} \left\{ \frac{M(k_p^2) f^2(k_p^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(k_p^2) \left[\frac{df(k^2)}{dk^2} \right]_{k^2=k_p^2}} M(k_p^2) \right\} r^2 \frac{1}{e}, \quad (3.26)$$

donde ahora $\sum_{\text{polos(multipl. } \neq)}$ significa hacer la sumatoria sobre los miembros de un multiplete y sobre todos los multipletes.

Es fácil verificar que $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{1}{e} = -r$. Entonces, un tratamiento no muy riguroso de las integrales en la ec. (3.26) indicaría que esta expresión diverge. Por lo tanto, este tipo de expresiones debe ser tratada con cierto cuidado. En la sección siguiente veremos, sin embargo, como la ec. (3.26) es de utilidad, precisamente, para obtener expresiones convergentes en el caso de temperatura y potencial químico distintos de cero.

3.2. Temperatura y potencial químico finitos

Queremos resolver la ec. del gap para el caso más general posible, es decir, con masa desnuda, temperatura y potencial químico distintos de cero. Retomemos dicha ecuación básica del sistema, (3.3) y (3.7), con algunas pequeñas modificaciones en la notación:

$$\frac{4\pi^2}{N_c N_f G} = I(M_0, m_c, T, \mu), \quad (3.27)$$

$$I(M_0, m_c, T, \mu) = \frac{8}{M_0 - m_c} \int_0^1 dr r^2 \tilde{I}(M_0, m_c, T, \mu), \quad (3.28)$$

$$\tilde{I}(M_0, m_c, T, \mu) = T \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{M(w^2) f^2(w^2)}{w^2 + M^2(w^2)}, \quad (3.29)$$

donde

$$w^2 = (w_j + i\mu)^2 + r^2, \quad (3.30)$$

$$w_j = (2j + 1) \pi T. \quad (3.31)$$

Para poder calcular la sumatoria en (3.29), debemos aplicar la fórmula (desarrollada en el apéndice II)

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(iw_n) = \sum \text{res} \left[\tilde{F}(w) f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w) \right], \quad (3.32)$$

donde la función $\tilde{F}(w)$ es una función que debemos definir de manera tal que, evaluada en iw_j , sea la función sobre la cual vamos a hacer la sumatoria. También

aparece la función de Fermi, definida por

$$f(w) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{w}{T}\right)}, \quad (3.33)$$

que tiene polos sólo a lo largo del eje imaginario, dados por $w_n = i(2n + 1)\pi T$, con $n = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$

Pero, primero, necesitamos reescribir $\tilde{I}(M_0, m_c, T, \mu)$. Para ello introducimos

$$u \equiv iw, \quad (3.34)$$

$$u^2 = -w^2 = (iw_j - \mu)^2 - r^2, \quad (3.35)$$

quedando

$$\tilde{I}(M_0, m_c, T, \mu) = T \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{M(-u^2) f^2(-u^2)}{-u^2 + M^2(-u^2)} \equiv T \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(u) \quad (3.36)$$

$$= T \sum_{j=-\infty}^{\infty} F\left[\sqrt{(iw_j - \mu)^2 - r^2}\right] \equiv T \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(iw_j), \quad (3.37)$$

De esta manera vemos que $\tilde{F}(iw_j) = F(w_j)$, y ahora sí podemos aplicar la fórmula (3.32):

$$\tilde{I}(M_0, m_c, T, \mu) = \sum \text{res} \left\{ \tilde{F}(y) \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y}{T}\right)}; \text{en } y = y_p \right\} \quad (3.38)$$

$$= \sum \text{res} \left\{ F\left(\sqrt{(y - \mu)^2 - r^2}\right) \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y}{T}\right)}; \text{en } y = y_p \right\}, \quad (3.39)$$

donde y_p son los polos de $F\left(\sqrt{(y - \mu)^2 - r^2}\right)$.

Para usar la expresión (3.39) debemos conocer los polos de $\tilde{F}(y)$. Es decir, los $iw_j \equiv y$ tales que

$$w^2 + [m_c + (M_0 - m_c) f^2(w^2)]^2 = 0, \quad (3.40)$$

con

$$w^2 = (w_j + i\mu)^2 + r^2. \quad (3.41)$$

El cálculo de los polos de (3.40) está detallado en el apéndice III. Usando los resultados allí obtenidos, los polos expresados en los distintos planos complejos

son los mostrados en la tabla 3, donde hemos asumido R_p e I_p positivos y hemos usado las definiciones (3.16) y (3.17).

w	\longrightarrow	w_j	\longrightarrow	y
$(R_p; I_p)$		$\left(\frac{R_p I_p}{E_p}; \tilde{E}_p - \mu\right)$		$\left(-\tilde{E}_p + \mu; \frac{R_p I_p}{E_p}\right)$
$(R_p; -I_p)$		$\left(\frac{R_p I_p}{E_p}; -\tilde{E}_p - \mu\right)$		$\left(\tilde{E}_p + \mu; \frac{R_p I_p}{E_p}\right)$
$(-R_p; I_p)$		$\left(-\frac{R_p I_p}{E_p}; \tilde{E}_p - \mu\right)$		$\left(-\tilde{E}_p + \mu; -\frac{R_p I_p}{E_p}\right)$
$(-R_p; -I_p)$		$\left(-\frac{R_p I_p}{E_p}; -\tilde{E}_p - \mu\right)$		$\left(\tilde{E}_p + \mu; -\frac{R_p I_p}{E_p}\right)$

TABLA 3: Polos de la función auxiliar \tilde{F} , expresados en los espacios w , w_j e y .

3.2.1. Residuos en la ec. (3.39)

Conocidos los polos de $\tilde{F}(w)$, pasemos a calcular los residuos en la ec. (3.39), en términos de R_p e I_p :

$$\begin{aligned}
& \text{res} \left\{ \frac{M(w^2) f^2(w^2)}{w^2 + M^2(w^2)} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y}{T}\right)}; \text{en } y = y_p \right\} \\
&= \frac{M(w_p^2) f^2(w_p^2)}{1 + \exp\left(\frac{y_p}{T}\right)} \lim_{y \rightarrow y_p} \frac{y - y_p}{w^2 + M^2(w^2)}, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

donde

$$w^2 = (iy - i\mu)^2 + r^2. \tag{3.43}$$

Aplicando L'Hopital para calcular el límite, se llega a que

$$\begin{aligned}
\text{res}(\dots) &= \frac{M(w_p^2) f^2(w_p^2)}{-2(y_p - \mu) \left\{ 1 + 4(M_0 - m_c) f(w_p^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w=w_p} M(w_p^2) \right\}} \\
&\quad \times \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_p}{T}\right)}. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Entonces, (3.39) queda

$$\tilde{I}(M_0, m_c, T, \mu) = -\frac{1}{2} \sum_{\text{polos}} \frac{M(w_p^2) f^2(w_p^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(w_p^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w=w_p} M(w_p^2)}$$

$$\times \frac{1}{y_p - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_p}{T}\right)}. \quad (3.45)$$

Como ya vimos, los polos de $F(w)$ aparecen en multipletes:

Si $R_p = 0 \Rightarrow w_1 = iI_p ; w_2 = -iI_p$.

Si $R_p \neq 0 \Rightarrow w_1 = R_p + iI_p ; w_2 = R_p - iI_p ; w_3 = -R_p + iI_p ; w_4 = -R_p - iI_p$.

Analicemos, ahora, las contribuciones de los miembros de un dado multiplete:

Caso A - $R_p = 0$:

Contando a cada multiplete en forma separada,

$$\begin{aligned} \tilde{I}^A(M_0, m_c, T, \mu) = & -\frac{1}{2} \left[G(w_1^2) \frac{1}{y_1 - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_1}{T}\right)} \right. \\ & \left. + G(w_2^2) \frac{1}{y_2 - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_2}{T}\right)} \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde

$$G(w_p^2) = \frac{M(w_p^2) f^2(w_p^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(w_p^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w=w_p} M(w_p^2)}, \quad (3.47)$$

$$w_1 = iI_p ; w_2 = -iI_p ; \quad (3.48)$$

$$y_1 = -E_p + \mu ; y_2 = E_p + \mu ; \quad (3.49)$$

$$E_p = \tilde{E}_p \text{ cuando } R_p = 0. \quad (3.50)$$

Notando que $w_1^2 = w_2^2 = -I_p^2$,

$$\begin{aligned} \tilde{I}^A(M_0, m_c, T, \mu) = & -\frac{1}{2} \frac{M(-I_p^2) f^2(-I_p^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(-I_p^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w^2=-I_p^2} M(-I_p^2)} \\ & \times \frac{1}{E_p} \left[\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_p + \mu}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-E_p + \mu}{T}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Caso B - $R_p \neq 0$:

En este caso, otra vez tomando en cuenta a cada multiplete en forma separada,

$$\begin{aligned} \tilde{I}^B(M_0, m_c, T, \mu) = & -\frac{1}{2} \left[G(w_1^2) \frac{1}{y_1 - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_1}{T}\right)} + G(w_2^2) \frac{1}{y_2 - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_2}{T}\right)} \right. \\ & \left. + G(w_3^2) \frac{1}{y_3 - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_3}{T}\right)} + G(w_4^2) \frac{1}{y_4 - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_4}{T}\right)} \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde

$$\begin{aligned} w_1 &= R_p + iI_p ; w_2 = R_p - iI_p ; \\ w_3 &= -R_p + iI_p ; w_4 = -R_p - iI_p ; \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$y_1 = \left(-\tilde{E}_p + \mu \right) + i \left(\frac{R_p I_p}{\tilde{E}_p} \right) ; y_2 = \left(\tilde{E}_p + \mu \right) + i \left(\frac{R_p I_p}{\tilde{E}_p} \right) ; \quad (3.54)$$

$$y_3 = \left(-\tilde{E}_p + \mu \right) + i \left(-\frac{R_p I_p}{\tilde{E}_p} \right) ; y_4 = \left(\tilde{E}_p + \mu \right) + i \left(-\frac{R_p I_p}{\tilde{E}_p} \right). \quad (3.55)$$

Notemos que $w_1^2 = w_4^2$; $w_2^2 = w_3^2 = w_1^{2*}$ e $y_1 - \mu = -(y_4 - \mu)$; $y_2 - \mu = -(y_3 - \mu) = -(y_1^* - \mu)$. Entonces, asumiendo que G es una función real de $w^2 \rightarrow G(w^{*2}) = G^*(w^2)$ (todo lo imaginario de G está incluido en w),

$$\begin{aligned} \tilde{I}^B(M_0, m_c, T, \mu) = & -\frac{1}{2} \left[G(w_1^2) \frac{1}{y_1 - \mu} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_1}{T}\right)} + G(w_1^{2*}) \frac{-1}{(y_1 - \mu)^*} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-y_1^* + 2\mu}{T}\right)} \right. \\ & \left. + G(w_1^{2*}) \frac{1}{(y_1 - \mu)^*} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_1^*}{T}\right)} + G(w_1^2) \frac{-1}{(y_1 - \mu)} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-y_1 + 2\mu}{T}\right)} \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{1}{2} G(w_1^2) \frac{1}{y_1 - \mu} \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_1}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-y_1 + 2\mu}{T}\right)} \right) \\ & -\frac{1}{2} G^*(w_1^2) \frac{1}{(y_1 - \mu)^*} \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_1^*}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-y_1^* + 2\mu}{T}\right)} \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Como los términos de la ecuación anterior son conjugados entre sí,

$$\tilde{I}^B(M_0, m_c, T, \mu) =$$

$$2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} G(w_1^2) \frac{1}{y_1 - \mu} \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y_1}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-y_1 + 2\mu}{T}\right)} \right) \right]. \quad (3.58)$$

Si ahora definimos

$$e = -\tilde{E}_p + i \frac{R_p I_p}{\tilde{E}_p}, \quad (3.59)$$

entonces $y_1 = e + \mu$, por lo que

$$\begin{aligned} \tilde{I}^B(M_0, m_c, T, \mu) = \operatorname{Re} & \left[-\frac{M(w_1^2) f^2(w_1^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(w_1^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w^2=w_1^2} M(w_1^2)} \right. \\ & \left. \times \frac{1}{e} \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{e+\mu}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-e+\mu}{T}\right)} \right) \right], \quad (3.60) \end{aligned}$$

donde hemos reemplazado la función G .

Caso general:

Comparando las expresiones finales para los casos $R_p = 0$ y $R_p \neq 0$ (ecuaciones (3.51) y (3.60), respectivamente), se puede ver que se las puede escribir en una única expresión general:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(M_0, m_c, T, \mu) = & -\frac{1 + \Theta(R_p \neq 0)}{2} \\ & \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{M(w_1^2) f^2(w_1^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(w_1^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w^2=w_1^2} M(w_1^2)} \frac{(n_+ - n_-)}{e} \right\}, \quad (3.61) \end{aligned}$$

donde

$$\Theta(R_p \neq 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_p \neq 0 \\ 0 & \text{si } R_p = 0 \end{cases}, \quad (3.62)$$

$$n_{\pm} \equiv \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\pm e + \mu}{T}\right)}. \quad (3.63)$$

Y, finalmente, volviendo atrás a las expresiones (3.27)-(3.29),

$$\frac{4\pi^2}{N_c N_f G} = I(M_0, m_c, T, \mu), \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned}
I(M_0, m_c, T, \mu) &= \frac{8}{M_0 - m_c} \sum_{\substack{\text{polos} \\ (\text{multipl. } \neq)}} -\frac{1 + \Theta(R_p \neq 0)}{2} \\
&\times \text{Re} \left\{ \frac{M(w_p^2) f^2(w_p^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(w_p^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w^2=w_p^2} M(w_p^2)} \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{e} (n_+ - n_-) \right\}. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento usual, es conveniente aislar la contribución de temperatura y potencial químico finitos, ya que de esa manera se evitan posibles divergencias. Entonces, sumando y restando $I(M_0, m_c)$, calculado en la forma (3.26), obtenemos

$$\begin{aligned}
I(M_0, m_c, T, \mu) &= I(M_0, m_c, 0, 0) - \frac{4}{M_0 - m_c} \sum_{\substack{\text{polos} \\ (\text{multipl. } \neq)}} [1 + \Theta(R_p \neq 0)] \\
&\times \text{Re} \left\{ \frac{M(w_p^2) f^2(w_p^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(w_p^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w^2=w_p^2} M(w_p^2)} \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{e} (-1 + n_+ - n_-) \right\}. \tag{3.66}
\end{aligned}$$

Es importante destacar que, ahora, el integrando en la ec. (3.66) va suficientemente rápido a cero para $r \rightarrow \infty$, de manera que las integrales permanecen finitas, por lo que no aparecen los problemas mencionados al final de la sección anterior.

3.3. Condensado y densidad de quarks

Hay otras dos magnitudes físicas que resultan de interés, ya que ellas nos ayudan a entender las características de la transición de fases quiral que se produce en el sistema. Dichas cantidades son el condensado de quarks, $\langle \bar{q}q \rangle$, y la densidad de quarks, $\langle q^\dagger q \rangle$.

3.3.1. Condensado de quarks

Como vimos en la subsección 2.2.1, el condensado en el espacio de Minkowski, a temperatura y potencial químico nulos, viene dado por

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -i \operatorname{tr} \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M(k)}{k^2 - M^2(k)} \right]. \quad (3.67)$$

Yendo al espacio euclídeo ($k_0 \rightarrow ik_0$),

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -\operatorname{tr} \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \right]. \quad (3.68)$$

Para interacciones separables $M(k) = m_c + [M(0) - m_c] f^2(k)$, por lo que la relación anterior se transforma en

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -4N_c \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_c + (M_0 - m_c) f^2(k)}{k_0^2 + r^2 + [m_c + (M_0 - m_c) f^2(k)]^2} \right\}. \quad (3.69)$$

(Recordemos que estamos tomando $N_f = 2$). Para pasar al caso con temperatura y potencial químico finitos, debemos seguir el mismo formalismo usado al calcular la ecuación del gap. Siguiendo dichos pasos y, nuevamente, sumando y restando el caso $T = \mu = 0$ para eliminar divergencias, se llega a

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle &= \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle^{T=\mu=0} + \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{\substack{\text{polos} \\ (\text{multipl. } \neq)}} [1 + \Theta(R_p \neq 0)] \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{M(w_p^2)}{1 + 4(M_0 - m_c) f(w_p^2) \left[\frac{df(w^2)}{d(w^2)} \right]_{w^2=w_p^2} M(w_p^2)} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{e} (1 + n_+ - n_-) \right], \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle^{T=\mu=0}$ está, a su vez, regularizado mediante la substracción de $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle^{T=\mu=0}$ para el caso libre, es decir, cuando el factor de forma es cero:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle^{T=\mu=0} &\equiv \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle^{T=\mu=0} - \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_{\text{libre}}^{T=\mu=0} \\ &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \left\{ \int dk k^3 \frac{(M_0 - m_c) f^2(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \right. \\ &\quad \left. - m_c \int dk k^3 \frac{[2m_c + (M_0 - m_c) f^2(k^2)] (M_0 - m_c) f^2(k^2)}{[k^2 + M^2(k^2)] (k^2 + m_c^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.3.2. Densidad de quarks

La densidad de quarks se define como el valor de expectación del vacío de la componente temporal de la corriente conservada asociada a la simetría $U_V(1)$. En el caso local, dicha corriente viene dada por $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ ($\partial_\mu j^\mu = 0$). En nuestro caso, esta corriente no se conserva debido al término no local que aparece en el lagrangiano de interacción del sistema (2.28). Para llegar a la corriente conservada, es necesario redefinir j^μ de manera tal que su divergencia sea cero, es decir, que j^μ sea, efectivamente, una corriente conservada. Los detalles de este cálculo se encuentran en el Apéndice IV. La expresión final resulta ser

$$J^\mu = \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x) - i \int d^4x' d^4x'' \times \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} \delta(z-x) \bar{\Psi}(x'') M(x', x'') \Psi(x'), \quad (3.72)$$

donde $M(x', x'')$ es una interacción no local.

Para obtener la densidad de quarks, debemos calcular el valor de expectación del vacío de J^μ . Hagamos esto considerando cada contribución (local y no local) por separado.

Contribución local

La parte local de la corriente contribuye al valor de expectación con

$$\langle j_\mu^{(loc)} \rangle = \langle 0 | \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x) | 0 \rangle. \quad (3.73)$$

O, escribiendo los índices espinoriales,

$$\langle j_\mu^{(loc)} \rangle = \langle 0 | \bar{\Psi}^\alpha(x)\gamma_\mu^{\alpha\beta}\Psi^\beta(x) | 0 \rangle \quad (3.74)$$

$$= \langle 0 | \bar{\Psi}^\alpha(x)\Psi^\beta(x) | 0 \rangle \gamma_\mu^{\alpha\beta} \quad (3.75)$$

$$= \lim_{x' \rightarrow x} \langle 0 | \bar{\Psi}^\alpha(x')\Psi^\beta(x) | 0 \rangle \gamma_\mu^{\alpha\beta}, \quad (3.76)$$

donde en la última expresión hemos agregado un límite para que quede claro que el bracket no es más que $(-i)$ veces el propagador del quark $(-iS_{\alpha\beta}(x-x'))$. Entonces,

$$\langle j_\mu^{(loc)} \rangle = -i \lim_{x' \rightarrow x} S_{\alpha\beta}(x-x') \gamma_\mu^{\alpha\beta} \quad (3.77)$$

$$= -i \lim_{x' \rightarrow x} \text{tr} [S(x-x')\gamma_\mu] \quad (3.78)$$

o, transformando en Fourier,

$$\langle j_\mu^{(loc)} \rangle = -i \lim_{x' \rightarrow x} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x-x')] \text{tr}[S(p)\gamma_\mu]. \quad (3.79)$$

Y, evaluando el límite, llegamos a la expresión final para la contribución local,

$$\langle j_\mu^{(loc)} \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr}[S(p)\gamma_\mu]. \quad (3.80)$$

Contribución no local

En este caso la contribución al valor de expectación es

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^{(no-loc)} \rangle &= -i \int d^4 x' \int d^4 x'' \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} \delta(z-x) \\ &\times \langle 0 | \bar{\Psi}(x'') M(x', x'') \Psi(x') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Repitiendo los pasos hechos en la sección anterior, llegamos a

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^{(no-loc)} \rangle &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int d^4 x' \int d^4 x'' \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} \\ &\times \delta(z-x) \text{tr}[S(p)M(q)] \exp[-ip(x'-x'')] \exp[-iq(x''-x')]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Si ahora especificamos el camino $z(\lambda) = (1-\lambda)x' + \lambda x''$, entonces $\frac{dz^\mu}{d\lambda} = (x''-x')^\mu$.

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^{(no-loc)} \rangle &= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int d^4 x' \int d^4 x'' \int_0^1 d\lambda \\ &\times \delta[x'-x + \lambda(x''-x')] \text{tr}[S(p)M(q)] \exp[-ip(x'-x'')] \\ &\times \frac{\partial}{\partial q_\mu} \exp[-iq(x''-x')]. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Integrando por partes en q_μ y tomando $\alpha \neq \mu$ ($d^4 q = d^3 q_\alpha dq_\mu$),

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^{(no-loc)} \rangle &= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int d^4 x' \int d^4 x'' \int_0^1 d\lambda \delta[x'-x + \lambda(x''-x')] \\ &\times \exp[-ip(x'-x'')] \int \frac{d^3 q_\alpha}{(2\pi)^3} \left\{ | \text{Tr}[S(p)M(q)] \exp[-iq(x''-x')] |_{q_\mu=-\infty}^{+\infty} \right. \end{aligned}$$

$$- \int \frac{dq_\mu}{2\pi} \text{Tr} \left[S(p) \frac{\partial}{\partial q_\mu} M(q) \right] \exp[-iq(x'' - x')] \Big\}. \quad (3.84)$$

Tomemos el primer término de la expresión anterior (llamémoslo A) y definamos $u \equiv -\lambda(x'' - x')$; $d^4u = -\lambda^4 d^4x''$. Reemplazando queda

$$A = \left| i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4x'}{\lambda^4} \int_0^1 d\lambda \int \frac{d^3q_\alpha}{(2\pi)^3} \right. \\ \left. \times \exp \left[i(q-p) \frac{(x' - x)}{\lambda} \right] \text{Tr} [S(p) M(q)] \right|_{q_\mu=-\infty}^{+\infty}. \quad (3.85)$$

Sea, esta vez, $v \equiv \frac{(x' - x)}{\lambda}$; $d^4v = \frac{d^4x'}{\lambda^4}$. La ec. (3.85) queda

$$A = \left| i \int d^4p \int_0^1 d\lambda \int \frac{d^3q_\alpha}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4v}{(2\pi)^4} \right. \\ \left. \times \exp [i(q-p)v] \text{Tr} [S(p) M(q)] \right|_{q_\mu=-\infty}^{+\infty}. \quad (3.86)$$

Evaluando las integrales en λ y en v ,

$$A = \left| i \int d^4p \int \frac{d^3q_\alpha}{(2\pi)^3} \delta^4(p-q) \text{Tr} [S(p) M(q)] \right|_{q_\mu=-\infty}^{+\infty} \quad (3.87)$$

$$= \left| i \int \frac{d^3q_\alpha}{(2\pi)^3} \text{Tr} [S(q) M(q)] \right|_{q_\mu=-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (3.88)$$

Haciendo definiciones análogas para el caso del segundo término en (3.84) e integrando se llega a que

$$B = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[S(q) \frac{\partial}{\partial q_\mu} M(q) \right]. \quad (3.89)$$

Como $A = 0$, entonces la única contribución no local al valor de expectación del vacío de la corriente J_μ es la dada por B .

Finalmente, sumando las contribuciones (3.80) y (3.89) obtenemos el valor de expectación del vacío de J^μ ,

$$\langle J_\mu \rangle = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ S(p) \left[\gamma_\mu - \frac{\partial}{\partial p_\mu} M(p) \right] \right\}. \quad (3.90)$$

Densidad de quarks

Debemos, ahora, volver a lo que nos interesa, que es la componente temporal de la expresión anterior, es decir,

$$\langle J_0 \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ S(p) \left[\gamma_0 - \frac{\partial}{\partial p_0} M(p) \right] \right\}. \quad (3.91)$$

Usando para el propagador fermiónico

$$S(p) = \frac{\gamma_\mu p^\mu + M(p)}{p^2 - M^2(p)}, \quad (3.92)$$

consideremos la traza en $\langle J_0 \rangle$.

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ S(p) \left[\gamma_0 - \frac{\partial}{\partial p_0} M(p) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{p^2 - M^2(p)} \text{Tr} \left\{ [\gamma_\mu p^\mu + M(p)] \left[\gamma_0 - \frac{\partial}{\partial p_0} M(p) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Pero, desarrollando la llave, usando que la traza de un número impar de matrices gama es nulo y que $\gamma_k \gamma_0 = 0$ ($k = 1, 2, 3$), la expresión se reduce a

$$\text{Tr} \left\{ S(p) \left[\gamma_0 - \frac{\partial}{\partial p_0} M(p) \right] \right\} = 4N_c \left[p_0 - M(p) \frac{\partial}{\partial p_0} M(p) \right]. \quad (3.94)$$

Reemplazando esto en (3.91) y usando la ec. (2.31) para $M(p)$, queda

$$\langle J_0 \rangle = -i4N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k_0 \frac{1 - 4(M_0 - m_c) M(k^2) f(k) \frac{\partial}{\partial (k_0)^2} f(k)}{k_0^2 - [r^2 + M^2(k^2)]}. \quad (3.95)$$

Con esta expresión para la densidad de quarks podemos hacer la generalización al caso con temperatura y potencial químico finitos. Una vez más, recurrimos al formalismo ya usado para agregar estas variables al sistema. Siguiendo, entonces, los pasos correspondientes, se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle J_0 \rangle(T, \mu) &= \frac{N_c}{\pi^2} \int dr r^2 \\ &\times \sum_{\substack{\text{poles} \\ (\text{multipl.} \neq)}} [1 + \Theta(R_p \neq 0)] \text{Re}(n_+ - n_-). \end{aligned} \quad (3.96)$$

4. MODELO GAUSSIANO Y RESULTADOS NUMÉRICOS

Habiendo introducido el formalismo necesario para extender el modelo NJL a interacciones no locales y separables, y a temperatura y potencial químico finitos, pasamos, entonces, a nuestros cálculos numéricos. Para ello, primero debemos elegir un factor de forma que será quien determine la interacción no local, ec. (2.28). También debemos elegir un conjunto de valores para los parámetros del modelo: cte. de acoplamiento G , masa desnuda de los quarks m_c , y rango (de no localidad) Λ . Una vez hecho esto, las ecuaciones quedan en su forma final para ser resueltas numéricamente.

Como ya dijimos, en este trabajo usamos como factor de forma de la interacción, uno de tipo gaussiano,

$$f(p^2) = \exp\left(-\frac{p^2}{2\Lambda^2}\right), \quad (4.1)$$

y consideramos dos sets de valores para los parámetros, los que se detallan en la tabla 4. Para determinarlos se fijan dos de ellos usando los valores experimentales de la masa del pión (140 MeV) y su cte. de decaimiento (93 MeV). Al parámetro restante se lo elige para que dé valores razonables para el condensado de quarks; para el set I se obtiene, en el caso quiral, a $T = \mu = 0$, $(-200\text{MeV})^3$, mientras que para el set II el resultado es $(-220\text{MeV})^3$. Estos valores están en razonable acuerdo con los obtenidos mediante cálculos de QCD en la red [2].

	$G[\text{GeV}^{-2}]$	$m_c[\text{MeV}]$	$\Lambda[\text{MeV}]$
SET I	50	10,5	627
SET II	30	7,7	760

TABLA 4: Sets de parámetros usados en los cálculos. El set I lleva a quarks confinados, mientras que el set II lleva a quarks libres.

Calculemos el valor crítico de la masa del quark para momento nulo, M_0^{crit} , para la interacción gaussiana. Para ello, debemos resolver las ecuaciones (2.33) y

(2.34), simultáneamente. Recordando lo visto en la subsección 2.3.1, dicho valor crítico nos determina la separación entre la región en que existe confinamiento de los quarks y aquella en la cual dichas partículas pueden existir en forma aislada. Las citadas ecuaciones no son más que la proposición matemática de que el propagador del quark (en el espacio de Minkowski) tenga soluciones reales o complejas, lo que se puede interpretar como la existencia de quarks en la capa de masa o confinados, respectivamente. Finalmente, el valor crítico es

$$M_0^{crit} = m_c + \frac{1}{2} \left(\sqrt{m_c^2 + 2\Lambda^2} - m_c \right) \exp \left[-\frac{\left(\sqrt{m_c^2 + 2\Lambda^2} + m_c \right)^2}{4\Lambda^2} \right]. \quad (4.2)$$

No es difícil ver que el set I corresponde al caso en que no hay polos puramente imaginarios del propagador del quark (en el espacio euclídeo), y el set II corresponde al caso en el que sí existen dos pares de ellos. Por ello, nos podemos referir al set I como el set confinante, y al II como el no confinante.

En las figuras 5 y 6 se representan las soluciones numéricas de las ecuaciones. En la primera se muestra el comportamiento de la masa del quark a momento nulo, M_0 , el condensado de quarks, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, y la densidad de quarks, $\rho = \langle \Psi^\dagger \Psi \rangle$, como funciones del potencial químico y para algunos valores de la temperatura. Para obtener estos resultados, se debieron evaluar sumatorias en los polos del propagador del quark (ecs. (3.66), (3.70) y (3.96)); en ellas sólo se incluyeron los primeros polos, previo chequeo de que la convergencia de la sumatoria para el rango de valores de temperatura y potencial químico aquí usados sea suficientemente rápida como para que, al contar sólo al primer polo, el resultado ya sea casi el 100 % del resultado total obtenido con algunos polos más.

Se observa en la figura 5 que, a $T = 0$, hay una transición de fases de primer orden para ambos sets de parámetros, caracterizada por una discontinuidad en la gráfica. A medida que la temperatura aumenta, el valor del potencial químico para el cual la transición se manifiesta, decrece. Finalmente, por encima de una cierta temperatura la transición de primer orden deja de existir y, en su lugar, se da una transición suave. Este hecho se aprecia claramente en el panel derecho de la figura 6, donde se muestra la temperatura crítica a la cual tiene lugar la transición de primer orden, como función del potencial químico. El punto donde dicha transición deja de existir suele llamarse "punto final". En el límite quiral, dicho punto se transforma en el llamado "punto tricrítico", que es el punto donde la transición de primer orden deja lugar a una de segundo orden. De hecho, esto es lo que pasa en el límite quiral de nuestro modelo, como se muestra en el panel izquierdo de la figura 6.

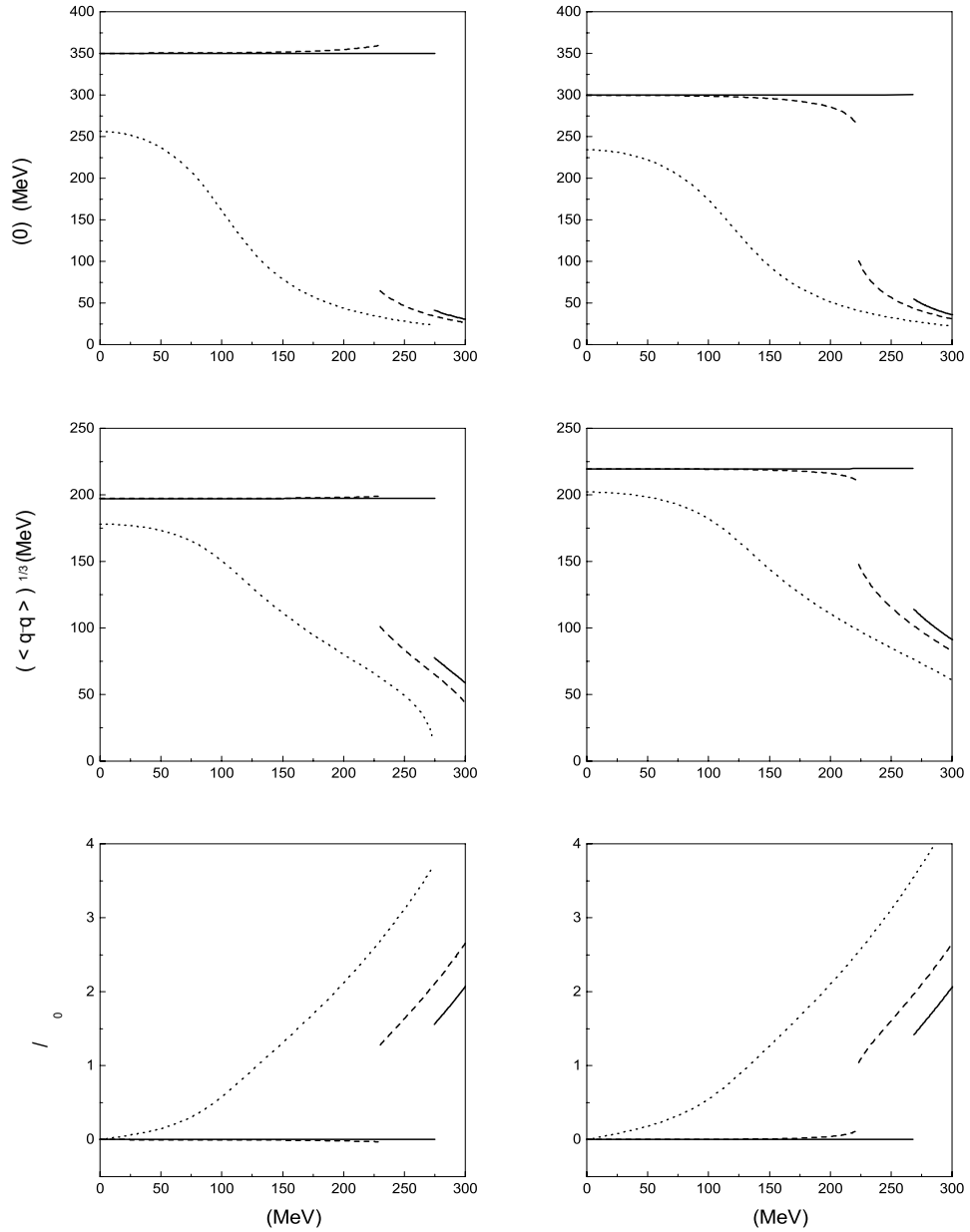


FIGURA 5: Masa dinámica, condensado quiral y densidad de quarks en función del potencial químico a tres temperaturas fijas, $T = 0$ (línea llena), $T = 50 \text{ MeV}$ (línea a rayas) y $T = 100 \text{ MeV}$ (línea de puntos).

El panel izquierdo muestra los resultados para el set I y el panel derecho para el set II. La densidad de quarks ρ está dada con respecto a la densidad de la materia nuclear $\rho_0 = 1,3 \times 10^6 \text{ MeV}^3$.

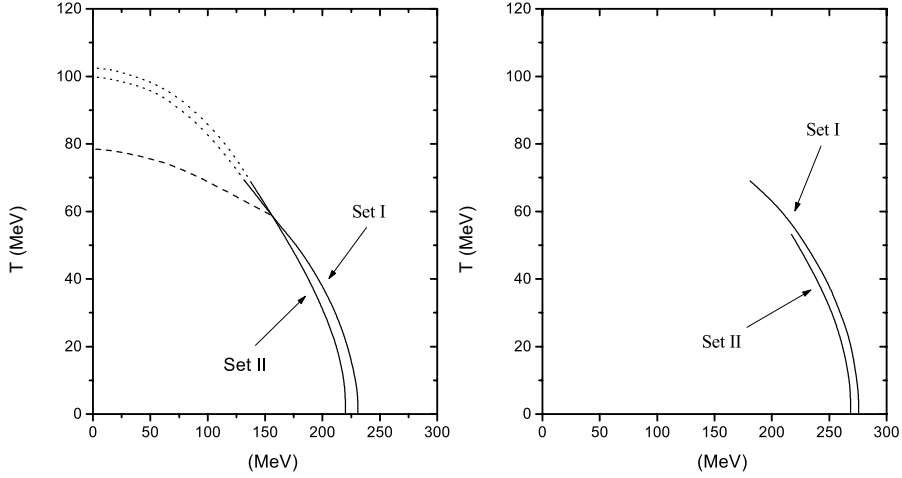


FIGURA 6: Temperaturas críticas en función del potencial químico. El panel izquierdo corresponde al límite quiral, mientras que el panel derecho corresponde al caso de quarks con masa finita. En el panel izquierdo, las líneas de puntos representan la transición de fases de segundo orden, y las líneas llenas (en ambos paneles) representan la transición de fases de primer orden. La línea a rayas en el panel izquierdo indica la línea crítica del deconfinamiento para el set I. Para potenciales químicos mayores a μ_P esta línea coincide con la de restauración quiral.

De acuerdo con nuestros resultados, el punto tricrítico, es decir en el caso quiral, se encuentra ubicado en $(T_P, \mu_P) = (70 \text{ MeV}, 130 \text{ MeV})$ para el set I y $(70 \text{ MeV}, 140 \text{ MeV})$ para el set II, mientras que el punto final, es decir en el caso no quiral, se halla en $(T_E, \mu_E) = (70 \text{ MeV}, 180 \text{ MeV})$ y $(55 \text{ MeV}, 210 \text{ MeV})$, respectivamente. Estos valores predichos son bastante similares para ambos sets de parámetros, y un poco menores que los valores encontrados en otros trabajos [17] y [18]. Asimismo, nuestro modelo predice una temperatura crítica a $\mu = 0$ de aproximadamente 100 MeV (para ambos sets), algo menor a los valores obtenidos en simulaciones de QCD en la red [2], las cuales sugieren $T_C \simeq 140 - 190 \text{ MeV}$. También es interesante notar que el modelo NJL en su versión local predice valores de la temperatura crítica algo mayores a los nuestros, $T_C \simeq 120 - 150 \text{ MeV}$. La razón para esta diferencia (entre NJL local y nuestro modelo) es la siguiente. El integrando de la expresión de $I(M_0, m_c, T, \mu)$, en la ec. del gap del modelo NJL involucra al factor $M / (r^2 + w_j^2 + M^2)$, mientras que la misma expresión en nuestro modelo contiene al factor $M f^4 / (r^2 + w_j^2 + M^2 f^4)$. La presencia del factor de forma f en la última expresión, causa la caída mucho más rápida del in-

tegrando con la temperatura, que entra en la expresión a través de las frecuencias de Matsubara w_j . Esto tiene como consecuencia el menor valor de la temperatura crítica en nuestro modelo, comparado con el caso local. Con respecto a este hecho, habría que tener en cuenta que no estamos permitiendo la dependencia de los parámetros del modelo con la temperatura y el potencial químico. Permitir dicha dependencia influiría al valor T_C causando, eventualmente, un incremento del mismo [19].

Discutamos, ahora, la situación relativa al set confinante. En este caso podemos observar, para cada temperatura, el valor del potencial químico para la cual el confinamiento se pierde, μ_d . Esto corresponde al punto para el cual la masa dinámica para momento nulo alcanza el valor crítico M_0^{crit} . Para el set I este valor es de 267 MeV. Para bajas temperaturas, μ_d coincide con el valor del potencial químico para el cual la transición de fases quiral se manifiesta. Sin embargo, para temperaturas suficientemente próximas al punto final, μ_d comienza a ser levemente menor que el valor de μ que corresponde a la restauración quiral. Para temperaturas mayores a la del punto final, T_E , es difícil hacer comparaciones porque, para masas finitas de los quarks, la restauración quiral se da a través de una transición suave. De todos modos, aún es posible estudiar el límite quiral. En este caso se ve que, en la región donde la transición es de segundo orden, el deconfinamiento siempre ocurre, a una T fija, a un valor de μ menor que el de la transición quiral. La línea crítica correspondiente está indicada en el panel izquierdo de la figura 6, con una línea a rayas. En cualquier caso, como vemos en la figura, la separación de la línea de restauración quiral con respecto a la de deconfinamiento no es, en general, demasiado grande. Esto indica que, en el presente modelo, ambas transiciones tienden a manifestarse, aproximadamente, en el mismo punto.

5. CONCLUSIONES

En esta tesis hemos investigado una extensión no local y covariante del modelo de Nambu y Jona-Lasinio, a temperatura y potencial químico finitos. Para ello, hemos asumido que el correspondiente vértice de interacción de cuatro puntos es separable en el espacio de momentos y que el regulador de dicha interacción conduce a un propagador del quark, en el espacio euclídeo, con un número arbitrario pero discreto de polos complejos. A lo largo del trabajo, hemos demostrado que la dependencia de todas las cantidades de interés en la temperatura y el potencial químico del sistema, se pueden expresar en términos de dichos polos y sus correspondientes residuos. También hemos estudiado en detalle el caso particular de un regulador gaussiano, considerando dos situaciones distintas. En el primero de los casos, el propagador del quark en el espacio euclídeo no tenía ningún polo puramente imaginario, lo que fue interpretado como una representación del confinamiento de los quarks. En el segundo caso, ese tipo de polos sí existía, lo que condujo a interpretar que los quarks no estaban confinados.

Hemos hallado que el comportamiento de las cantidades físicas estudiadas como función de la temperatura y el potencial químico es cualitativamente parecido. En particular, la transición quiral para valor chicos de la temperatura es siempre de primer orden y, para quarks con masa finita, la transición se torna suave al acercarse a un dado punto final. En el límite quiral, este punto final se transforma en un punto tricrítico. Nuestras predicciones para la posición de estos puntos son cercanas, aunque un poco menores, a las estimaciones previas de modelos alternativos.

Varias extensiones al modelo aquí desarrollado son posibles. Por ejemplo, sería interesante agregar interacciones en el canal quark-quark para estudiar la posibilidad de la llamada superconductividad de color, dentro de este modelo. Otra posibilidad interesante es la extensión del modelo al caso $SU(3)$, que permitiría entender el papel de la extrañeza en las características de la transición de fases quiral.

APÉNDICE I: MODELO NJL EN EL LÍMITE QUIRAL

Veamos un caso particular y sencillo del formalismo desarrollado en el capítulo 3: el modelo NJL ($f = 1$) en el límite quiral ($m_c = 0$). Para hacer esto, retomemos las ec. (3.3) y (3.9). Recordemos que en la última ecuación ya están incluidas la temperatura y el potencial químico del sistema.

Entonces, reemplazando el factor de forma y la masa desnuda, las ecuaciones quedan:

$$\frac{4\pi^2}{N_c N_f G} = I(M_0, m_c = 0, T, \mu) \quad (5.1)$$

$$I(M_0, m_c = 0, T, \mu) = 16T \int_0^1 dr r^2 \tilde{I}(x, M_0, T, \mu), \quad (5.2)$$

donde

$$\tilde{I}(r, M_0, T, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{1}{(w_j + i\mu)^2 + E^2} \right\}, \quad (5.3)$$

$$w_j = (2j + 1) \pi T, \quad (5.4)$$

$$E^2 = r^2 + M_0^2. \quad (5.5)$$

Calculando la parte real,

$$\tilde{I}(r, M_0, T, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{w_j^2 + E^2 - \mu^2}{(w_j^2 + E^2 - \mu^2)^2 + 4w_j^2 \mu^2} \right\}. \quad (5.6)$$

Para evaluar esta sumatoria usamos la siguiente fórmula, ya usada en el texto y desarrollada en el Apéndice II:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(iw_n) = \sum \text{res} \left[\tilde{F}(w) f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w) \right], \quad (5.7)$$

donde la función $\tilde{F}(w)$ es una función que debemos definir de manera tal que, evaluada en iw_j , sea la función sobre la cual debemos hacer la sumatoria.

Entonces, eligiendo

$$\tilde{F}(w) = \frac{E^2 - \mu^2 - w^2}{[-w^2 + E^2 - \mu^2]^2 - 4w^2\mu^2}, \quad (5.8)$$

lo que nos interesa es

$$\tilde{I}(r, M_0, T, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}(iw_j), \quad (5.9)$$

que puede ser calculado utilizando la fórmula (5.7). En este caso, los polos de $\tilde{F}(w)$, w_p , vienen dados por

$$(-w_p^2 + E^2 - \mu^2)^2 - 4w_p^2\mu^2 = 0 \implies w_p = \pm(E \pm \mu). \quad (5.10)$$

Entonces,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}(iw_n) = \frac{1}{2T} \sum_{w_p} \text{res} \left[\tilde{F}(w)f(w); w = w_p \right] \quad (5.11)$$

$$= \frac{1}{2T} \sum_{w_p} \left[\lim_{w \rightarrow w_p} \tilde{F}(w)f(w)(w - w_p) \right] \quad (5.12)$$

$$= \frac{1}{2T} \sum_{w_p} \left[\lim_{w \rightarrow w_p} \frac{E^2 - \mu^2 - w^2}{(-w^2 + E^2 - \mu^2)^2 - 4w^2\mu^2} \times \frac{(w - w_p)}{1 + \exp\left(\frac{w}{T}\right)} \right]. \quad (5.13)$$

Finalmente, haciendo un poco de álgebra, se llega a que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}(iw_n) = \frac{1}{2T} \frac{1}{4E} \left(\tanh \frac{E + \mu}{2T} + \tanh \frac{E - \mu}{2T} \right). \quad (5.14)$$

Y reemplazando hacia atrás, en las ec. (5.6), (5.2) y (5.1), sucesivamente, obtenemos

$$\frac{4\pi^2}{N_c N_f G} = 2 \int_0^1 dr r^2 \frac{1}{E} \left(\tanh \frac{E + \mu}{2T} + \tanh \frac{E - \mu}{2T} \right), \quad (5.15)$$

que es la ecuación del gap para el modelo NJL con temperatura y potencial químico finitos, en el caso quirral.

APÉNDICE II: SUMATORIA SOBRE LAS FRECUENCIAS DE MATSUBARA

Deseamos evaluar una sumatoria infinita del tipo

$$\tilde{I} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{A(w_j^2)}{w_j^2 - B(w_j^2)}, \quad (5.16)$$

donde el sumando no tiene polos sobre el eje imaginario. Para ello, definamos la función auxiliar

$$\tilde{F}(w) = \frac{A(-w^2)}{-w^2 - B(-w^2)}. \quad (5.17)$$

De esta manera, la ec. (5.16) se puede reescribir como

$$\tilde{I} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(iw_j). \quad (5.18)$$

Tomemos, ahora, la función de Fermi definida por

$$f(w) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{w}{T}\right)}, \quad (5.19)$$

que, al contrario de $\tilde{F}(w)$, sólo tiene polos a lo largo del eje imaginario, dados por $w_n = i(2n + 1)\pi T$, con $n = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$. Entonces, la estructura de polos de la función $\tilde{F}(w)f(w)$ es la que se muestra en la figura A2.

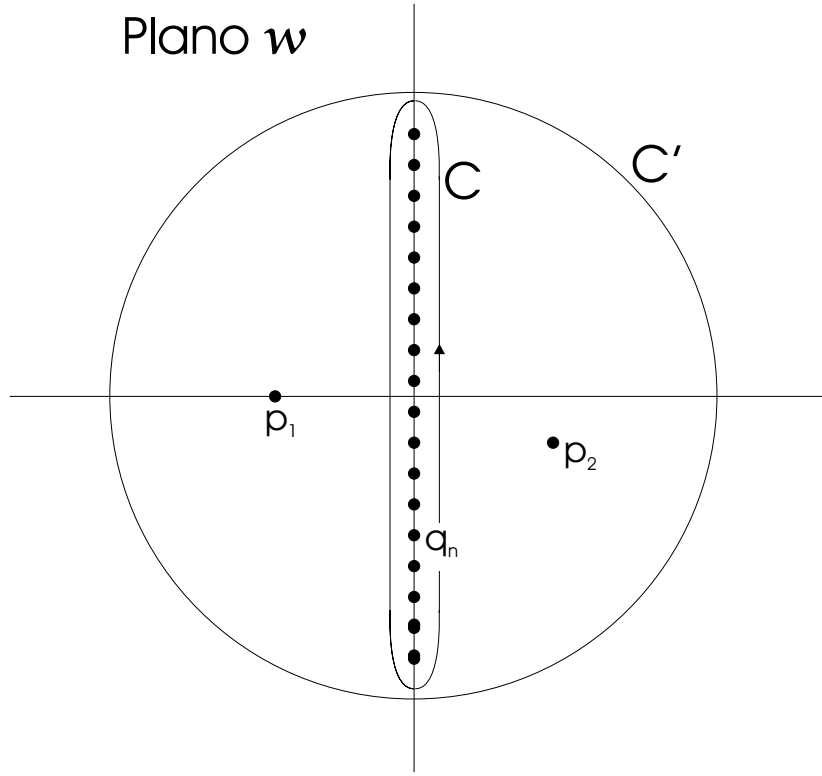


FIGURA A2: Estructura de polos y caminos de integración de $\tilde{F}(w)f(w)$ (p_i son los polos de $\tilde{F}(w)$ y q_j los de $f(w)$).

Si ahora tomamos los contornos C y C' de la figura A2, vemos que

$$\oint_{C'} dw \tilde{F}(w)f(w)$$

$$= 2\pi i \sum \text{res} \left[\tilde{F}(w)f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w)f(w) \text{ dentro de } C' \right] \quad (5.20)$$

$$= 2\pi i \sum \text{res} \left[\tilde{F}(w)f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w)f(w) \text{ dentro de } C \right]$$

$$+ 2\pi i \sum \text{res} \left[\tilde{F}(w)f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w)f(w) \text{ fuera de } C \right]. \quad (5.21)$$

Pero, si hacemos que $C' \rightarrow \infty$ y suponemos que el integrando no diverge¹, entonces todo esto debe valer cero. Por otro lado, en la primera sumatoria del

¹Si el integrando es divergente al hacer $C' \rightarrow \infty$, esta operación debe hacerse con mayor cuidado. Sin embargo, puede demostrarse, el resultado que se obtiene es semejante al aquí mostrado.

último miembro, al estar dentro de C , los residuos se calculan en polos de $f(w)$ (en $w = iw_n$), no de $\tilde{F}(w)$, por lo que es posible sacar a esta última afuera. Y en la segunda sumatoria sólo van a contribuir los polos de $\tilde{F}(w)$. Entonces, queda

$$0 = 2\pi i \sum \tilde{F}(iw_n) \operatorname{res} [f(w); \text{en } w = iw_n] + 2\pi i \sum \operatorname{res} [\tilde{F}(w)f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w)]. \quad (5.22)$$

Calculando los residuos del primer término,

$$\operatorname{res} [f(w); \text{en } w = iw_n] = \lim_{w \rightarrow iw_n} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{w}{T}\right)} (w - iw_n) \quad (5.23)$$

$$= \lim_{w \rightarrow iw_n} \frac{T}{\exp\left(\frac{w}{T}\right)} = -T, \quad (5.24)$$

y volviendo atrás, obtenemos

$$0 = -2\pi i \sum \tilde{F}(iw_n)T + 2\pi i \sum \operatorname{res} [\tilde{F}(w)f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w)] \quad (5.25)$$

$$\Rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(iw_n) = \sum \operatorname{res} [\tilde{F}(w)f(w); \text{en polos de } \tilde{F}(w)], \quad (5.26)$$

que es la expresión que buscábamos.

APÉNDICE III: POLOS DE LA EC. (3.14)

Sea la ecuación

$$w^2 + [m_c + (M_0 - m_c) f^2(w^2)]^2 = 0, \quad (5.27)$$

donde

$$w^2 = (w_j + i\mu)^2 + r^2. \quad (5.28)$$

Buscamos expresar las soluciones en el espacio complejo w_j en función de las soluciones en el espacio w , asociado a través de la ec. (5.28).

Las soluciones w_p , en general, tendrán la forma

$$w_p = R_p + iI_p. \quad (5.29)$$

Notemos que si w_p es solución, entonces también lo son $-w_p$ y w_p^* . Entonces, en principio, las soluciones aparecerán de a cuatro (si $R_p \neq 0$) o de a dos (si $R_p = 0$).

Dado w_p , w_j^p debe cumplir

$$w_p^2 = (w_j^p + i\mu)^2 + r^2. \quad (5.30)$$

Entonces, definiendo

$$w_j^p = r_p + i i_p, \quad (5.31)$$

se llega a que

$$r_p = \pm \frac{R_p I_p}{\tilde{E}_p}, \quad (5.32)$$

$$i_p = \pm \tilde{E}_p - \mu, \quad (5.33)$$

donde

$$\tilde{E}_p = \sqrt{\frac{E_p^2 - R_p^2 + \sqrt{[(I_p^2 + r^2) - R_p^2]^2 + 4(R_p I_p)^2}}{2}}, \quad (5.34)$$

$$E_p^2 = I_p^2 + r^2. \quad (5.35)$$

(En principio, en la raíz interna de la expresión de \tilde{E}_p , el signo es doble (\pm). Pero se deben descartar las soluciones con el signo negativo, dado que eso conduciría a r_p e i_p imaginarios, lo que es contrario a nuestras hipótesis). De esta manera, a través de las expresiones (5.32) y (5.33), quedan relacionadas las partes real e imaginaria de la solución de la ec. (5.27) en el espacio w con la solución correspondiente al espacio w_j .

APÉNDICE IV: CORRIENTE NO LOCAL DE NÖTHER

Para calcular la corriente de Nöther que da lugar a la densidad de quarks, en el caso no local, vamos a considerar a $\partial_\mu j^\mu$, donde j^μ es la corriente de Nöther para el caso local (asociada a la simetría $U_V(1)$), y vamos a redefinir j^μ de manera tal que su derivada sea cero. Es decir, redefiniremos j^μ para que sea, efectivamente, una corriente conservada.

Para comenzar, asumamos una interacción no local $M(x, x')$ tal que la ecuación de movimiento del sistema sea, como en nuestro caso,

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi(x) - \int d^4x' M(x, x') \Psi(x') = 0. \quad (5.36)$$

Tomando el hermítico conjugado de la ec. anterior,

$$-i\partial^\mu \Psi^\dagger(x) \gamma_\mu^\dagger - \int d^4x' \Psi^\dagger(x') M(x, x') = 0. \quad (5.37)$$

Usando que $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$ y multiplicando el segundo término de la ec. (5.37) por $\gamma_0^2 (= 1)$, ésta queda

$$-i\partial^\mu \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu - \int d^4x' \bar{\Psi}(x') M(x, x') = 0. \quad (5.38)$$

Si ahora multiplicamos (5.36) por la izquierda por $\bar{\Psi}(x)$ y (5.38) por la derecha por $\Psi(x)$, y restamos, obtenemos

$$\begin{aligned} & i [\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \partial^\mu \Psi(x) + \partial^\mu (\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu) \Psi(x)] \\ &= \int d^4x' \bar{\Psi}(x) M(x, x') \Psi(x') - \int d^4x' \bar{\Psi}(x') M(x, x') \Psi(x), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} & \partial^\mu [\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x)] \\ &= -i \left[\int d^4x' \bar{\Psi}(x) M(x, x') \Psi(x') - \int d^4x' \bar{\Psi}(x') M(x, x') \Psi(x) \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Pero el corchete del primer miembro de la última ec. no es más que el j_μ correspondiente al caso local, al que de ahora en más llamaremos $j_\mu^{(loc)}$, para diferenciarlo de la corriente que en realidad nos interesa, la que se conserva en el caso no local, a la que llamaremos J^μ . A las integrales del segundo miembro las podemos reescribir, usando la delta de Dirac, de la siguiente manera:

$$\partial^\mu j_\mu^{(loc)} = i \int d^4x' d^4x'' [\delta(x' - x) - \delta(x'' - x)] \bar{\Psi}(x'') M(x', x'') \Psi(x'). \quad (5.41)$$

A la resta de funciones delta la podemos escribir como integrales de camino [12],

$$\delta(x' - x) - \delta(x'' - x) = \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta(z - x), \quad (5.42)$$

donde el camino $z(\lambda)$ va desde x' hasta x'' ; por ejemplo, puede ser $z(\lambda) = (1 - \lambda)x' + \lambda x''$. Intercambiando el orden de las derivadas con respecto a x con las integrales en la ec. (5.42), ésta queda

$$\partial^\mu j_\mu^{(loc)} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[i \int d^4x' d^4x'' \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} \delta(z - x) \bar{\Psi}(x'') M(x', x'') \Psi(x') \right]. \quad (5.43)$$

Entonces, la corriente total debe ser

$$J^\mu = \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) - i \int d^4x' d^4x'' \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} \delta(z - x) \bar{\Psi}(x'') M(x', x'') \Psi(x'), \quad (5.44)$$

ya que de esta manera se cumple $\partial^\mu J_\mu = 0$. Nótese que este procedimiento para hallar J_μ no la determina en forma única. Ello se ve claramente en la arbitrariedad de elegir el camino $z(\lambda)$. La razón de este hecho está en que al pedir que la divergencia de la corriente sea cero, sólo estamos fijando la parte longitudinal de dicha corriente. En general, para determinar un campo vectorial en forma unívoca es necesario conocer no sólo su divergencia, sino también su rotor.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Steven Weinberg, *The First Three Minutes - A Modern View of the Origin of the Universe*, updated ed.(Basic Books, Perseus Books Group, New York, 1993).
- [2] F. Karsch, *hep-lat/0106019*.
- [3] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345, (1961);
Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124**, 246, (1961).
- [4] R.D.Mattuck, *A guide to Feynman diagrams in the many-body problem*, 2nd ed.(MacGraw-Hill, New York, 1976).
- [5] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particles Systems* (International series in pure and applied physics, McGraw-Hill, New York, 1971).
- [6] S. P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.*, **64**, 667, (1992).
- [7] T. Hatsuda, T. Kunihiro, *Phys. Rep.* **247**, 221, (1994).
- [8] U. Vogl, W. Weise, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27**,195, (1991).
- [9] D. I. Dyakonov, V. Yu. Petrov, *Sov. Phys. JETP*, **62**, 204, (1985);
Sov. Phys. JETP, **62**, 431, (1985);
Nucl. Phys., **B245**, 259, (1985);
Nucl. Phys., **B272**, 457, (1986);
D. I. Dyakonov, V. Yu. Petrov, P. V. Pobylytsa, *Nucl. Phys.*, **B306**, 809, (1988).
- [10] F. T. Hawes, C. D. Roberts, A. G. Williams, *Phys. Rev.*, **D49**, 4683, (1994).
- [11] M. Stingl, *Phys. Rev.*, **D34**, 3863, (1986);
M. Stingl, *Phys. Rev.*, **D36**, 651(E), (1987);

- U. Häbel, R. Könning, H. G. Reusch, M. Stingl, S. Wigard, *Z. Phys.*, **A336**, 435, (1990);
D. Zwanziger, *Nucl. Phys.*, **B364**, 127, (1991);
V. N. Gribov, *Lund University preprint*, LU TP 91-7 (1991);
J. M. Namyslowski, *Warsaw University preprint*; IFT-10/94, (1994).
- [12] R. D. Bowler, M. C. Birse, *Nucl. Phys.*, **A582**, 655, (1995).
[13] R. S. Plant, M. C Birse, *Nucl. Phys. A*, **628**, 607, (1998).
[14] A. A. Abrikosov, *Nucl. Phys.*, **B182**, 441, (1981).
[15] C. A. de Carvalho, *Nucl. Phys.*, **B183**, 182, (1981).
[16] G. W. Carter, D. I. Diakonov, *Phys. Rev.*, **D60**, 016004, (1999).
[17] J. Berges, K. Rajagopal, *Nucl. Phys.*, **B538**, 215, (1999).
[18] M. A. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov, J. J. M. Verbaarschot, *Phys. Rev.*, **D58**, 096007, (1998).
[19] B. Szczerbinska, W. Broniowski, *Acta Phys. Polon.*, **B31**, 835, (2000).