

Estudio de propiedades mesónicas en
modelos efectivos de quarks con
interacciones no locales y grados de
libertad de extrañeza

Gustavo A. Contrera

Trabajo de Diploma de la Licenciatura en Física
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

30 de Marzo de 2007

Resumen

Se estudian algunas propiedades de mesones livianos pseudoescalares utilizando un modelo quirral con tres sabores de quarks y con interacciones no locales covariantes, basadas en una aproximación separable al intercambio efectivo gluónico. Este modelo incluye un término que tiene en cuenta la anomalía axial y que da lugar a la mezcla de sabores. Primeramente se obtienen y resuelven las ecuaciones del “gap” para determinar los campos medios y, a partir de ellos obtener las masas dinámicas de los quarks y los condensados quirales. Posteriormente se obtienen las masas de los mesones pseudoescalares livianos, los correspondientes ángulos de mezcla para η y η' , y las constantes de acoplamiento mesón-quark. Finalmente se determinan las correspondientes constantes de decaimiento débil y las constantes de decaimiento anómalo a dos fotones para los mesones π_0 , η y η'

Índice general

1. Introducción	2
2. El modelo NJL y sus extensiones no locales	6
2.1. El modelo NJL y su relación con QCD	6
2.1.1. Las simetrías de QCD	7
2.2. El modelo NJL	10
2.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica	11
2.2.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar	13
2.3. Extensión del modelo NJL a $SU(3)_f$	14
2.3.1. Simetrías de QCD para tres sabores	15
2.3.2. La anomalía axial	16
2.3.3. La interacción efectiva en el modelo NJL	17
2.4. Interacciones no locales y separables	19
3. Modelo no local con extrañeza	23
3.1. La acción efectiva	23
3.2. Masas y constantes de acoplamiento quark-mesón	29
3.3. Constantes de decaimiento débil	32
3.4. Decaimiento anómalo mesón $\rightarrow \gamma\gamma$	34
4. Resultados numéricos	36
5. Conclusiones	41

Capítulo 1

Introducción

De acuerdo con el Modelo Standard de partículas elementales, los hadrones (mesones y bariones) están formados por fermiones (quarks) que interactúan entre sí a través de bosones mediadores de las interacciones fuertes (gluones). La teoría que describe dichas interacciones es una teoría de gauge no abeliana llamada Cromodinámica Cuántica (QCD) [1]. El hecho de que el grupo de simetría interna ($SU(3)$ de color) sea no abeliano, hace que la QCD tenga características muy diferentes a las de la Electrodinámica Cuántica (QED). En particular QCD tiene dos propiedades sumamente importantes: libertad asintótica y confinamiento. La libertad asintótica implica que en el rango de alto momento transferido los quarks se comportan como casi libres, es decir, la interacción entre dos quarks debido al intercambio de gluones resulta ser muy pequeña. Por lo tanto, dicha interacción puede tratarse utilizando teoría de perturbaciones, en función de la constante de acoplamiento quark-gluon. En este rango de momentos, los procesos de dispersión son calculados con una gran precisión. Por el contrario, para bajos momentos transferidos ($\lesssim 1\text{GeV}$) QCD es altamente no lineal y da lugar al confinamiento: los quarks no pueden ser separados indefinidamente, ya que la energía de interacción entre ellos aumenta con la distancia.

En el estudio de muchas propiedades hadrónicas, tales como sus masas, constantes de acoplamiento, etc, el rango de interés es justamente el de bajos momentos. Por lo tanto, si bien se conoce la teoría fundamental que describe toda la dinámica del sistema, para procesos físicos de bajas energías resulta muy difícil obtener información útil partiendo en forma directa de ella. Por esta razón, se han desarrollado diversos métodos aproximados para estudiar dichos procesos. Entre ellos está la “QCD en red” (Lattice QCD), que intenta

resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discreto [1]. Pero incluso aquí se presentan serios problemas, entre ellos la inclusión de un potencial químico finito [2]. Por ello, aún en este método es necesario hacer aproximaciones. Otra opción es la de los modelos efectivos: se busca un lagrangiano simplificado que contenga las características principales de QCD a bajas energías, como por ejemplo sus simetrías.

Una característica importante de QCD es precisamente que, en el límite en que se consideran quarks de masa nula, posee una simetría llamada simetría quiral. Esta simetría implica que los quarks sin masa poseen una helicidad bien definida, es decir, son dextrógiros o levógiros. El considerar despreciable la masa de los quarks es una aproximación razonablemente válida para los quarks *up* y *down*, ya que $m_u \sim m_d \ll \Lambda_{QCD}$, donde $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV, escala característica de QCD. Según veremos más adelante, en la naturaleza esta simetría está espontáneamente rota, al menos para bajas temperaturas y densidades. o sea que si bien es una simetría aproximada del lagrangiano de QCD, no lo es de su estado fundamental. Esto se debe a la estructura compleja del vacío físico, que está lejos de poder ser considerado como carente de estructura.

Uno de los modelos efectivos que ha recibido gran atención en los últimos 15 – 20 años es el de Nambu y Jona-Lasinio (NJL). Su historia se remonta al año 1961, en el que Y. Nambu y G. Jona-Lasinio publicaron dos trabajos titulados "Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity" [3]. Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de un límite en el cual el pión es un bosón de Goldstone (no masivo) asociado con la ruptura espontánea de simetría quiral. Lo que ellos pretendían era explicar la masa pequeña que distingue al pión de los otros hadrones. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasinio partieron de un lagrangiano con una interacción de dos cuerpos entre nucleones (los bloques básicos de materia conocidos hasta ese momento) no masivos que respeta la simetría quiral. La ruptura espontánea hace que la masa de los nucleones resulte finita, dando lugar a bosones de Goldstone que fueron identificados con el pión.

Por esa época, QCD aún no había sido formulada. Cuando esta teoría finalmente fue concebida, a mediados de los años 70, el modelo de NJL empezó a ser abandonado, debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Sin embargo, como consecuencia de las dificultades antes mencionadas para tratar QCD a bajas energías, en la segunda parte de la década del 80 surgió la idea de reinterpretar el modelo NJL como un mod-

elo para un sistema de quarks interactuantes. Se supone así que los grados de libertad de los gluones se pueden congelar dando lugar a interacciones efectivas entre los quarks.

En su versión más sencilla este modelo sólo utiliza una interacción local del tipo escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial entre fermiones y permite entender el mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral y la consiguiente aparición de los piones como bosones de Goldstone. Este modelo, así como sus extensiones que incluyen interacciones locales en otros canales, ha sido utilizado en numerosos estudios de las propiedades hadrónicas tanto en SU(2) como en SU(3) al considerar además el quark *strange*[4, 5].

Un problema del modelo NJL, relacionado con el uso de interacciones locales, es que se debe introducir algún tipo de regularización para evitar que los diagramas involucrados en la determinación de la autoenergía de los quarks, las masas de los mesones, las constantes de acoplamiento, etc, resulten divergentes. Esto introduce ciertas ambigüedades en el cálculo de dichas propiedades, así como de las correcciones debidas a los lazos de mesones. Durante la última década han aparecido trabajos que proponen el uso de interacciones no locales para solucionar este tipo de inconvenientes, a cambio de algunas complicaciones en el cálculo [6]. Una de las propuestas de mayor interés surge de la relación entre el modelo NJL y el modelo de intercambio de un gluón, según el cual, se utiliza el propagador de un gluón modificado fenomenológicamente, para generar las interacciones efectivas entre quarks. El propagador gluónico efectivo provee una forma natural de introducir una no localidad dentro de la interacción quark-quark. Dicha no localidad se puede caracterizar mediante un factor de forma $g(p)$, que depende del modelo utilizado. En nuestro caso, se utilizó una función gaussiana (aunque también podría haberse utilizado otras formas funcionales como por la lorentziana). El uso de interacciones no locales tiene diversas ventajas ya que, por ejemplo, las anomalías son automáticamente preservadas [7], la acción efectiva es finita a todo orden en el desarrollo en lazos [8](es decir que tanto los lazos fermiónicos como los de los mesones son finitos), etc. Por otro lado, posteriormente [9] se ha demostrado que mediante una adecuada elección del factor de forma es posible lograr que el propagador fermiónico no tenga polos reales y que por lo tanto los quarks no puedan aparecer como estados asintóticos. Esto se interpreta como una forma de implementar la propiedad de confinamiento que posee QCD, cosa que en el modelo NJL local no es posible hacer. Hasta ahora, el uso de este tipo de interacciones no locales se ha limitado mayormente a cálculos que incluyen sólo a los dos sabores más livianos

de quarks (*up* y *down*). El objetivo del presente trabajo es extender estos estudios de manera de incorporar el quark *strange*.

Concretamente, se estudiarán las propiedades de los nueve mesones pseudoescalares más livianos a temperatura y potencial químico nulos, utilizando una extensión no local del modelo NJL a $SU(3)$.

En el siguiente capítulo se expondrán las características generales de QCD y se presentará el modelo de Nambú y Jona-Lasinio para el caso de dos sabores, y luego se estudiará el caso más general de tres sabores de quarks. Finalmente, se introducirán las extensiones al modelo con interacciones no locales. En el capítulo 3 se expondrá el formalismo utilizado en la obtención de las ecuaciones del “Gap” y en la determinación de las masas de los mesones y sus probabilidades de decaimiento. En el capítulo 4 se presentarán los resultados numéricos obtenidos utilizando un regulador del tipo gaussiano para describir la no localidad. Por último, en el capítulo 5 se expondrán las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

El modelo NJL y sus extensiones no locales

2.1. El modelo NJL y su relación con QCD

La cromodinámica cuántica es una teoría de gauge no abeliana que se aplica a la descripción de las interacciones fuertes [1]. Sus grados de libertad consisten en campos fermiónicos, que representan a los quarks y campos de gauge vectoriales, que representan a los gluones.

El lagrangiano de QCD con simetría de color $SU(3)_c$ viene dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m})\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

representa el campo de quarks con tres colores y N_f sabores, las masas desnudas de los quarks están agrupadas en la matriz de masa m , definida por $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$,

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a \quad (2.3)$$

es la derivada covariante que incluye a los campos gluónicos A_μ^a (con $a=1, \dots, 8$), g es la constante de acoplamiento fuerte y λ^a son las matrices de Gell-Mann,

representación matricial de los generadores del grupo de color $SU(3)_c$, cuyo álgebra resulta

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \quad (2.4)$$

siendo f^{abc} las constantes de estructura del grupo $SU(3)_c$ y además se verifica que

$$\text{tr}(\lambda^a\lambda^b) = 2\delta^{ab}.$$

El tensor de campo gluónico $F_{\mu\nu}^a$ se define como

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.5)$$

Tal como está constituido, el lagrangiano de QCD es invariante ante transformaciones de gauge $SU(3)$ en el espacio de color. Por el carácter no abeliano del grupo de gauge, QCD tiene ciertas características que la diferencian de las teorías de gauge abelianas como la Electrodinámica Cuántica (QED). Algunas de estas particularidades son:

- el lagrangiano de QCD contiene autoacoplamientos gluónicos (vértices de tres y cuatro gluones), por lo que los gluones transportan carga de color.
- QCD es asintóticamente libre, es decir, el acoplamiento se debilita a cortas distancias o a grandes impulsos [1].
- inversamente, el acoplamiento se vuelve intenso a bajos impulsos. Por tal motivo, no es posible aplicar perturbaciones en QCD para describir hadrones de masas menores que ~ 2 GeV. Esto hace difícil de comprender en detalle el fenómeno de confinamiento, es decir, el hecho de que objetos de color, como quarks y gluones, no existan como grados de libertad físicos en el vacío.

2.1.1. Las simetrías de QCD

Consideremos, en principio, el caso de dos sabores (u y d) y supongamos que los quarks correspondientes tienen masa nula (límite quiral). El lagrangiano (2.1) queda

$$\mathcal{L}_{QCD}^{m=0} = \bar{\psi}(x)i\gamma_\mu D^\mu\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Los fermiones sin masa tienen helicidad (o quiralidad) bien definida, lo cual significa que sus espines están alineados (dextrógiros) o anti-alineados (levógiros) con sus impulsos. Si introducimos los campos dextrógiro, ψ_R , y levógiro, ψ_L , dados por

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi, \quad (2.7)$$

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad \bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 + \gamma_5}{2}. \quad (2.8)$$

el término fermiónico del Lagrangiano (2.6), $\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} i \gamma_\mu D^\mu \psi$, se separa en dos partes

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}_R i \gamma_\mu D^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i \gamma_\mu D^\mu \psi_L, \quad (2.9)$$

y es invariante ante transformaciones quirales de sabor $U(2)_R \otimes U(2)_L$ que actúan sobre los campos dextrógiro y levógiro según

$$U(2)_R : \psi_R \rightarrow e^{i\tau_s \alpha_R^s} \psi_R, \quad (2.10)$$

$$U(2)_L : \psi_L \rightarrow e^{i\tau_s \alpha_L^s} \psi_L. \quad (2.11)$$

con parámetros $\alpha_{R,L}^s$, siendo τ_s las matrices de Pauli para $s=1,2,3$ y $\tau_0 = \mathbb{I}_2$. Las correspondientes corrientes de Noether son

$$J_{sR}^\mu = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \tau_s \psi_R, \quad J_{sL}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \tau_s \psi_L \quad (2.12)$$

con $\partial_\mu J_{sR}^\mu = \partial_\mu J_{sL}^\mu = 0$. Alternativamente, podemos escribir

$$J_{sR,L}^\mu(x) = \frac{1}{2} [V_s^\mu \pm A_s^\mu(x)] \quad (2.13)$$

en términos de las corrientes conservadas vector y vector axial

$$V_s^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \tau_s \psi(x), \quad A_s^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \tau_s \psi(x), \quad (2.14)$$

con $\partial_\mu V_s^\mu = \partial_\mu A_s^\mu = 0$. Entonces, la simetría quiral $U(2)_R \otimes U(2)_L$ es equivalente a la invariancia frente al grupo $U(2)_V \otimes U(2)_A$ con transformaciones en el espacio de sabor

$$U(2)_V : \psi \rightarrow e^{i\tau_s \alpha_V^s} \psi, \quad (2.15)$$

$$U(2)_A : \psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \tau_s \alpha_A^s} \psi. \quad (2.16)$$

De esta manera, \mathcal{L}_ψ es invariante bajo el grupo de transformaciones

$$U(2)_R \otimes U(2)_L = SU(2)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(2)_V \otimes U(2)_A. \quad (2.17)$$

Dado que en el término $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ del \mathcal{L}_{QCD} no aparecen los campos fermiónicos, lo anterior también es válido para el Lagrangiano sin el término de masa, $\mathcal{L}_{QCD}^{m=0}$.

Sin embargo, el análisis anterior de las simetrías no es válido cuando consideramos el término de masa en el \mathcal{L}_{QCD} :

$$\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x)\hat{m}\psi(x), \quad (2.18)$$

pues ahora las cuatridivergencias de las corrientes dejan, en general, de ser cero

$$\partial_\mu V_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x)[\hat{m}, \tau_s]\psi(x), \quad (2.19)$$

$$\partial_\mu A_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x)\{\hat{m}, \tau_s\}\gamma_5\psi(x). \quad (2.20)$$

Las transformaciones $SU(2)_V$ y $U(1)_V$ son las transformaciones unitarias correspondientes a la conservación del isoespín y del número bariónico, respectivamente. Las transformaciones quirales $SU(2)_A$ y axiales $U(1)_A$ alteran la paridad de un estado dado. Por ello, la realización de dichas simetrías en la naturaleza, debería implicar para cada multiplete la existencia de otro multiplete de paridad opuesta. Esto no es lo que se observa experimentalmente, de ahí se induce que tanto $SU(2)_A$ como $U(1)_A$ son simetrías que, de alguna manera, están rotas.

Se sabe que $SU(2)_A$ es una simetría espontáneamente rota. Al ocurrir esto, en el caso de quarks de masa nula, aparecen tres $(N_f^2 - 1)$ modos de excitación de los campos de quarks y gluones, de masa nula, llamados bosones de Goldstone [12]. Estos tres bosones se asocian con los piones, ya que se observa experimentalmente que la masa de los piones, si bien es no nula, es mucho menor que la de los nucleones. La expresión matemática de una simetría es la conmutación del hamiltoniano del sistema con el operador U correspondiente a la cantidad conservada, esto es, $[H, U] = 0$. Cuando una simetría está espontáneamente rota, lo que ocurre no es que el conmutador deja de ser nulo, sino que el vacío deja de ser invariante frente a las transformaciones del grupo de simetría del operador U . Como consecuencia de esto, el estado fundamental deja de ser único y pasa a estar degenerado. Esto se puede expresar como $[H, U] = 0$, pero con $U|0\rangle \neq |0\rangle$, lo que implica que

los generadores A del álgebra del grupo al que pertenece el operador U , no cancelan el vacío, ésto es $A | 0 \rangle \neq 0$.

Por otro lado, según veremos más adelante, la simetría $U(1)_A$, está rota a nivel cuántico por la llamada anomalía axial. Esto significa que si bien la teoría clásica posee una simetría dada, en el proceso de cuantificación esta se pierde porque la corriente de Noether recibe una contribución extra que hace que su cuadridivergencia deje de ser nula.

2.2. El modelo NJL

Si queremos partir de un lagrangiano efectivo, más simple que el de QCD pero con características y simetrías similares, nos vemos naturalmente inducidos a considerar el lagrangiano utilizado por Y.Nambu y G.Jona-Lasinio en su trabajo de 1961 [3]. Como ya fue mencionado, este modelo fue originalmente concebido para describir nucleones interactuantes, por lo que, sólo es necesario reinterpretar dicho lagrangiano como uno de quarks, suponiendo que las interacciones locales de dos cuerpos se corresponden con una interacción efectiva, resultante de complicados procesos gluónicos.

El modelo de Nambu y Jona-Lasinio se define a través de un lagrangiano efectivo de fermiones relativistas que interactúan a través de acoplamientos locales fermión-fermión. La utilidad de este modelo radica en que puede ser diseñado para incorporar todas las simetrías globales de QCD y permite “ver” los mecanismos de ruptura de simetrías. Ofrece un esquema simple para estudiar la ruptura espontánea de simetría quiral y sus manifestaciones en la física de hadrones, como la generación dinámica de masa de los quarks, la aparición de un condensado de quarks y el papel de los piones como bosones de Goldstone. Tal vez el punto débil más importante del modelo es que no posee la propiedad de confinamiento de color de QCD. Su aplicabilidad esta entonces limitada a aquellos fenómenos hadrónicos y nucleares que no dependen sensiblemente de los detalles del mecanismo de confinamiento. Sin embargo, para muchos aspectos importantes de la física hadrónica de bajas energías, las simetrías de QCD son probablemente tan o más importantes que el confinamiento. Es en este contexto que trabajaremos de aquí en adelante.

El modelo NJL más simple parte de las siguientes hipótesis:

- Considera a los quarks livianos u y d como los grados de libertad del sistema.

- Supone que en el límite de bajas energías, los grados de libertad gluónicos están absorbidos dentro de una interacción efectiva y local entre quarks.
- Construye esta interacción en acuerdo con las simetrías de QCD

El lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.21)$$

con la matriz de masas desnudas dada por $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$. El lagrangiano de interacción es del tipo local y de cuatro fermiones. Esta interacción debe satisfacer la simetría quiral $U(2)_R \otimes U(2)_L$ junto con la simetría de color $SU(3)_{color}$ y CPT. El \mathcal{L}_{int} propuesto originalmente por Nambu y Jona-Lasinio es

$$\mathcal{L}_{int} = G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (2.22)$$

2.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica

Consideremos el lagrangiano de interacción \mathcal{L}_{int} , de un único fermión sin masa en el caso del acoplamiento fuerte G . En la aproximación de Hartree (campo medio) se toman en cuenta sólo los términos directos, y el proceso relevante se muestra en el figura 2.1. Cerrar el lazo fermiónico es equivalente

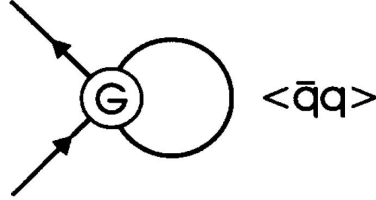


Figura 2.1: Cierre del lazo fermiónico, que esquematiza la ecuación del gap

a linealizar la interacción en la ecuación (2.22) reemplazando los términos $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$ por $2\bar{\psi}\Gamma\psi\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$, siendo $\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$ el valor de expectación del vacío y Γ cualquiera de los operadores que aparecen en \mathcal{L}_{int} . Como el vacío debe ser invariante de Lorentz y debe conservar paridad, el único valor de expectación no nulo es $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, el condensado quark-antiquark relacionado con la densidad escalar $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma_0\psi$. Entonces, la ecuación de Dirac en la aproximación de campo medio resulta

$$[i\cancel{\partial} - m + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle]\psi(x) = 0. \quad (2.23)$$

Es posible definir entonces una masa fermiónica dinámica

$$M - m = -2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \quad (2.24)$$

generada por una interacción escalar suficientemente fuerte entre fermiones. A la ecuación (2.24) se la denomina ecuación del “gap” del modelo NJL, en analogía con la correspondiente ecuación que determina el gap de energía en un superconductor.

En la aproximación de campo medio, el condensado $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ está dado por

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -i \operatorname{tr}[S_F(0)] \quad (2.25)$$

donde S_F es el propagador de Dirac, definido por

$$S_F(x-y) = -i\langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{\not{p} - M + i\epsilon}. \quad (2.26)$$

La aparición de $S_F(0)$ en (2.25) refleja el lazo cerrado de la figura 2.1, con la línea fermiónica comenzando y terminando en el mismo punto del espacio-tiempo. Como la masa dinámica M está en la expresión de $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, la ecuación del gap es una ecuación autoconsistente.

La integral S_F es cuadráticamente divergente y requiere, por lo tanto, de un procedimiento de regularización apropiado. Si introducimos un *cut-off* para las componentes espaciales de momento Λ_3 e integramos sobre la componente temporal p_0 en la ecuación (2.25), se obtiene

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -\frac{M}{\pi^2} N_c \int_0^{\Lambda_3} dp \frac{\bar{p}^2}{\sqrt{\bar{p}^2 + M^2}} \quad (2.27)$$

Por lo tanto, el condensado $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ representa la densidad escalar de la energía negativa de Dirac, integrada hasta el momento $|\vec{p}| \leq \Lambda_3$. La ecuación del gap describe la interacción de un fermión con la parte “activa” del mar de Dirac. De la ecuación (2.27) se obtiene la ecuación del gap

$$M - m = \frac{2GN_c}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} dp \frac{\bar{p}^2}{\sqrt{\bar{p}^2 + M^2}} \quad (2.28)$$

que tiene una solución no trivial con $M \neq 0$ cuando la constante de acoplamiento G excede un valor crítico $G_{crit} = \pi^2/\Lambda_3^2$. Los quarks adquieren entonces una masa dinámica.

La generación dinámica de masa va en paralelo con la reestructuración del vacío: para $G > G_{crit}$ el vacío contiene un condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ no nulo. Como la densidad escalar $\bar{\psi}\psi$ rompe la simetría quirál, el estado fundamental no tiene la simetría $U(2)_R \otimes U(2)_L$ del lagrangiano. La simetría quirál es espontáneamente rota, y el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ es el parámetro de orden correspondiente.

En general, se distingue entre dos casos de realización de la simetría quirál:

1. La fase Wigner-Weyl, en la cual $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$ y los fermiones no tienen masa. Equivalentemente, la carga axial $Q_5 = \int d^3x A_0(x)$ aniquila el vacío: $Q_5 | 0 \rangle = 0$. En el modelo NJL este es el caso para $G < G_{crit}$.
2. La fase Nambu-Goldstone en la cual $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ y los fermiones tienen masa. En esta fase existe un bosón de Nambu-Goldstone no masivo. La carga axial no aniquila el vacío: $Q_5 | 0 \rangle \neq 0$. En el modelo NJL esto sucede cuando $G > G_{crit}$.

2.2.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar

Como ya se ha mencionado, la ruptura espontánea de simetría global implica la existencia de un modo de frecuencia cero, llamado bosón de Nambu-Goldstone. En este caso se trata de un modo fermión-antifermión pseudoescalar neutro ($J^\pi = 0^-$), identificado con el “pión”. Su espín y paridad reflejan la simetría axial $U(1)_A$ rota.

Para ver cómo emerge del modelo el pión de Goldstone sin masa, construimos la matriz T que surge de resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (ecuación de dos cuerpos) en el canal fermión-antifermión pseudoescalar para un dado cuadrimomento cuadrático q^2 del mesón:

$$T_\pi(q^2) = K_\pi + K_\pi J_\pi(q^2) K_\pi + \dots = \frac{K_\pi}{1 - K_\pi J_\pi(q^2)}. \quad (2.29)$$

En la figura (2.2) se ilustra esta ecuación autoconsistente.

La interacción en este canal está dada por el término $G(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$ del lagrangiano de la ecuación (2.22). Entonces, $K_\pi = 2G$ es el núcleo de la interacción, y J_π es la integral del lazo de interacción dada por

$$J_\pi(q^2) = i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} \right] \quad (2.30)$$

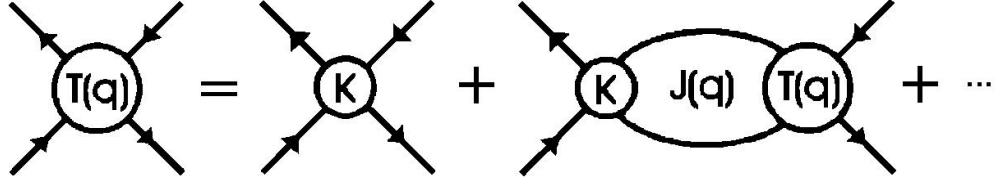


Figura 2.2: Esquemización de la ecuación de Bethe-Salpeter, que determina la matriz T .

El proceso de regularización de esta integral es idéntico al usado en la ecuación del gap (2.24).

La masa m_π del pión queda determinada por los polos de la matriz T , es decir, por la condición

$$1 - 2GJ_\pi(q^2 = m_\pi^2) = 0 \quad (2.31)$$

Utilizando la ecuación del gap es posible ver que una solución de esta ecuación es $m_\pi = 0$ (en el límite quiral), lo que significa que el pión es un pseudo-bosón de Goldstone, un modo de masa nula como consecuencia de una ruptura espontánea de simetría.

Si consideramos ahora el término $\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi$, que rompe explícitamente la simetría quiral, con una masa fermiónica desnuda m no nula, obtendremos una masa del pión distinta de cero.

2.3. Extensión del modelo NJL a $SU(3)_f$

Hasta aquí se ha considerado el modelo NJL para dos sabores. Este modelo para dos sabores (quarks u y d casi sin masa) ha sido extensamente estudiado [13, 14], y ha sido de gran utilidad para explorar la ruptura espontánea de la simetría quiral y la consecuente aparición del condensados de quarks, generación dinámica de masa y el pión como bosón de Goldstone.

Desarrollos más recientes prestaron atención a la generalización a $SU(3)$, es decir, la incorporación del quark *strange* dentro de este esquema [15, 16, 17, 18, 19]. Como la masa desnuda del quark *strange* es $m_s \simeq 150\text{MeV}$, no es un quark liviano ni pesado. Al mismo tiempo, introducir la extrañeza implica tratar el problema η' y la anomalía axial $U(1)$.

2.3.1. Simetrías de QCD para tres sabores

Nuestro punto de partida es QCD con $N_f = 3$ sabores de quarks. Los campos fermiónicos (2.2) están formados por los tres quarks u , d y s , y cada uno de ellos existe en $N_c = 3$ colores. El lagrangiano QCD es el de la ecuación (2.1). Además de la simetría local de gauge $SU(3)$, QCD con quarks sin masa es invariante ante transformaciones quirales globales. Consideremos

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^{(0)} + \delta\mathcal{L} \quad (2.32)$$

donde $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ es el límite $m \rightarrow 0$ y $\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}m\psi$. Con $N_f = 3$ sabores, $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ es invariante ante el grupo

$$U(3)_R \otimes U(3)_L = SU(3)_R \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.33)$$

Según veremos en detalle en la próxima subsección, la simetría axial $U(1)_A$, es decir, la invariancia ante transformaciones $\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\alpha_A}\psi$, está rota en la naturaleza. Por lo tanto, en el límite quiral con $m \rightarrow 0$, nos queda la simetría global $SU(3)_R \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_V$. Tenemos entonces, nueve corrientes vectoriales y nueve axiales conservadas:

$$V_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^i}{2}\psi, \quad i = 0, 1, \dots, 8, \quad (2.34)$$

con $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}I$, donde I es la matriz unitaria de 3×3 , y

$$A_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^i}{2}\psi, \quad i = 0, 1, \dots, 8. \quad (2.35)$$

Las correspondientes cargas vector y axial son

$$Q^i = \int d^3x V_0^i(x), \quad (2.36)$$

$$Q_5^i = \int d^3x A_0^i(x), \quad (2.37)$$

con $\frac{dQ^i}{dt} = \frac{dQ_5^i}{dt} = 0$. Las masas de los quarks rompen esta simetría explícitamente, y tenemos

$$\partial^\mu V_\mu^j(x) = i\bar{\psi}(x)\left[m, \frac{\lambda^j}{2}\right]\psi(x), \quad (2.38)$$

$$\partial^\mu A_\mu^j(x) = i\bar{\psi}(x)\left\{m, \frac{\lambda^j}{2}\right\}\gamma_5\psi(x). \quad (2.39)$$

Como las masas de u y d son muy pequeñas ($m_{u,d} \leq 10$ MeV) comparadas con las masas típicas de los hadrones (~ 1 GeV), esto sugiere que los términos $m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d$ que rompen la simetría quiral, pueden ser tratados como perturbaciones. Sin embargo, para el término $m_s \bar{s}s$ con una masa del quark s bastante mayor ($m_s \sim 150$ MeV) esto no es tan claro. Hay evidencias provenientes de fenómenos hadrónicos de bajas energías [23] y de QCD de red [24, 25], que la simetría quiral $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ se rompe espontáneamente. Esto se evidencia en los condensados quark-antiquark $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ no nulos.

2.3.2. La anomalía axial

Mencionamos que la simetría $U(1)_A$ del lagrangiano $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ con quarks sin masa está rota en la naturaleza. Si hubiese una buena simetría quiral $U(3)_R \otimes U(3)_L$, tendríamos nueve corrientes axiales conservadas en lugar de ocho. Todo el nonete pseudoescalar, incluyendo los piones, kaones, mesones η y η' , deberían aparecer como bosones de Goldstone sin masa. En cambio se observa que el mesón η' , con su masa $m_{\eta'} = 958$ MeV comparable con la masa del nucleón, cae fuera de este esquema. Dicho valor para la masa $m_{\eta'}$ no puede ser explicado, aún teniendo en cuenta la existencia de masa no nulas para los quarks. Este es el “problema η' ”, y se piensa que está relacionado con la anomalía axial de QCD. Las anomalías son simetrías de lagrangianos clásicos que se rompen al incluir efectos cuánticos [26].

Consideremos la corriente axial del singlete de $SU(3)$

$$J_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x), \quad (2.40)$$

relacionada con la simetría $U(1)_A$. En principio, uno esperaría que la divergencia de la corriente se anule en el límite quiral $m \rightarrow 0$. Este es el caso a nivel clásico de $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$, pero usando la teoría cuántica de campos resulta que $\partial^\mu J_{\mu 5}$ es proporcional a un término que incluye campos gluónicos en la forma $E_a B_a = \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}^a$ (producto de campos eléctrico y magnético de color):

$$\partial_\mu J_5^\mu(x) = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} E_a B_a, \quad (2.41)$$

Cabe señalar que la ruptura explícita de la simetría quiral introduce un término adicional $2i\bar{\psi}m\gamma_5\psi$ en el lado derecho de la ecuación (2.41).

Esto se debe a que las ecuaciones no abelianas de Yang-Mills admiten soluciones para las cuales la acción clásica euclídea $\int d^4x E \cdot B$ es finita, llamadas soluciones de instantones [27]. A través de la ecuación (2.41), estos

instantones se acoplan a los quarks. G. t'Hooft demostró en 1976 [20] que esta interacción efectiva entre quarks inducida por los instantones tiene la forma de un determinante de sabor

$$\det[\bar{\psi}_i(1 + \gamma_5)\psi_i] + \det[\bar{\psi}_j(1 - \gamma_5)\psi_j], \quad (2.42)$$

donde los índices de sabor i y j van a través de los quarks u , d y s . Esta interacción comprende los tres sabores simultáneamente, como ilustra la figura 2.3.

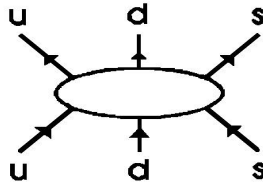


Figura 2.3: Estructura de seis fermiones de sabor

2.3.3. La interacción efectiva en el modelo NJL

Utilizando lo señalado en las subsecciones anteriores, la extensión del lagrangiano NJL a tres sabores resulta

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.43)$$

donde la matriz de masas desnudas dada en este caso por $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ y el lagrangiano de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)}, \quad (2.44)$$

tiene una componente de interacción local de cuatro fermiones $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$ y un término de ruptura de la simetría $U(1)_A$ que es como mínimo un vértice de seis fermiones. La interacción $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$ se construye de modo tal que simule la ruptura $U(1)_A$ por efecto de los instantones.

La interacción de cuatro fermiones debe satisfacer la simetría quirral $U(3)_R \otimes U(3)_L$ junto con la simetría $SU(3)_{color}$ y CPT. La forma más sencilla de esta

interacción es¹

$$\mathcal{L}_{int}^{(4)} = \frac{G}{2} \sum_{i=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^i\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^i\psi)^2]. \quad (2.46)$$

También han sido estudiadas formas más generales que incluyen interacciones vectoriales y axiales, dando lugar a resultados cualitativamente equivalentes.

La interacción $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$ tiene aún una simetría axial $U(1)_A$ no deseada. Como mencionamos antes, una manera de romper esta simetría y mantener la simetría quiral es introduciendo el término de t'Hooft

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = H \{ \det[\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] + \det[\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi] \}, \quad (2.47)$$

que puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = \frac{H}{4} A_{abc} (\bar{\psi}\lambda^a\psi) [(\bar{\psi}\lambda^b\psi)(\bar{\psi}\lambda^c\psi) - 3(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^b\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^c\psi)], \quad (2.48)$$

donde la suma es sobre los índices de sabor $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 8\}$. La constante de acoplamiento H tiene dimensiones de (longitud)⁵ y las A_{abc} son las constantes de estructura simétricas de $SU(3)$ definidas por

$$A_{abc} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} (\lambda_a)_{im} (\lambda_b)_{jn} (\lambda_c)_{kl}. \quad (2.49)$$

De esta forma, la estructura de $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$ es una interacción de seis fermiones con mezcla de sabores, para $N_f = 3$. En particular, este término es esencial para generar el desdoblamiento de masas observado en el sistema $\eta - \eta'$.

Entonces, el lagrangiano total del modelo NJL en $SU(3)$ es:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)}. \quad (2.50)$$

¹Dado que las corrientes fundamentales de quarks en QCD son las corrientes de color $j_\mu^a = \bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi$, es natural analizar la interacción local más simple que es posible construir a través del acoplamiento de dos de tales corrientes:

$$\mathcal{L}_{int}^{(4)} = -G \sum_{i=0}^8 (\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda^i\psi)^2, \quad (2.45)$$

Donde G es la constante de acoplamiento efectiva. Es fácil ver que esta interacción es invariante ante las transformaciones de sabor $U(3)_R \otimes U(3)_L$. Aplicando a (2.45) las transformaciones de Fierz (ver [6, 21]), es posible reescribir dicha interacción, de manera de obtener las interacciones en los canales escalar y pseudoescalar, como el de la ecuación (2.46).

2.4. Interacciones no locales y separables

En las secciones anteriores hemos descrito un sistema de quarks interactuando a través de cuatro y seis fermiones, que es invariante quiral y local. La naturaleza local de dichas interacciones permite simplificar notablemente los cálculos, pero también trae consecuencias no deseadas, tales como integrales divergentes y falta de confinamiento. En cuanto a la primera consecuencia, hay varios tipos de regularización usadas en la literatura (*cut-off*, Pauli-Villars, etc.), y todos ellos llevan a resultados cualitativamente parecidos, por lo cual no parece haber una razón física para decidirse por uno u otro esquema. En cuanto a la segunda consecuencia, el modelo usado lleva a la existencia de quarks no confinados, libres, hecho contrario a la experiencia.

Una posible solución a estos problemas es utilizar el modelo de intercambio de un gluón para generar la interacción efectiva entre quarks. Esto contribuye a la acción efectiva del modelo

$$S = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p)(\not{p} - m)\psi(p')(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') + S_{int}, \quad (2.51)$$

con un término de interacción de la forma

$$S_{int} = -\frac{g^2}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_2}{(2\pi)^4} j_\mu^a(p_1, p'_1) D_{\mu\nu}^{ab}(p_1, p'_1, p_2, p'_2) j_\nu^b(p_2, p'_2) \quad (2.52)$$

donde g es la constante de acoplamiento quark-gluón y la matriz $D_{\mu\nu}^{ab}(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ representa un propagador efectivo del gluón, mientras que los factores

$$j_\mu^a(p, p') = g(p, p') \bar{\psi}(p) \gamma^\mu \lambda_a \psi(p'), \quad (2.53)$$

son las corrientes (no locales) de quarks del octete de color, las que a través de las transformaciones de Fierz (ver [6, 21]), pueden ser expresadas como

$$j_\mu^a(p, p') = g(p, p') \bar{\psi}(p) \Gamma_a \psi(p'), \quad (2.54)$$

donde los operadores Γ_a distinguen las interacciones en los canales escalar ($\Gamma_a = \lambda_a$) y pseudoescalar ($\Gamma_a = i\gamma_5 \lambda_a$).

Los modelos que producen interacciones de intercambio de un gluón suponen que los efectos fuertes no perturbativos pueden ser tenidos en cuenta modificando el propagador del gluón [28]. Usualmente éste se modifica de manera que ajuste fenomenológicamente, y también podría ser elegido tal

que produzca el confinamiento del potencial. El propagador del gluón efectivo provee también una forma natural de introducir la no localidad en la interacción quark-quark. Esta no localidad puede ser usada para regularizar las divergencias ultravioletas del modelo [29]. Una forma posible podría ser:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g_{\mu\nu} \delta^{ab} D(p_1, p'_1, p_2, p'_2). \quad (2.55)$$

Se pueden reemplazar las dos funciones desconocidas $g(p, p')$ y $D(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ del sector gluónico de QCD, por un núcleo de interacción de cuatro puntos

$$K(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g(p_1, p'_1) D(p_1, p'_1, p_2, p'_2) g(p_2, p'_2). \quad (2.56)$$

En orden de dar una descripción adecuada de las correlaciones hadrónicas de dos partículas en un sistema de muchos quarks, introducimos los momentos total y relativo $P = p_1 - p_2$, $p = (p_1 + p_2)/2$, respectivamente.

Si elegimos la forma separable del núcleo de interacción de (2.56) de acuerdo a la figura (2.4) se obtiene que

$$K(p, P; p', P') = -K_0 g(p) g(p') \delta_{P, P'}. \quad (2.57)$$

donde K_0 es una constante que resulta ser proporcional a la constante de acoplamiento G y la delta de Kronecker nos asegura la conservación del cuadrimento total. Para el presente trabajo, consideraremos un factor de forma $g(p)$ del tipo gaussiano.

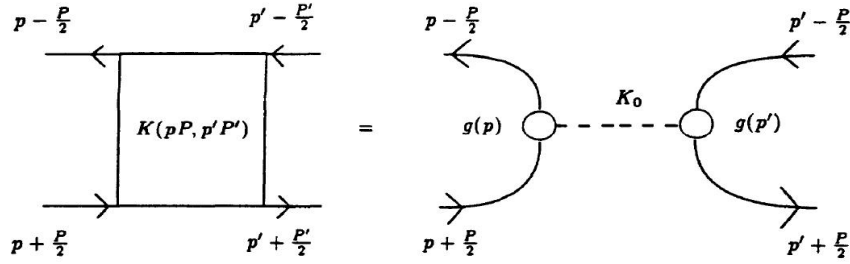


Figura 2.4: Núcleo de interacción de cuatro puntos en la aproximación separable

Como sucede con la versión local del modelo NJL, la simetría quiral es espontáneamente rota en este esquema no local para valores suficientemente

grandes de la constante de acoplamiento g . Trabajando en la aproximación de Hartree, con N_c colores y N_f sabores en el sistema, la autoenergía $\Sigma(q)$ o masa dinámica del quark viene dada por

$$\Sigma(q) = m + [\Sigma(0) - m]g(q), \quad (2.58)$$

donde m es la masa desnuda del quark, y la masa dinámica a momento cero $\Sigma(0)$ es una solución de la ecuación del “gap”

$$\Sigma(0) - m = 4gN_cN_f \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{\Sigma(0)}{q^2 + [\Sigma(0)]^2}, \quad (2.59)$$

Entonces, para determinar $\Sigma(q)$ sólo es necesario conocer la constante $\Sigma(0)$ y realizar una elección adecuada del regulador.

En el espacio de Minkowsky, para que un quark exista en forma aislada se debe cumplir que

$$\Sigma^2(q_p) = q_p^2, \quad (2.60)$$

para valores reales q_p del cuadrimomento. Si nos colocamos en el sistema de la partícula ($\vec{p} = 0$) y utilizamos la ecuación (2.58), nos queda

$$m + [\Sigma(0) - m]g(q_0) = q_0. \quad (2.61)$$

Se ve claramente que, según el factor de forma $g(q)$ que se use, habrá un valor crítico de $\Sigma(0)$ a partir del cual no existen soluciones reales de esta ecuación. O sea, el propagador del quark no tendrá polos reales, y es posible interpretar esto como una situación de confinamiento. Para determinar dicho valor crítico, basta pedir que se cumplan dos condiciones en ese punto: las dos curvas definidas por los miembros izquierdo y derecho de (2.60) se deben cruzar (esto es la ecuación(2.61)), y tener la misma pendiente, es decir

$$2[\Sigma(0) - m]g(q_0) \frac{dr}{dq_0} = 1. \quad (2.62)$$

Luego, las ecuaciones (2.61) y (2.62) definen el $\Sigma(0)$ crítico.

Podemos por ejemplo considerar como factor de forma una función gaussiana del cuadrimomento euclídeo

$$g(q) = e^{-\frac{q^2}{\Lambda^2}} \quad (2.63)$$

donde Λ es un *cut-off* natural al modelo que describe el rango de no localidad. Esta función cumple con los requerimientos básicos de ser invariante

de Lorentz y decaer suficientemente rápido para momentos altos, de manera de mantener las integrales acotadas. Además, en el espacio de coordenadas también decae rápidamente con la distancia, lo que implica confinamiento. Pasando el regulador $g(q)$ al espacio de Minkowski ($q_0 \rightarrow iq_0$), la ecuación (2.61) queda

$$m + [\Sigma(0) - m]e^{\frac{-q_0^2}{\Lambda^2}} = q_0, \quad (2.64)$$

En ella vemos que, modificando el valor del parámetro $\Sigma(0)$, hacemos que la exponencial suba o baje, intersectando o no a la recta. De esta forma, la ecuación (2.61) tendrá dos, una (caso crítico) o ninguna solución real. En este último caso, habrá dos soluciones complejas correspondientes al caso de un par de polos complejos en el propagador del quark. Esto, a su vez, corresponde a quarks aislados con una vida media finita, similar a lo que ocurre en otros modelos de confinamiento [30, 31].

Entonces, una adecuada elección del regulador no local y de los parámetros del modelo permite llevarnos a cierta forma de confinamiento de los quarks, haciendo que el propagador no tenga polos a energías reales. En el espacio euclídeo esto equivale a que el propagador no tenga polos imaginarios puros.

La justificación final del factor de forma utilizado (y del modelo en general) viene dada por su poder explicativo y predictivo de la realidad. En los trabajos realizados en $SU(2)$ con reguladores gaussianos [11], las propiedades obtenidas de los mesones muestran un buen acuerdo con lo observado empíricamente.

Capítulo 3

Modelo no local con extrañeza

En este capítulo desarrollaremos el formalismo necesario para extender el modelo NJL no local para el caso de los tres sabores ($N_c = 3$) de quarks livianos, para temperatura y potencial químico nulos.

3.1. La acción efectiva

Partimos de la función de partición gran canónica a temperatura y potencial químico nulos

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E}, \quad (3.1)$$

en la cual S_E es la acción efectiva euclídea. Generalizando las expresiones (2.46) y (2.48) al caso no local, la acción S_E queda definida por

$$S_E = \int d^4x \{ \bar{\psi}(x) [-i\rlap{\not{\partial}} + m] \psi(x) - \frac{G}{2} [j_a^S(x) j_a^S(x) + j_a^P(x) j_a^P(x)] - \frac{H}{4} A_{abc} [j_a^S(x) j_b^S(x) j_c^S(x) - 3j_a^S(x) j_b^P(x) j_c^P(x)] \}, \quad (3.2)$$

donde ψ es el vector de campos fermiónicos para los tres sabores más livianos, $\rlap{\not{\partial}}$ es el operador euclídeo

$$\rlap{\not{\partial}} = \gamma_4 \frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}, \quad (3.3)$$

con $\gamma_4 = i\gamma_0$, $\tau = it$, m es la matriz de masas desnudas de los quarks, $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, y las A_{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$

definidas en (2.49). De aquí en adelante trabajaremos con el límite de simetría de isoespín, en el cual $m_u = m_d$. Las corrientes $j_a^{S,P}(x)$ están dadas por

$$j_a^S(x) = \int d^4z g(z) \bar{\psi} \left(x + \frac{z}{2} \right) \lambda_a \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) \quad (3.4)$$

$$j_a^P(x) = \int d^4z g(z) \bar{\psi} \left(x + \frac{z}{2} \right) i\gamma_5 \lambda_a \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) \quad (3.5)$$

donde el regulador $g(z)$ está dado por

$$g(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-izp} g(p); \quad g(p) = e^{-\frac{p^2}{\Lambda^2}} \quad (3.6)$$

Las matrices λ_a , con $a = 0, \dots, 8$, son las ocho matrices de Gell-Mann de 3×3 que generan $SU(3)$, más $\lambda_0 = \sqrt{2/3}\mathbb{I}_3$.

La función de partición (3.1) puede ser bosonizada, introduciendo los campos de mesones escalar $\sigma_a(x)$ y pseudoescalar $\pi_a(x)$, junto con los campos auxiliares $S_a(x)$ y $P_a(x)$, tales que

$$f(j_a^S(x), j_a^P(x)) = \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a f(S_a(x), P_a(x)) \times e^{\int d^4x \{ \sigma_a(x) [S_a(x) - j_a^S(x)] + \pi_a(x) [P_a(x) - j_a^P(x)] \}}. \quad (3.7)$$

Por lo tanto, integrando sobre los campos fermiónicos obtenemos

$$Z^{bos} = \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \det A \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a e^{\int d^4x (\sigma_a S_a + \pi_a P_a)} \times e^{\int d^4x [\frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c)]}, \quad (3.8)$$

donde el operador A es, en el espacio de momentos,

$$A(p, p') = (-\not{p} + m)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') + g \left(\frac{p+p'}{2} \right) \lambda_a [\sigma(p - p') + i\gamma_5 \pi(p - p')]. \quad (3.9)$$

Si $H = 0$, el exponente en la segunda línea de (3.8) sería cuadrático y por lo tanto, dicha integral podría resolverse en forma exacta. Como este no es el caso, utilizamos la aproximación de fase estacionaria (AFE). Es esta aproximación

$$\int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a e^{\int d^4x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c)]} \simeq e^{\int d^4x [\sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \frac{G}{2} (\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3\tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c)]} \quad (3.10)$$

donde $\tilde{S}_a(\sigma_b, \pi_c)$ y $\tilde{P}_a(\sigma_b, \pi_c)$ minimizan el integrando, es decir, satisfacen

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta S_a} \int d^4x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2}(S_a S_a + P_a P_a) \\ & + \frac{H}{4} A_{abc}(S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c)] \Big|_{S_a, P_a = \tilde{S}_a, \tilde{P}_a} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta P_a} \int d^4x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2}(S_a S_a + P_a P_a) \\ & + \frac{H}{4} A_{abc}(S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c)] \Big|_{S_a, P_a = \tilde{S}_a, \tilde{P}_a} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

realizando estos cálculos se obtiene

$$\sigma_a + G\tilde{S}_a + \frac{3H}{4} A_{abc}(\tilde{S}_b \tilde{S}_c - \tilde{P}_b \tilde{P}_c) = 0, \quad (3.13)$$

$$\pi_a + G\tilde{P}_a - \frac{3H}{2} A_{abc} \tilde{S}_b \tilde{P}_c = 0. \quad (3.14)$$

Entonces, aplicando AFE nos queda la acción efectiva bosonizada

$$\begin{aligned} S_E^{bos} &= -\ln \det A - \int d^4x [\sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \frac{G}{2}(\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a) \\ & + \frac{H}{4} A_{abc}(\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3\tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Suponiendo ahora que los campos σ_a tienen valores de campo medio $\bar{\sigma}_a$ no nulos, que son invariantes traslacionales, mientras que los campos pseudoescalares π_a no los tienen. Es decir, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) &= \bar{\sigma}_a + \delta\sigma_a(x), \\ \pi_a(x) &= \delta\pi_a(x). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Podemos ahora desarrollar la acción efectiva hasta el segundo orden en $(\delta\sigma_a, \delta\pi_a)$ alrededor de estos valores de expectación. El orden cero corresponde a la aproximación de campo medio (ACM), el término lineal desaparece debido a que $\bar{\sigma}_a$ minimiza la acción efectiva, y consideraremos el desarrollo hasta el último término cuadrático. La acción efectiva tendrá entonces la forma

$$S_E \simeq S_E^{ACM} + S_E^{(2)}. \quad (3.17)$$

Analicemos primero el orden cero. En el espacio de momentos tenemos que

$$\sigma_a^{(0)}(p-p') = (2\pi)^4 \bar{\sigma}_a \delta^{(4)}(p-p'), \quad \pi_a^{(0)}(p-p') = 0, \quad (3.18)$$

por lo tanto

$$A(p-p') = (-\not{p}+m)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p') + g\left(\frac{p+p'}{2}\right) \lambda_a [\sigma(p-p') + i\gamma_5 \pi(p-p')] \quad (3.19)$$

a orden cero queda

$$A^{(0)}(p-p') = [-\not{p} + m + \lambda_a g\left(\frac{p+p'}{2}\right) \bar{\sigma}_a] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p'). \quad (3.20)$$

Utilizando la identidad $\ln \det A = \text{tr} \ln A$, donde la traza es sobre los índices de Dirac, color y sabor, se obtiene una acción efectiva en ACM de la forma

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{ACM}}{V^{(4)}} = & -2N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_f \ln[p^2 + \Sigma^2(p)] \\ & - \bar{\sigma}_a \bar{S}_a - \frac{G}{2} \bar{S}_a \bar{S}_a - \frac{H}{4} A_{abc} \bar{S}_a \bar{S}_b \bar{S}_c, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde ahora la traza Tr_f es sólo sobre sabor, $V^{(4)}$ es el volumen en el espacio cuadridimensional, $\Sigma(p) = m + \lambda_a \bar{\sigma}_a g(p)$ y los valores de campo medio \bar{S}_a están dados por $\bar{S}_a = \tilde{S}_a(\bar{\sigma}_b, 0)$. Si minimizamos esta última expresión con respecto a $\bar{\sigma}_a$ obtenemos

$$\bar{S}_a = -2N_c \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_a} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_f \ln[p^2 + \Sigma^2(p)], \quad (3.22)$$

que junto con la ecuación (3.13) en la ACM

$$\bar{\sigma}_a + G \bar{S}_a + \frac{3H}{4} A_{abc} \bar{S}_b \bar{S}_c = 0, \quad (3.23)$$

conforman las llamadas ecuaciones del “gap”.

Notemos que, debido a la conservación de la carga, solamente los $\bar{\sigma}_{a=0,3,8}$ pueden ser distintos de cero, por ser los únicos diagonales. Más aún, en el límite de isoespín también se anula $\bar{\sigma}_3$. De aquí en adelante nos conviene cambiar de la base $\{X_a\}$, con $a = 0, 3, 8$, a una nueva base $\{X_i\}$, donde

los índices $i = 1, 2, 3$ o equivalentemente $i = u, d, s$, tal que $\lambda_0 X_0 + \lambda_3 X_3 + \lambda_8 X_8 = \text{diag}(X_u, X_d, X_s)$, es decir,

$$\begin{aligned} X_u &= \sqrt{\frac{2}{3}}X_0 + X_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}X_8 \\ X_d &= \sqrt{\frac{2}{3}}X_0 - X_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}X_8 \\ X_s &= \sqrt{\frac{2}{3}}X_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}X_8. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En esta base, la acción efectiva de la ecuación (3.21) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{ACM}}{V^{(4)}} &= -2N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_f \ln[p^2 + \Sigma^2(p)] \\ &\quad - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_i \bar{S}_i - \frac{G}{2} \bar{S}_i \bar{S}_i - \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\Sigma(p) = \text{diag}(\Sigma_u(p), \Sigma_d(p), \Sigma_s(p))$, con $\Sigma_i(p) = m_i + \bar{\sigma}_i g(p)$, $i = u, d, s$. Se observa que en el límite de isoespín, como $\bar{\sigma}_u = \bar{\sigma}_d$, entonces $\Sigma_u(p) = \Sigma_d(p)$.

Minimizando la ecuación (3.25) en esta nueva base, se obtiene

$$\bar{S}_i = -8N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g(p) \frac{\Sigma_i(p)}{p^2 + \Sigma_i^2(p)}, \quad (3.26)$$

que integra el conjunto de ecuaciones autoconsistentes del “gap” (3.23), que en el sistema $\{u, d, s\}$ resultan:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_u + G\bar{S}_u + \frac{H}{2}\bar{S}_d\bar{S}_s &= 0, \\ \bar{\sigma}_d + G\bar{S}_d + \frac{H}{2}\bar{S}_s\bar{S}_u &= 0, \\ \bar{\sigma}_s + G\bar{S}_s + \frac{H}{2}\bar{S}_u\bar{S}_d &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En el caso de isoespín simétrico, es decir $m_u = m_d$, estas ecuaciones se reducen a dos

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_u + G\bar{S}_u + \frac{H}{2}\bar{S}_u\bar{S}_s &= 0, \\ \bar{\sigma}_s + G\bar{S}_s + \frac{H}{2}\bar{S}_u^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Los condensados quirales están dados por los valores de expectación de vacío $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ y $\langle \bar{s}s \rangle$. Para hallarlos, derivamos la acción efectiva respecto de la masa desnuda del quark correspondientes, de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}u \rangle &= -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Sigma_u(p)}{p^2 + \Sigma_u^2(p)} - \frac{m}{p^2 + m_u^2} \right], \\ \langle \bar{s}s \rangle &= -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Sigma_s(p)}{p^2 + \Sigma_s^2(p)} - \frac{m}{p^2 + m_s^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ahora calcularemos el término cuadrático de la acción efectiva en (3.17). Para ello, primero desarrollaremos el determinante fermiónico de (3.15) a segundo orden en las fluctuaciones de los mesones, y tras un arduo cálculo se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} -(\ln \det A)^{(2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \{ [K_{ij}(q) - M_{ij}(q)] \delta\sigma_{ij}(q) \delta\sigma_{ij}(-q) \\ &\quad + [K_{ij}(q) + M_{ij}(q)] \delta\pi_{ij}(q) \delta\pi_{ij}(-q) \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

con

$$\begin{aligned} K_{ij}(q) &= -8N_c \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} g^2(q') q^+ q^- \frac{1}{(q^+)^2 + \Sigma_i^2(q^+)} \frac{1}{(q^-)^2 + \Sigma_j^2(q^-)}, \\ M_{ij}(q) &= -8N_c \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} g^2(q') q^+ q^- \frac{1}{(q^+)^2 + \Sigma_i^2(q^+)} \frac{1}{(q^-)^2 + \Sigma_j^2(q^-)} \Sigma_i(q^+) \Sigma_j(q^-), \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde,

$$q^\pm = q' \pm \frac{q}{2}; \quad i, j = u, d, s, \quad (3.32)$$

La ecuación (3.30) puede llevarse a una forma más compacta:

$$S_{E,cin}^{(2)} = -(\ln \det A)^{(2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [C_{ij}^+ \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{ji}(-p) + C_{ij}^- \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{ji}(-p)] \quad (3.33)$$

con

$$C_{ij}^\pm(p^2) = -8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(q) \frac{[q^+ q^- \mp \Sigma_i(q^+) \Sigma_j(q^-)]}{[(q^+)^2 + \Sigma_i^2(q^+)] [(q^-)^2 + \Sigma_j^2(q^-)]}. \quad (3.34)$$

Por otro lado, el término del potencial en (3.15) resulta

$$S_{E,pot}^{(2)} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \{ [(r^+)^{-1}]_{ij,kl} \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) + [(r^-)^{-1}]_{ij,kl} \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p) \} \quad (3.35)$$

donde

$$(r^\pm)^{-1}_{ij,kl} = G \delta_{ki} \delta_{lj} \pm \frac{H}{2} \epsilon_{jkn} \epsilon_{iln} \bar{S}_n. \quad (3.36)$$

Vemos entonces, que el término de segundo orden en las fluctuaciones de los campos de la acción efectiva tiene la forma

$$\begin{aligned} S_E^{(2)} &= S_{E,cin}^{(2)} + S_{E,pot}^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [G_{ij,kl}^+(p^2) \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) + G_{ij,kl}^-(p^2) \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p)], \end{aligned} \quad (3.37)$$

con

$$G_{ij,kl}^\pm(p^2) = C_{ij}^\pm(p^2) \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{1}{2} (r^\pm)^{-1}_{ij,kl}, \quad (3.38)$$

donde las integrales $C_{ij}^\pm(p^2)$ están dadas en (3.34), y $(r^\pm)^{-1}_{ij,kl}$ en (3.36).

3.2. Masas y constantes de acoplamiento quark-mesón

De la acción cuadrática efectiva $S_E^{(2)}$ de la ecuación (3.37) es posible obtener las masas de los mesones escalares y pseudoescalares y las constantes de acoplamiento quark-mesón. De aquí en adelante consideraremos sólo el caso de mesones pseudoescalares. Las expresiones correspondientes al caso escalar son completamente equivalentes, sólo hay que reemplazar los índices “-” por “+”.

Introducimos la base de los mesones físicos definida por

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_a \phi_a)_{ij}, \quad (3.39)$$

donde $\phi = \sigma, \pi$, y los índices i, j corren de 1 a 3. De este modo, tenemos por ejemplo para el caso pseudoescalar

$$\frac{(\delta\pi_{ij})}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Luego del cambio de base, la parte pseudoescalar del término cuadrático de la acción efectiva resulta

$$\begin{aligned} S_E^{(2)} \Big|_{\text{pseudoescalar}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \{ G_\pi(p^2) [\pi^0(p)\pi^0(-p) + 2\pi^+(p)\pi^-(-p)] \\ &\quad + G_K(p^2) [2K^0(p)\bar{K}^0(-p) + 2K^+(p)K^-(-p)] \\ &\quad + G_\eta(p^2) [\eta(p)\eta(-p)] + G_{\eta'}(p^2) [\eta'(p)\eta'(-p)] \}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde los campos η y η' están relacionados con los estados η_0 y η_8 mediante

$$\eta = \eta_8 \cos \theta - \eta_0 \sin \theta, \quad (3.42)$$

$$\eta' = \eta_8 \sin \theta + \eta_0 \cos \theta, \quad (3.43)$$

donde el ángulo de mezcla θ está definido de manera tal que no haya mezcla $\eta - \eta'$ a nivel de la acción cuadrática.

Las funciones $G_P(p^2)$ introducidas en (3.41) están dadas por

$$G_\pi(p^2) = (G + \frac{H}{2} \bar{S}_s)^{-1} + C_{uu}^2(p^2), \quad (3.44)$$

$$G_K(p^2) = (G + \frac{H}{2} \bar{S}_u)^{-1} + C_{us}^2(p^2), \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} G_\eta(p^2) &= \frac{G_{88}^-(p^2) + G_{00}^-(p^2)}{2} \\ &\quad - \sqrt{[G_{08}^-(p^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(p^2) - G_{00}^-(p^2)}{2} \right]^2}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} G_{\eta'}(p^2) &= \frac{G_{88}^-(p^2) + G_{00}^-(p^2)}{2} \\ &\quad + \sqrt{[G_{08}^-(p^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(p^2) - G_{00}^-(p^2)}{2} \right]^2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde

$$G_{88}^-(p^2) = \frac{1}{3} \left[\frac{6G-4H\bar{S}_u-2H\bar{S}_s}{2G^2-GH\bar{S}_s-H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(p^2) + 2C_{ss}^-(p^2) \right], \quad (3.48)$$

$$G_{00}^-(p^2) = \frac{1}{3} \left[\frac{6G+4H\bar{S}_u-2H\bar{S}_s}{2G^2-GH\bar{S}_s-H^2\bar{S}_u^2} + 2C_{uu}^-(p^2) + C_{ss}^-(p^2) \right], \quad (3.49)$$

$$G_{08}^-(p^2) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{H(\bar{S}_s-\bar{S}_u)}{2G^2-GH\bar{S}_s-H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(p^2) - C_{ss}^-(p^2) \right]. \quad (3.50)$$

Las masas de los mesones se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$G_P(-m_p^2) = 0, \quad (3.51)$$

con $P = \pi, \kappa, \eta, \eta'$, mientras que los ángulos de mezcla θ_η y $\theta_{\eta'}$, que en general son distintos entre sí, están dados por

$$\tan 2\theta_{\eta,\eta'} = \frac{2G_{08}^-(p^2)}{G_{00}^-(p^2) - G_{88}^-(p^2)} \Big|_{p^2=-m_{\eta,\eta'}^2}. \quad (3.52)$$

Se puede definir campos de mesones normalizados $\tilde{\phi}(p) = Z_\phi^{-1/2}\phi(p)$ de tal forma que la acción cuadrática efectiva tenga la forma canónica

$$S_E^{(2)} \Big|_\phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (p^2 + m_\phi^2) \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p). \quad (3.53)$$

Entonces, comparando con (3.41), cerca de los polos del mesón tendremos

$$(p^2 + m_\phi^2) Z_\phi^{-1} = G_\phi(p^2), \quad (3.54)$$

y de esta forma, las constantes Z_p que renormalizan las funciones de onda están dadas por

$$Z_P^{-1} = \frac{dG_P(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=-m_P^2}, \quad (3.55)$$

con $P = \pi, K, \eta$ y η' .

Finalmente, las constantes de acoplamiento quark-mesón G_{Pq} están dadas por los residuos de los propagadores en los polos correspondientes,

$$G_{Pq} = Z_P^{-1/2}. \quad (3.56)$$

3.3. Constantes de decaimiento débil

Por definición, las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoescalares están dadas por los elementos de matriz de las corrientes axiales $A_\mu^a(x)$ entre el vacío y los estados de cada mesón renormalizados, en los polos del propagador:

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \tilde{\phi}_b(p) \rangle = i f_{ab} p_\mu. \quad (3.57)$$

Para $a, b = 1, \dots, 7$, las constantes f_{ab} pueden escribirse como $\delta_{ab} f_\phi$, con $\phi = \pi$ para $a = 1, 2, 3$ y $\phi = K$ para $a = 4, 5, 6, 7$. Por el contrario, como sucede con la matriz de masas, las constantes de decaimiento están mezcladas en el sector $a = 0, 8$.

Para obtener la expresión de la corriente axial, hay que realizar transformaciones de gauge en la acción efectiva S_E introduciendo un conjunto de campos de gauge axiales A_μ^a . Para una teoría local, este procedimiento puede hacerse simplemente reemplazando

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i \Gamma_a A_\mu^a; \quad \Gamma_a = \frac{1}{2} \gamma_5 \lambda_a, \quad (3.58)$$

pero como en nuestro caso estamos trabajando con campos no locales, tendremos que realizar un reemplazo adicional del regulador, según

$$g(y-z) \rightarrow \bar{W}_a(y, x) g(y-z) W_a(x, z), \quad (3.59)$$

con

$$W_a(x, y) = P e^{\int_x^y \Gamma_a A_\mu^a(s) ds_\mu}; \quad \bar{W}_a(x, y) = \gamma_0 W_a(x, y) \gamma_0, \quad (3.60)$$

donde s representa un camino arbitrario que conecta x con y . Utilizaremos el denominado “camino en línea recta” (aunque podría demostrarse que el resultado es independiente del camino elegido), lo que significa que

$$s_\mu = x_\mu + \alpha(y_\mu - x_\mu); \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3.61)$$

Una vez obtenida la acción efectiva de gauge con estos reemplazos, la corriente axial se calcula derivando esta acción con respecto a $A_\mu^a(x)$, y evaluando dicha derivada en $A_\mu^a(x) = 0$. Entonces, derivando las expresiones resultantes con respecto a los campos mesónicos renormalizados, uno puede finalmente identificar las correspondientes constantes de decaimiento débil de

los mesones. Después de un extenso cálculo, encontramos que las constantes de decaimiento del pión y del kaón están dadas por

$$f_\pi = 4f_{uu}(-m_\pi^2)Z_\pi^{1/2} \quad (3.62)$$

$$f_K = 2[f_{us}(-m_K^2) + f_{su}(-m_K^2)]Z_K^{1/2} \quad (3.63)$$

donde

$$\begin{aligned} -f_{ij}(p^2) &= \frac{N_c}{p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{[q^- \Sigma_i(q^+) - q^+ \Sigma_j(q^-)]}{[(q^+)^2 + \Sigma_i^2(q^+)][(q^-)^2 + \Sigma_j^2(q^-)]} \\ &\quad - \frac{N_c}{p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [2g(q) - g(q^-) - g(q^+)] \frac{\Sigma_i(q)}{[q^2 + \Sigma_i^2(q)]} \\ &\quad + \frac{N_c}{p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q) [(\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_j)g(q) - \bar{\sigma}_i g(q^-) - \bar{\sigma}_j g(q^+)] \\ &\quad \times \frac{[q^+ \cdot q^- + \Sigma_i(q^-) \Sigma_j(q^+)]}{[(q^-)^2 + \Sigma_i^2(q^-)][(q^+)^2 + \Sigma_j^2(q^+)]} \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde nuevamente,

$$q^\pm = q \pm \frac{p}{2}; \quad \Sigma_i(p) = m_i + \bar{\sigma}_i g(p), \quad i = u, d, s. \quad (3.65)$$

En el caso del sistema $\eta - \eta'$, pueden definirse dos constantes de decaimiento débil para cada componente $a = 0, 8$ de la corriente axial [34], que pueden escribirse en función de constantes f_{ab} y de los ángulos de mezcla $\theta_{\eta, \eta'}$ definidos en (3.52) como

$$f_\eta^{a=0,8} = [f_{a8}(-m_\eta^2) \cos(\theta_\eta) - f_{a0}(-m_\eta^2) \sin(\theta_\eta)] Z_\eta^{1/2}, \quad (3.66)$$

$$f_{\eta'}^{a=0,8} = [f_{a8}(-m_{\eta'}^2) \sin(\theta_{\eta'}) - f_{a0}(-m_{\eta'}^2) \cos(\theta_{\eta'})] Z_{\eta'}^{1/2}. \quad (3.67)$$

Finalmente, las constantes de decaimiento f_{ab} para $a, b = 0, 8$ están relacionadas con las f_{ij} definidas en (3.64) por

$$f_{88}(p^2) = \frac{4}{3}[2f_{ss}(p^2) + f_{uu}(p^2)], \quad (3.68)$$

$$f_{00}(p^2) = \frac{4}{3}[2f_{uu}(p^2) + f_{ss}(p^2)], \quad (3.69)$$

$$f_{08}(p^2) = f_{80}(p^2) = \frac{4\sqrt{2}}{3}[f_{uu}(p^2) - f_{ss}(p^2)]. \quad (3.70)$$

En análisis fenomenológicos, las constantes de decaimiento para η y η' usualmente está parametrizadas [35] según

$$\begin{aligned} f_\eta^8 &= f_8 \cos \theta_8; & f_\eta^0 &= -f_0 \sin \theta_8, \\ f_{\eta'}^8 &= f_8 \sin \theta_8; & f_{\eta'}^0 &= -f_0 \cos \theta_8. \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.4. Decaimiento anómalo mesón $\rightarrow \gamma\gamma$

Para ir más allá en el análisis de decaimientos de mesones livianos pseudoescalares, evaluaremos el decaimiento anómalo a dos fotones de π^0, η y η' . En general, las amplitudes correspondientes pueden ser escritas como

$$A(P \rightarrow \gamma\gamma) = e^2 g_{P\gamma\gamma} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} k_1^\alpha k_2^\beta, \quad (3.72)$$

donde $P = \pi^0, \eta, \eta'$, y k_i, ϵ_i son estados para el momento y la polarización respectivamente de los fotones salientes.

En el modelo NJL no local en consideración, los coeficientes $g_{P\gamma\gamma}$ están dados por las integrales de “loops” de los quarks. Además el diagrama de “triángulo” usual, dado por un loop de quark cerrado con vértice correspondiente al mesón y los dos respectivos a los fotones, en el presente esquema se tiene un segundo diagrama [9] en el cual uno de los vértices quark-fotón surge de la contribución del gauge al regulador descrita en (3.59). La suma de ambos diagramas para los decaimientos de π^0, η y η' produce

$$g_{\pi\gamma\gamma} = I_u(m_\pi^2) Z_\pi^{1/2}, \quad (3.73)$$

$$g_{\eta\gamma\gamma} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[[5I_u(m_\eta^2) - 2I_s(m_\eta^2)] \cos \theta_\eta - \sqrt{2}[5I_u(m_\eta^2) + I_s(m_\eta^2)] \sin \theta_\eta \right] Z_\eta^{1/2}, \quad (3.74)$$

$$g_{\eta'\gamma\gamma} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[[5I_u(m_{\eta'}^2) - 2I_s(m_{\eta'}^2)] \sin \theta_{\eta'} + \sqrt{2}[5I_u(m_{\eta'}^2) + I_s(m_{\eta'}^2)] \cos \theta_{\eta'} \right] Z_{\eta'}^{1/2}, \quad (3.75)$$

donde las integrales del loop $I_f(m_P^2)$ están dadas por

$$\begin{aligned} I_f(m_P^2) &= \frac{8}{3} N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{g(q + (k_1 - k_2)/2)}{[q^2 + \Sigma_f^2(q)][(q + k_1)^2 + \Sigma_f^2(q + k_1)][(q - k_2)^2 + \Sigma_f^2(q - k_2)]} \\ &\times \left\{ \Sigma_f(q) + \frac{q^2}{2} \left[\frac{\Sigma_f(q - k_2) - \Sigma_f(q)}{(k_2 \cdot q)} - \frac{\Sigma_f(q + k_1) - \Sigma_f(q)}{(k_1 \cdot q)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde los impulsos de los fotones k_1 y k_2 pueden ser escritos teniendo en cuenta las leyes de conservación como

$$k_1 = (i\frac{m_\pi}{2}, \frac{m_\pi}{2}); \quad k_2 = (i\frac{m_\pi}{2}, -\frac{m_\pi}{2}), \quad (3.77)$$

de donde se obtiene que

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{m_\pi^2}{4} - \frac{m_\pi^2}{4} = -\frac{m_\pi^2}{2}. \quad (3.78)$$

Capítulo 4

Resultados numéricos

Mostraremos aquí los resultados obtenidos, luego de calcular numéricamente las ecuaciones desarrolladas en el capítulo anterior, ajustando los parámetros del modelo (m_s, Λ, G y H), de manera tal que el cálculo reproduzca los siguientes valores empíricos: $m_\pi = 139,0$ MeV, $m_K = 495,0$ MeV, $m_{\eta'} = 958,0$ MeV y $f_\pi = 92,4$ MeV. La masa m_u se dejó como parámetro libre, pero siempre respetando que su valor se hallara dentro del rango de valores empíricos. Los cálculos se llevaron a cabo utilizando un regulador de tipo gaussiano, dado por

$$g(p^2) = e^{-\frac{p^2}{\Lambda^2}} \quad (4.1)$$

donde Λ es uno de los parámetros libres del modelo que hace las veces de *cut-off* covariante para el rango de momentos. De esta manera, se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla de la tabla 4.1, donde también se incluyen, en los casos en que esté disponible, los valores empíricos de las magnitudes listadas.

El rango de valores utilizados para la masa del quark up , m_u fue elegido de manera tal que, no sólo estuviese dentro del rango de valores fenomenológicamente aceptables. Sino que además nos asegurara un correcto funcionamiento de los programas de cálculo, ya que para valores fuera del mismo, nos encontrábamos con que resultaba muy difícil ajustar los parámetros del modelo simultáneamente a todos los valores requeridos debido a que los resultados fluctuaban en gran manera. En cambio, si $5,0 \text{ MeV} \leq m_u \leq 6,0 \text{ MeV}$ el cálculo numérico resultaba posible y hasta sencillo de lograr.

Examinando la tabla de resultados puede verse que, para los valores elegidos de m_u , los resultados para los condensados $\langle \bar{u}u \rangle$ se encuentran dentro

del rango de valores mencionados en la literatura (ver valores y referencias en hep-ph/0607023). Los valores obtenidos para las masas dinámicas de los quarks $\Sigma_u(0)$ y $\Sigma_s(0)$, son similares a los valores obtenidos en la mayoría de los modelos efectivos [4, 5, 10, 33]. Los valores obtenidos para las constantes de decaimiento débil del kaón y del mesón η son también fenomenológicamente aceptables. En particular, el valor obtenido para el cociente f_K/f_π es significativamente mejor que el obtenido en el modelo NJL local, donde las constantes de decaimiento del kaón y del pión son aproximadamente iguales [4, 5, 10], en contraste con la evidencia experimental. Ésto pone de manifiesto la ventaja de poder disponer de un parámetro adicional de ajuste.

El problema de definir y ajustar (indirectamente) los ángulos de mezcla y las constantes de decaimiento para el sistema $\eta-\eta'$ ha sido reexaminado varias veces en la literatura (ver [36], por ejemplo). En base general, se tiene que lidiar con dos tipos diferentes de ángulos de mezcla $\theta_{\eta,\eta'}$ y cuatro constantes de decaimiento $f_{\eta,\eta'}^{0,8}$. No obstante, según se aclaró al final de la sección 3.3 ha sido usual parametrizar la mezcla entre ambos estados de mesón y las constantes de decaimiento utilizando un sólo parámetro (un ángulo de mezcla llamado θ) e introduciendo dos constantes de decaimiento f_0 y f_8 . En los últimos años, el análisis ha sido mejorado y muchos autores han considerado la posible no ortogonalidad de $(f_\eta^8, f_{\eta'}^8)$ y $(f_\eta^0, f_{\eta'}^0)$ [35, 37], así como la de los estados η y η' [38]. Mediante las ecuaciones (3.71) se obtuvieron los valores para θ_a y f_a tabulados en el cuadro (4.1).

En nuestro modelo, las constantes de decaimiento f_P^a se calcularon mediante las ecuaciones (3.66)-(3.70). Como se muestra abajo, los ángulos de mezcla θ_8 y θ_0 son en general diferentes, al igual que lo que ocurre con los ángulos θ_η y $\theta_{\eta'}$ obtenidos a partir de (3.52). Notar que esto es consecuencia de la dependencia (algo marcada) en p^2 de las funciones $C_{ij}(p^2)$ y $f_{ij}(p^2)$, definidas en (3.34) y (3.64) respectivamente.

También es importante destacar que se obtuvo una muy buena predicción para la $g_{\pi\gamma\gamma}^2$. En este sentido, el modelo no local muestra un mayor grado de consistencia en comparación con el modelo NJL local estándar, donde los momentos de los quarks en el diagrama anómalo debería ir más allá del límite de corte para obtener un buen acuerdo con los valores experimentales. Para el caso del decaimiento anómalo para η y η' los valores obtenidos caen fuera del rango de valores empíricos. Esta diferencia puede deberse a las diferencias que tenemos en los ángulos de mezcla comentadas en el párrafo anterior. Sin embargo, dado que la variación en los valores obtenidos para $g_{\eta'\rightarrow\gamma\gamma}$ tiene un comportamiento lineal respecto de la variación del valor elegido para la

masa m_u , se logró encontrar que para $m_u = 5,36$ MeV, se obtiene un perfecto ajuste entre el valor calculado y el empírico para $g_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$.

Además, se compararon los resultados con los publicados [39] para un modelo NJL no local y efectivo en $SU(3)$ que, en lugar de utilizar el modelo efectivo de intercambio de un gluón, se utilizó el modelo de instantones descrito en [6]. Se encontró que en general los valores obtenidos mediante los dos métodos son relativamente cercanos, a pesar de que no fueron aplicados para el mismo rango de valores para las masas m_u y que se utilizó para el ajuste de las constantes del modelo, un valor distinto para la constante de decaimiento del pión. Esto nos lleva a suponer que ambos modelos resultan equivalentes, tal como se propone en [6].

Magnitud	Regulador Gaussiano					Empíricos
m_u [MeV]	5.0	5.36	5.5	5.75	6.0	(3,4-7,4)
m_s [MeV]	119.2	125.4	127.7	132.1	136.6	(108-209)
Λ [MeV]	842.9	797.2	780.6	752.4	725.8	
$G\Lambda^2$	13.3	14.2	14.5	15.0	15.5	
$-H\Lambda^5$	273.7	266.9	267.2	272.3	286.5	
$-\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ [MeV]	252.1	246.0	243.8	240.0	236.5	
$-\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ [MeV]	249.7	239.8	236.0	229.3	222.7	
$\Sigma_u(p=0)$ [MeV]	371.5	397.7	408.7	429.8	452.7	
$\Sigma_s(p=0)$ [MeV]	605.4	639.2	652.2	675.4	697.7	
m_π [MeV]	139.0 *	139.0 *	139.0 *	139.0 *	139.0 *	139
m_κ [MeV]	495.0 *	495.0 *	495.0 *	495.0 *	495.0 *	495
m_η [MeV]	523.3	519.2	518.5	518.5	521.5	547
$m_{\eta'}$ [MeV]	958.0 *	958.0 *	958.0 *	958.0 *	958.0 *	958
θ_η [grados]	-2.3	-3.2	-3.4	-3.3	-2.5	-(10-20)
$\theta_{\eta'}$ [grados]	-40.3	-36.6	-35.7	-34.6	-35.2	
$G_{\pi q}$	3.98	4.27	4.39	4.62	4.88	
$G_{\kappa q}$	4.30	4.68	4.83	5.12	5.40	
$G_{\eta q}$	3.93	4.28	4.42	4.69	4.99	
$G_{\eta' q}$	2.83	2.99	2.98	2.81	2.25	
f_π [MeV]	92.4 *	92.4 *	92.4 *	92.4 *	92.4 *	92.4
f_κ/f_π	1.17	1.16	1.16	1.15	1.15	1.22
$f_{\eta 8}/f_\pi$	1.14	1.13	1.13	1.12	1.12	(1.17-1.22)
$f_{\eta 0}/f_\pi$	0.16	0.17	0.18	0.18	0.16	(0.11-0.37)
$f_{\eta' 8}/f_\pi$	-1.59	-1.20	-1.11	-0.98	-0.88	-(0.42-0.46)
$f_{\eta' 0}/f_\pi$	-2.09	-1.66	-1.56	-1.41	-1.25	(0.98-1.16)
$g^2_{\pi \rightarrow \gamma\gamma}$ [GeV ⁻²]	0.076	0.076	0.075	0.075	0.075	0.075±0.005
$g^2_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ [GeV ⁻²]	0.104	0.100	0.098	0.094	0.085	0.067±0.006
$g^2_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$ [GeV ⁻²]	0.211	0.116	0.094	0.060	0.026	0.116±0.005

Cuadro 4.1: Resultados numéricos obtenidos para las masas efectivas de los quarks, sus condensados quirales, las masas de los mesones pseudoescalares, los ángulos de mezcla, las constantes de acoplamiento quark-mesón, las constantes de decaimiento débil y las de decaimiento anómalo mesón $\rightarrow \gamma\gamma$. Se tomó como parámetro libre (acorde con el rango de valores obtenidos empíricamente) la masa del quark up (m_u), mientras que los parámetros m_s, Λ, G y H se ajustaron de manera tal que reproduzcan los valores empíricos [34] de las masas del pión, del kaón y del mesón η' y de la constante de decaimiento débil del pión (valores marcados con un *).

Magnitud	Regulador Gaussiano					Empíricos
m_u [MeV]	5.0	5.36	5.5	5.75	6.0	(3,4-7,4)
θ_8 [grados]	-54.4	-46.9	-44.7	-41.3	-38.2	-(22-19)
θ_0 [grados]	4.3	6.01	6.5	7.1	7.3	-(10-0)
f_8/f_π	1.96	1.65	1.58	1.49	1.43	(1.2-1.4)
f_0/f_π	2.09	1.67	1.57	1.43	1.26	(1.0-1.3)

Cuadro 4.2: Resultados numéricos obtenidos para los ángulos de mezcla $\theta_{0,8}$ y las constantes de decaimiento débil $f_{0,8}$ obtenidos a partir de (3.71) para comparar nuestros resultados con los mencionados en la literatura. Se tabula además la masa del quark up , m_u para tomar como referencia y poder relacionar con el conjunto de parámetros de la tabla del cuadro (4.1).

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las propiedades hadrónicas y de vacío de mesones livianos pseudoescalares, utilizando un modelo quirral de quarks de tres sabores (u , d y s) con interacciones no locales y separables en el espacio de momentos. El modelo incorpora la interacción de ruptura de simetría $U(1)_A$, debida a la anomalía axial. Se obtuvieron las masas dinámicas de los quarks y los condensados quirales, las masas de los mesones livianos, los correspondientes ángulos de mezcla para η y η' , y las constantes acoplamiento mesón-quark. Finalmente se determinaron las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoescalares y las constantes de decaimiento anómalo mesón $\rightarrow \gamma\gamma$ para los mesones π , η y η' . Todo ello, según lo muestra la tabla del Cuadro 4.1 para el rango de masas desnudas del quark up entre 5,0 y 6,0 MeV. Se consideró el caso de $m_u = 5,36$ con especial atención ya que con el mismo se logra reproducir, no sólo las masas de los mesones π , K y η' y la constante de decaimiento del pión, para las que fueron ajustados los parámetros del modelo, sino que también ajusta perfectamente la constante de decaimiento anómalo $g_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$. Para el resto de los valores de m_u , el valor calculado para esta constante se encuentra fuera del rango de valores empíricos, variando notoriamente entre un valor y otro de la masa del quark up . En cuanto al resto de constantes calculadas, se encontró que, en particular, el resultado obtenido para el cociente f_K/f_π resulta significativamente mejor que el obtenido por el modelo NJL standard, donde las constantes de decaimiento del pión y del kaón resultan ser aproximadamente iguales, en contraste con la evidencia experimental.

En un futuro, sería interesante poder estudiar estas propiedades hadrónicas a temperatura y densidad finita. Un tema para el cual el modelo NJL ha sido

empleado con mucha frecuencia es el estudio del comportamiento de estas propiedades, de manera de poder investigar las características de la transición de la fase quiral [10], que se supone ocurre en QCD a altas temperaturas y/o densidades como las existentes en el universo temprano, el interior de las estrellas compactas y en las colisiones de iones pesados ultrarelativistas. Ésto será tema de futuras investigaciones.

Bibliografía

- [1] F. J. Ynduráin, *The theory of quarks and gluon interactions* (Springer-Verlag, Heilderberg, 1999).
- [2] F. Karsch, Springer Lect. Notes Phys. **583**, 209 (2002).
- [3] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [4] U. Vogl y W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
- [5] S. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).
- [6] G. Ripka, *Quarks bound by chiral fields* (Oxford University Press, Oxford, 1997)
- [7] E. Ruiz Arriola y L.L. Salcedo, Phys. Lett. B **450**, 225 (1999).
- [8] G. Ripka, Nucl. Phys. A **683**, 463 (2001); R.S.Plant y M.C. Birse, Nucl.Phys. A **703**, 717 (2002).
- [9] R.D. Bowler y M.C.Birse, Nucl. Phys. A **582**, 655 (1995); R.S.Plant y M.C. Birse, Nucl.Phys. A **628**, 607 (1998).
- [10] T. Hatsuda y T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, 221 (1994).
- [11] I. General, D.Gómez Dumm y N.N.Scoccola, Phys. Lett.B **506**,267 (2001); D.Gómez Dumm y N.N.Scoccola, Phys. Rev. D **65**, 074021 (2002).
- [12] T.D.Lee, *Particle physics and introduction to field theory* (Harwood Ac. Press, Switzerland, 1981).

- [13] T. Hatsuda y T. Kunihiro, *Progr. Theor. Phys.* **74**, 765 (1985).
- [14] V. Bernard, *Phys. Rev. D* **34**, 1601 (1986).
- [15] T. Kunihiro y T. Hatsuda, *Phys Lett. B* **206**, 385 (1988); **210**, 278(E) (1988); T. Hatsuda y T. Kunihiro, *Z. Phys. C* **51**, 49 (1991).
- [16] V. Bernard, R.L.Jaffe y U.G.Meissner, *Phys. Lett. B* **198**, 92 (1987); *Nucl. Phys. B* **308**, 753 (1988).
- [17] H. Reinhardt y R. Alkofer, *Phys. Lett. B* **207**, 482 (1988).
- [18] M. Takizawa, K. Tsushima, Y. Kohyama y K. Kubodera, *Nucl. Phys. A* **507**, 611 (1990).
- [19] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl y W. Weise, *Nucl. Phys. A* **516**, 429 (1990).
- [20] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976); *Phys. Rev. D* **14**, 3432 (1976).
- [21] M. Buballa, hep-ph/0402234.
- [22] E.V. Shuryak, *The QCD vacuum, hadrons and superdense matter* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [23] B.W. Lee, *Chiral dynamics* (Gordon and Breach, New York, 1972).
- [24] S. Gottlieb *et al.*, *Nucl. Phys. A* **498**, 435c (1989).
- [25] J.B. Kogut, F.K. sinclair y K.C. Wang, *Phys. Lett.* **263**,101 (1991).
- [26] S. B. Treiman, R. Jackiw, B Zumino y E. Witten, *Current algebra and anomalies* (Princeton University Press, Princeton, 1985).
- [27] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz y Y. Tyupkin, *Phys. Lett. B* **59**, 85 (1975).
- [28] D.I. Dyakonov y V.Y.Petrov, *Sov. Phys. JETP* **62**, 204 (1985); *Sov. Phys. JETP* **62**, 431 (1985); *Nucl. Phys. B* **245**, 259 (1985); *Nucl. Phys. B* **272**, 457 (1986); D.I. Dyakonov, V.Y.Petrov y P.V.Pobylitsa, *Nucl. Phys. B* **306**, 809 (1988);
- [29] R.D. Ball, *Int. Journ. Mod. Phys. A5*, 4391 (1990).

- [30] F. T. Hawes, C. D. Roberts y A. G. Williams, Phys. Rev. D **49**, 4683 (1994).
- [31] M. Stingl, Phys. Rev. D **34**, 3863 (1986); **36**, 651(E) (1987).
- [32] D. Blaschke, S. Schmidt y Y. Kalinovsky. Phys. Rev. C **50**, 435 (1994).
- [33] C.D. Roberts y A.G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994); C.D. Roberts y S.M. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, S1 (2000).
- [34] Particle Data Group, K Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [35] H. Leutwyter, Nucl. Phys.Proc. Suppl. **64**, 223 (1998).
- [36] T. Feldmann, Int.J.Mod.Phys. A **15**, 159 (2000).
- [37] T. Feldmann, P.Kroll y B.Stech, Phys.Rev. D **58**, 114006 (1998); Phys.Lett. B **449**, 339 (1999).
- [38] R. Escribano y J.M.Frère, Phys.Lett. B **459**, 288 (1999).
- [39] A. Scarpettini, D.Gómez Dumm y N.N.Scoccola, Phys.Rev. D **69**, 114018 (2004).

Agradecimientos

A mis padres y hermanos, por acompañarme y ayudarme siempre, sin importar las distancias.

A mi director, el Dr. Norberto N. Scoccola, por su paciencia y dedicación.

A mis profesores, por su ineludible esfuerzo para que todos aprendamos “algo”.

A mis compañeros y amigos, porque sin ellos éste habría sido un camino muy solitario y difícil de recorrer.

A mi novia, por su amor y compañía, aún en los momentos más difíciles.

Y a aquellos que, directa o indirectamente, aportaron su granito de arena, para que este sueño sea realidad.

A todos ellos, mis más sinceros agradecimientos.