Propiedades electromagnéticas de los hiperones en el modelo solitónico de estados ligados

Tesista: Lic. Carlos L. Schat*

Director de Tesis: Dr. Norberto N. Scoccola† ‡ §

October 4, 2000

Resumen: En este trabajo estudiamos algunos aspectos de la estructura electromagnética de los hiperones extraños utilizando el modelo solitónico de estados ligados. Hacemos predicciones para los decaimientos electromagnéticos del decuplete al octete [1] y para las polarizabilidades del octete [2]. También estudiamos propiedades electromagnéticas y fuertes del estado de paridad negativa $\Lambda(1405)$. En particular calculamos las amplitudes de sus decaimientos radiativos y evaluamos la constante de acoplamiento fuerte $g_{\Lambda^* NK}$ [3]. Estas predicciones son de interés para los experimentos que se realizarán en un futuro próximo en CEBAF, FERMILAB y CERN [4, 5, 6, 7].

*Becario de la Comisión Nacional de Energía Atómica
E-mail: schat@tandar.cnea.edu.ar
†Departamento de Física , Comisión Nacional de Energía Atómica
Av.Libertador 8250, (1429) Buenos Aires, Argentina.
‡INFN, Sezione di Milano, via Celoria 16, I-20133 Milano, Italy.
§Investigador del CONICET, Argentina.

Contents

1 Introducción **2**

2 El modelo **5**

2.1 La acción . . . 5

2.2 El ansatz . . . 8

2.3 Las coordenadas colectivas . . . 13

2.4 Resultados numéricos para el espectro . . . 17

2.5 Apéndice A: Los potenciales . . . 20

2.6 Apéndice B: Las funciones de onda . . . 22

3 Propiedades electromagnéticas estáticas **23**

3.1 La corriente electromagnética . . . 23

3.2 Los momentos magnéticos . . . 25

3.3 Resultados numéricos para los momentos magnéticos . . . 27

3.4 Apéndice A: Expresiones explícitas . . . 29

4 Decaimientos electromagnéticos **33**

4.1 Fórmulas generales . . . 33

4.2 Las expresiones del modelo . . . 35

4.3 Resultados numéricos y conclusiones . . . 39

5 Las polarizabilidades **42**

5.1 La polarizabilidad eléctrica estática . . . 43

5.2 La polarizabilidad magnética estática . . . 44

5.3 Resultados numéricos y conclusiones . . . 46

5.4 Apéndice A: Contribuciones dispersivas a la polarizabilidad eléctrica . 49

5.5 Apéndice B: Expresiones explícitas . . . 51

6 Propiedades de la $\Lambda(1405)$ **54**

6.1 Los acoplamientos fuertes de la $\Lambda(1405)$ . . . 55

6.2 Las propiedades electromagnéticas . . . 57

6.3 Conclusiones . . . 63

1 Introducción

Los hiperones son los bariones con extrañeza, y por extensión, los bariones con algún quark pesado. Como es bien sabido, los hadrones (bariones y mesones) son una manifestación de la fase no perturbativa de la cromodinámica cuántica (QCD) [8], que es la que encontramos en el rango de energías caracterizado por la escala típica $\Lambda_{QCD} \approx 0.2$ - 0.3 GeV. Para poder realizar cálculos en este rango de bajas energías reemplazamos QCD por algún modelo efectivo. Entre éstos están p.ej. el modelo de quarks (QM) y los distintos modelos de bolsa (BM) [9], que tienen una motivación principalmente fenomenológica. Desde un punto de vista más teórico hay básicamente dos argumentos que nos sugieren la forma de la teoría efectiva a bajas energías que estamos buscando. Si consideramos en primer lugar el sector de quarks muy livianos vemos que por un lado tenemos la simetría quiral $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ espontáneamente rota a $SU(2)_V$, que es exacta en el límite en que los quarks u y d no tienen masa. Por el otro lado tenemos la expansión en $1/N_c$, propuesta originalmente por t'Hooft [10] y luego por Witten [11], donde el número de colores N_c aparece como un parámetro. Esta expansión nos dice que en el límite $N_c \longrightarrow \infty$ y suponiendo confinamiento, QCD a bajas energías se reduce a una teoría de mesones débilmente interactuantes (y glueballs) en la cual los fermiones aparecen como solitones y el número bariónico es un invariante topológico. De esta manera recuperamos la imagen familiar en la física nuclear: los grados de libertad relevantes son los nucleones y los mesones. Un aspecto muy interesante de los modelos solitónicos es que todos los parámetros se pueden fijar en el sector mesónico de la teoría, de manera que las predicciones para los bariones, que están en otro sector topológico, no tienen parámetros libres. El modelo más sencillo consistente con estas suposiciones es el modelo de Skyrme [12], originalmente propuesto para $SU(2)$. A partir del trabajo de Adkins, Nappi y Witten [13], donde se demostró por primera vez que el modelo de Skyrme podía dar una descripción adecuada de las propiedades del nucleón y la resonancia $\Delta(1232)$, el modelo se consolidó como un tema de interés permanente. Para un resumen de los primeros resultados se pueden consultar p.ej. las refs. [14, 15].

Para incorporar la extrañeza se extiende el modelo de Skyrme de una manera natural a $SU(3)$. En un trabajo reciente se encuentran resumidos los principales progresos en esa dirección [16]. Un resumen de los primeros resultados se puede encontrar en la ref. [17]. Al cuantizar el modelo es necesario introducir coordenadas colectivas y hay básicamente dos posibilidades: Las coordenadas colectivas se introducen en todo $SU(3)$ lo que permite una diagonalización exacta del Hamiltoniano colectivo resultante [18], o bien se introducen sólamente en $SU(2)$ y se tratan los grados de libertad con extrañeza como grados de libertad vibracionales [19, 20, 21, 22]. Nosotros trabajamos en este último modelo conocido como el *modelo solitónico de estados ligados* (bound state soliton model, BSM). En este modelo el sistema que describe a los hiperones consiste de kaones que se encuentran en estados ligados en el campo de fondo del solitón. Este tratamiento corresponde a considerar que los efectos de ruptura de simetría en la dirección de la extrañeza son importantes y fue iniciado por Callan y Klebanov [19]. El otro modelo mencionado, *el modelo colectivo* (CM), se basa en la hipótesis contraria, es decir, que la simetría de sabor es buena. En ambos casos se obtiene una buena fenomenología para los hiperones extraños [16, 23], lo que manifiesta de alguna manera que el quark $\underline{s}$ es medianamente pesado y se puede llegar a un modelo realista incorporando términos de ruptura de simetría, tanto partiendo del límite quiral (CM) como del límite masivo (BSM).

La imagen física que subyace en todo este trabajo corresponde al límite puramente solitónico (o bosónico) de una imagen más amplia que se conoce como el principio del gato de Cheshire. Este principio afirma que las propiedades de baja energía de los bariones se pueden describir de manera complementaria en términos de quarks y gluones o de mesones. Al igual que el gato de Lewis Carroll, en una descripción híbrida los quarks pueden aparecer y desaparecer de una manera gradual al variar el tamaño de una bolsa quiral empalmada con la cola de un solitón. Una discusión reciente de esta filosofía general así como también de la importancia de la simetría quiral en la imagen física resultante y de distintos aspectos del modelo que nos ocupa se puede encontrar en la ref. [23].

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se presenta el modelo solitónico de estados ligados y se hace una discusión general de los valores que se obtienen para el espectro. En la sección 3 están las expresiones generales de las corrientes electromagnéticas y los valores que se obtienen para los momentos magnéticos. En la sección 4 se presenta el tratamiento general de los decaimientos radiativos. Allí se discuten los decaimientos electromagnéticos del decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$ al octete $J^P = \frac{1}{2}^+$, además del único decaimiento permitido dentro del octete, $\Sigma_0 \longrightarrow \Lambda\gamma$. En la sección 5 discutimos las polarizabilidades eléctricas y magnéticas del octete. En la sección 6 calculamos propiedades electromagnéticas y fuertes del estado de paridad negativa $\Lambda(1405)$, como por ejemplo su momento magnético, los radios cuadráticos medios, sus decaimientos radiativos y la constante de acoplamiento fuerte $g_{\Lambda^* N K}$. En general relegamos los detalles técnicos y las fórmulas explícitas a los apéndices de cada sección. Finalmente en la sección **??** se presentan las conclusiones generales.

2 El modelo

En las primeras tres subsecciones describimos el modelo solitónico de estados ligados [19, 20, 21, 22] en el que realizamos nuestros cálculos. En la subsección siguiente discutimos el espectro de masas que se obtiene. La forma explícita de la densidad lagrangiana, los potenciales que intervienen en la ecuación de movimiento de los kaones y las funciones de onda de los estados de hiperones se pueden encontrar en los apéndices. En todo lo que sigue es muy sencillo recuperar las expresiones correspondientes al modelo de Skyrme, restringiéndonos simplemente a $SU(2)$. Para el lector que no tenga experiencia con el modelo de Skyrme le recomendamos la referencia [24], donde podrá encontrar cálculos detallados.

2.1 La acción

Siguiendo los lineamientos generales presentados en la introducción, nuestra acción efectiva tiene grados de libertad mesónicos y pretende describir la física hadrónica a bajas energías. Si bien una descripción bosónica de QCD requeriría una cantidad infinita de campos de mesones, es de esperar que a bajas energías los grados de libertad más importantes sean los mesones más livianos. Un ingrediente básico del modelo es la simetría quiral $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ espontáneamente rota a $SU(3)_V$. De manera similar a lo que se hace en el modelo σ no lineal, construimos una representación no lineal de la simetría quiral [25] con el octete de mesones seudoescalares $J^P = 0^-$ al agruparlos en el campo quiral U

$$U(x) \quad = \quad \exp\left[i\lambda_a \phi_a(x)\right], \tag{2.1}$$

donde λ_a son las matrices de Gell-Mann y los campos $\phi_a(x)$ se pueden identificar con los piones, los kaones y el meson eta. Una transformación quiral global $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ está parametrizada por dos matrices constantes $C_L \in SU(3)_L$ y $C_R \in SU(3)_R$

$$U(x) \quad \longrightarrow \quad C_L U(x) C_R^\dagger. \tag{2.2}$$

Es muy conveniente definir las siguientes matrices sin traza y antihermíticas, cuyas transformaciones bajo el grupo quiral se deducen de las de U:

$$\begin{aligned} L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U \quad &\longrightarrow \quad C_R L_\mu C_R^\dagger \\ R_\mu = U \partial_\mu U^\dagger \quad &\longrightarrow \quad C_L R_\mu C_L^\dagger. \end{aligned} \tag{2.3}$$

El vacío ($\phi_a = 0 \Leftrightarrow U = 1$) es invariante sólamente si $C_L = C_R$, lo que constituye el subgrupo diagonal de transformaciones vectoriales $SU(3)_V$. Finalmente, para tener en cuenta el hecho empírico de que la simetría quiral es aproximada, nuestra acción efectiva también tendrá términos no invariantes, los términos de ruptura de simetría.

Otra característica fundamental del modelo es la existencia de solitones topológicamente estables. Si nos restringimos por un momento a $U \in SU(2)$, una configuración estática $U(\vec{x})$ corresponde a una función $U : R^3 \longrightarrow SU(2)$. Para que la configuración tenga energía finita debemos pedir como condición de contorno que $U(\vec{x}) \stackrel{\vec{x}\to\infty}{\longrightarrow} 1$, con lo que identificamos todos los puntos en infinito con un punto y compactificamos el espacio tridimensional en una hiperesfera S^3. Como el grupo $SU(2)$ también es topológicamente S^3, para cada configuración tenemos una aplicación $U : S^3 \longrightarrow S^3$. Estas aplicaciones se clasifican naturalmente en distintas clases de homotopía, a cada una de las cuales le podemos asignar una carga topológica que se calcula con la siguiente expresión

$$W[U] \;=\; \int d^3x \; B^0(\vec{x}), \tag{2.4}$$

donde

$$B^\mu \;=\; \frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,(L_\nu L_\rho L_\sigma) \tag{2.5}$$

es la corriente topológica, con la convención $\epsilon_{0123} = 1$ para el tensor completamente antisimétrico. $W[U]$ es un número entero, se conserva independientemente de las ecuaciones de movimiento, es decir que es independiente del modelo particular, y se interpreta como el número bariónico. Consecuentemente, B^μ es la corriente bariónica. Nosotros estamos interesados en el sector bariónico con $W[U] = 1$. El sector mesónico corresponde a $W[U] = 0$. En nuestro caso en que $U \in SU(3)$ el solitón está en el subgrupo $SU(2)$ de isospín, como se verá explícitamente en la próxima subsección.

Nuestro punto de partida es la acción efectiva

$$\Gamma = \Gamma_{SK} + \Gamma_{WZ} + \Gamma_{sb}\,, \tag{2.6}$$

donde

$$\Gamma_{SK} \;=\; \int d^4x \,\Big\{ -\frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}(L_\mu L^\mu) + \frac{1}{32\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\,\Big([L_\mu, L_\nu]^2\Big)\Big\}. \tag{2.7}$$

Si restringimos U a $SU(2)$ la ec.(2.7) es exactamente la acción de Skyrme. El primer término es el modelo σ no lineal, que no posee solitones estables. El segundo término fue propuesto por Skyrme y estabiliza al solitón. También se lo puede interpretar como el rastro que queda de un intercambio de mesones ρ en el límite muy masivo $m_\rho \longrightarrow \infty$, [26]. Esto es similar a lo que ocurre en la teoría electrodébil, donde para transferencias de impulso mucho menores que la masa del bosón de gauge se reobtiene una interacción de contacto, la teoría efectiva de Fermi. En la ec.(2.7) aparecen dos parámetros: f_π, con dimensiones de energía, que es la constante de decaimiento del pion y ϵ, un parámetro adimensional que determina el tamaño del solitón y que se puede identificar con la constante de acoplamiento entre mesones $f_{\rho\pi\pi}$. Nótese que si bien el término de Skyrme es en general cuártico en derivadas, sólo contiene términos cuadráticos en derivadas temporales.

Γ_{WZ} es la acción no local de Wess-Zumino [27]

$$\Gamma_{WZ} = -\frac{iN_c}{240\pi^2}\int d^5x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma}\, \mathrm{Tr}(L_\mu L_\nu L_\alpha L_\beta L_\gamma) \tag{2.8}$$

donde N_c es el número de colores y el dominio de integración es una variedad de cinco dimensiones que tiene como borde al espacio de Minkowski. El término de Wess-Zumino juega un papel fundamental. Por un lado es responsable de que los solitones, para $N_c = 3$ y un número de sabores mayor que dos, sean necesariamente fermiones. Por otro lado esta es la interacción que distingue entre kaones y antikaones, de tal manera que estos últimos sean los que forman estados ligados con el solitón, como se verá explícitamente en la subsección siguiente. Como consecuencia de esto sólo obtendremos hiperones de extrañeza negativa, lo que es fenomenológicamente correcto. En el caso de $U \in SU(2)$ el término de Wess-Zumino se anula idénticamente.

Finalmente tenemos Γ_{sb} , los términos de ruptura de simetría [28]

$$\begin{aligned}\Gamma_{sb} = \int d^4x\, \Bigg\{ & \frac{f_\pi^2 m_\pi^2 + 2 f_K^2 m_K^2}{12}\, \mathrm{Tr}\left[U + U^\dagger - 2\right] \\ & + \sqrt{3}\frac{f_\pi^2 m_\pi^2 - f_K^2 m_K^2}{6}\, \mathrm{Tr}\left[\lambda_8 \left(U + U^\dagger\right)\right] \\ & + \frac{f_K^2 - f_\pi^2}{12}\, \mathrm{Tr}\left[(1 - \sqrt{3}\lambda_8)\left(U(\partial_\mu U)^\dagger \partial^\mu U + U^\dagger \partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

que tienen en cuenta que la masa del pion m_π y la masa del kaón m_K son diferentes, así como también que la constante de decaimiento del kaón f_K es diferente de la del pion f_π. Las matrices de Gell-Mann están normalizadas de la manera usual $\mathrm{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$.

La expresión explícita de nuestra acción ejemplifica lo dicho en la introducción: El modelo no tiene parámetros libres, todas las constantes que aparecen están directamente relacionadas con la física de mesones. Sin embargo, a la hora de evaluar numéricamente las predicciones del modelo, suele ser conveniente elegir las constantes de tal manera que ajusten algunas propiedades bariónicas, como p.ej. la masa del nucleón, la masa de la Δ, etc. Nos ocuparemos de esto en la sección 2.4.

2.2 El ansatz

En el modelo de estados ligados los grados de libertad con extrañeza se tratan de una manera diferente que los grados de libertad de $SU(2)$. En el sector $SU(2)$ tendremos nuestro solitón, que es exactamente igual al skyrmión en la aproximación en que trabajamos. Esto se debe a que la expansión en $1/N_c$ nos permite separar las distintas contribuciones y podemos suponer entonces que la presencia de los kaones no modifica la forma del solitón. Estos kaones que se mueven en el campo de fondo del solitón son cuantizados como grados de libertad vibracionales. Para ello hacemos una expansión cuadrática en la extrañeza, despreciando las autointeracciones entre los kaones, que son de orden superior. Este es el tratamiento usual que se hace de las fluctuaciones. En esta aproximación el número de kaones que pueden estar ligados al solitón no está limitado. Sin embargo, en el modelo completo hay cierta evidencia [17] de que la interacción kaón-kaón es repulsiva y que previene la posibilidad de que se ligue un cuarto kaón. La extrañeza queda así limitada al valor $S = -3$, que está de acuerdo con los hechos empíricos. Por otro lado, en el sector $SU(2)$ la simetría de isospín es buena y para cuantizar el sistema debemos introducir grados de libertad colectivos que tienen en cuenta correctamente los modos de frecuencias cero. Nos ocuparemos de ello en la sección 2.3.

Como parametrización del campo quiral utilizamos el ansatz de Callan - Klebanov [19]

$$U = \sqrt{U_\pi}\, U_K \sqrt{U_\pi} \ , \tag{2.10}$$

donde

$$U_K = \exp\left[i\frac{\sqrt{2}}{f_K} \begin{pmatrix} 0 & K \\ K^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right] \tag{2.11}$$

y K es un doblete de isospín

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \qquad K^\dagger = \left(K^-, \overline{K^0} \right). \tag{2.12}$$

U_π es el campo de fondo del solitón

$$U_\pi = \begin{pmatrix} u_\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad (2.13)$$

una extensión a $SU(3)$ del campo $u_\pi = \exp[i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}/f_\pi] \in SU(2)$. La parametrización (2.10) no es la única posibilidad, también se han ensayado otras alternativas [22] con resultados similares. Para u_π utilizaremos el *hedgehog ansatz* convencional, que nos dará la solución estática de mínima energía con número bariónico igual a uno

$$\begin{aligned} u_\pi^{(H)} &= \exp[i\vec{\tau}\cdot\hat{r}F(r)] \\ &= \cos F(r) + i\vec{\tau}\cdot\hat{r}\sin F(r). \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Aquí $\vec{\tau}$ son las matrices de Pauli, $\hat{r}$ es el versor $\hat{r} = \vec{r}/r$ y $F(r)$ es el ángulo quiral. Con el hedgehog ansatz y la convención usual $x^\mu = (t, \vec{x})$ la carga topológica (2.4) se reduce a

$$W = 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 B_0 \, , \qquad (2.15)$$

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi^2} F' \frac{\sin^2 F}{r^2}. \qquad (2.16)$$

En general, para las condiciones de contorno $F(0) = n\pi$ y $F(\infty) = 0$ obtenemos $W = n$. Nosotros tomaremos consecuentemente $F(0) = \pi$.

Reemplazamos (2.10) en la acción (2.6) y expandimos a segundo orden en los campos de kaones. La densidad lagrangiana que se obtiene de esta manera se puede escribir como la suma de una contribución puramente $SU(2)$ (que es exactamente igual al lagrangiano de Skyrme, ec.(2.7), con el término de masa para los piones) y otra contribución que describe la interacción efectiva entre el solitón y el kaón. Las expresiones explícitas están en el apéndice A.

Es importante recordar que nuestro modelo está motivado en la expansión $1/N_c$, donde el número de colores es un parámetro grande. Esto nos permite separar distintos órdenes. Para ello es útil recordar [24] que

$$f_\pi^2, f_K^2 \propto N_c \, , \qquad (2.17)$$

$$1/\epsilon^2 \propto N_c \, , \qquad (2.18)$$

$$m_\pi, m_K \propto 1. \qquad (2.19)$$

En la expresión explícita del lagrangiano efectivo, ver apéndice A, se ve que el orden dominante es $\mathrm{O}(N_c)$, correspondiente a la contribución $SU(2)$. A este orden recuperamos el modelo de Skyrme con piones masivos. En el caso estático que estamos considerando el Hamiltoniano es simplemente $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$, con lo que obtenemos para la masa del solitón

$$\begin{aligned} M_{sol} &= 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \Bigg\{ \frac{f_\pi^2}{2}\left[F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2}\right] + \frac{1}{2\epsilon^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}\left[\frac{\sin^2 F}{r^2} + 2F'^2\right] \\ &\qquad\qquad + m_\pi^2 f_\pi^2 (1-\cos F)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

La minimización de esta masa clásica nos da la siguiente ecuación no lineal para el perfil $F(r)$

$$\begin{aligned} &\left(F'' + \frac{2}{r}F' - \frac{1}{r^2}\sin 2F\right) \\ &-\frac{1}{f_\pi^2\epsilon^2}\left(\frac{1}{r^4}\sin^2 F \sin 2F - \frac{1}{r^2}\left(F'^2 \sin 2F + 2F''\sin^2 F\right)\right) \\ &-m_\pi^2 \sin F = 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

que se resuelve numéricamente con las condiciones de contorno $F(0) = \pi$ y $F(\infty) = 0$.

Una propiedad importante que tiene el hedgehog ansatz, ec.(2.14), es la invariancia ante una transformación de *grand spin* $\vec{\Lambda} = \vec{L} + \vec{T}$, siendo $\vec{L}$ el operador de momento angular

$$\vec{L} \;=\; -i\,\vec{r} \times \vec{\nabla} \tag{2.22}$$

y $\vec{T}$ el operador de isospín

$$\vec{T} \;=\; [\frac{\vec{\tau}}{2},\ ]. \tag{2.23}$$

El cálculo explícito permite verificar que

$$(\vec{L} + \vec{T})\, u_\pi^{(H)} \;=\; 0. \tag{2.24}$$

El hedgehog $u_\pi^{(H)}$ es la matriz más general de $SU(2)$ que satisface esta invariancia. Esta conexión entre las rotaciones de isospín y espaciales tiene consecuencias físicas importantes.

El orden siguiente en la expansión $1/N_c$ es O(1) y está dado por el lagrangiano de interacción entre el solitón y los kaones, ec.(2.64, 2.65, 2.66), a partir del cual obtenemos la ecuación de movimiento para los kaones. Como es de esperar, resulta conveniente realizar una expansión del campo de kaones en ondas parciales usando

$\{\Lambda^2, L^2, \Lambda_z\}$ como conjunto completo de observables. La expansión en estos modos normales es

$$K(\vec{r}, t) \;\; = \;\; \sum_{\Lambda, L} k_{\Lambda, L}(r, t)\, \mathcal{Y}_{\Lambda, l, \Lambda_z}(\hat{r}) \tag{2.25}$$

donde $\mathcal{Y}_{\Lambda, l, \Lambda_z}$ son armónicos esféricos spinoriales, ya que el isospín del kaón es $\frac{1}{2}$. La conveniencia de esta expansión se ve más claramente aún si consideramos la forma que toma el lagrangiano de interacción solitón-kaón, ec.(2.64, 2.65, 2.66), después de reemplazar el hedgehog ansatz (2.14)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;\; = \;\; & f(r)\dot{K}^\dagger \dot{K} - h_1(r)\vec{\nabla}K^\dagger \cdot \vec{\nabla}K - h_2(r)\partial_r K^\dagger \partial_r K + i\lambda(r)\left(\dot{K}^\dagger K - K^\dagger \dot{K}\right) \\ & -K^\dagger \left(V(r) + m_K^2\right) K \end{aligned} \tag{2.26}$$

con

$$V(r) \;\; = \;\; V_0 + V_1\, \vec{T} \cdot \vec{L} + V_2\, L^2. \tag{2.27}$$

Las funciones radiales f,h_1,h_2 y λ se encuentran en el apéndice A. V_0,V_1 y V_2 también son funciones radiales cuya forma explícita se puede obtener fácilmente de las expresiones que presentaremos más adelante para el potencial efectivo $V_{ef}^{\Lambda,l}$, que es el que nos interesará principalmente. Lo que queremos destacar aquí es la presencia del operador $\vec{T}\cdot\vec{L}$, que demuestra de manera explícita la utilidad de la expansión (2.25), que nos permite desacoplar los distintos modos. La situación es similar a la que tenemos p.ej. en física atómica, en el caso del acoplamiento spin-órbita. Lo particular del caso que nos ocupa es el acoplamiento del espacio interno (isospín $\vec{T}$) con el espacio de configuración (momento angular $\vec{L}$). Para cada modo obtenemos

$$\mathcal{L}_{\Lambda, l} \;\; = \;\; f(r)\dot{k}^\dagger \dot{k} - h(r)k'^\dagger k' + i\lambda(r)\left(\dot{k}^\dagger k - k^\dagger \dot{k}\right) - \left(V_{ef}^{\Lambda,l}(r) + m_K^2\right) k^\dagger k \tag{2.28}$$

donde suprimimos los índices de $k_{\Lambda,l}$. Los potenciales $h(r) = h_1(r) + h_2(r)$ y $V_{ef}^{\Lambda,l}(r)$ se encuentran en el apéndice A. Finalmente obtenemos una ecuación de movimiento radial

$$\left[f(r)\; \partial_t^2 + 2i\lambda(r)\; \partial_t + \hat{O}(r)\right] k_{\Lambda,l}(r,t) = 0 \tag{2.29}$$

donde

$$\hat{O}(r) \;\; = \;\; -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 h \frac{d}{dr}) + m_K^2 + V_{ef}^{\Lambda,l}. \tag{2.30}$$

Esta ecuación tiene soluciones de energía positiva y energía negativa, que identificaremos con kaones y antikaones respectivamente. La característica importante que diferencia la ecuación (2.29) de una ecuación de Klein-Gordon es el término lineal en derivadas temporales, que tiene como efecto que el espectro sea asimétrico. El origen de esta contribución es el término de Wess-Zumino, que distingue así extrañeza positiva y negativa.

La cuantización del campo $k(r,t)$ se realiza de la manera usual, expandiendo en modos normales

$$k_{\Lambda,l}(r,t) \;=\; \sum_{n>0}\left[k_n(r)e^{i\omega_n t}b_n^\dagger + \tilde{k_n}(r)e^{-i\tilde{\omega}_n t}a_n\right] \tag{2.31}$$

donde separamos las frecuencias positivas de las negativas. Con nuestras convenciones $\omega_n, \tilde{\omega}_n$ son positivas y quedan determinadas por las siguientes ecuaciones de autovalores

$$\left[f\;\omega_n^2 + 2\lambda\;\omega_n - \hat{O}\right]k_{\Lambda,l}(r) \;=\; 0\,, \tag{2.32}$$

$$\left[f\;\tilde{\omega}_n^2 - 2\lambda\;\tilde{\omega}_n - \hat{O}\right]\tilde{k}_{\Lambda,l}(r) \;=\; 0. \tag{2.33}$$

Tenemos estados ligados si $\omega_{\Lambda,l,n} < m_K$.

A partir de las ecuaciones de movimiento y usando la hermiticidad de $\hat{O}$ se obtienen las siguientes relaciones de ortonormalidad.

$$\int \quad dr\; r^2 k_n^* k_m\left[f(r)(\omega_n+\omega_m)+2\lambda(r)\right] = \delta_{nm}\,, \tag{2.34}$$

$$\int \quad dr\; r^2 \tilde{k}_n^* \tilde{k}_m\left[f(r)(\tilde{\omega}_n+\tilde{\omega}_m)-2\lambda(r)\right] = \delta_{nm}\,, \tag{2.35}$$

$$\int \quad dr\; r^2 k_n^* \tilde{k}_m\left[f(r)(\omega_n-\tilde{\omega}_m)+2\lambda(r)\right] = 0. \tag{2.36}$$

El momento canónicamente conjugado a $k(r,t)$ es

$$\pi(r,t)^\dagger \;=\; f(r)\dot{k}^\dagger - i\lambda(r)k^\dagger. \tag{2.37}$$

Las relaciones de conmutación canónicas

$$\left[k^\dagger(r,t),\pi(r',t)\right] \;=\; i\frac{\delta(r-r')}{r^2}\,, \tag{2.38}$$

$$\left[k^\dagger(r,t),k(r,t)\right] \;=\; 0, \tag{2.39}$$

$$\left[\pi^\dagger(r,t),\pi(r,t)\right] \;=\; 0. \tag{2.40}$$

implican las relaciones de conmutación usuales para los operadores de creación y destrucción

$$\left[a_n,a_m^\dagger\right] = \delta_{nm}, \qquad \left[b_n,b_m^\dagger\right] = \delta_{nm} \tag{2.41}$$

donde el resto de los conmutadores se anula. El Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \int dr\, r^2 \mathcal{H} \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{f}\pi^\dagger\pi + i\frac{\lambda}{f}\left(k^\dagger\pi - \pi^\dagger k\right) + hk'^\dagger k' + \left(V_{ef} + m_K^2 + \frac{\lambda^2}{f}\right)k^\dagger k \end{aligned} \tag{2.42}$$

se reduce a

$$H = \sum_{n>0}\left(\tilde{\omega}_n a_n^\dagger a_n + \omega_n b_n^\dagger b_n\right). \tag{2.43}$$

lo que demuestra, como es bien sabido, que en el caso cuadrático las frecuencias clásicas nos dan las energías cuánticas del sistema. La extrañeza está dada por

$$S = i\int dr\, r^2\left(k^\dagger\pi - \pi^\dagger k\right) = \sum_{n>0}(a_n^\dagger a_n - b_n^\dagger b_n). \tag{2.44}$$

Como veremos en la subsección dedicada a discutir los valores numéricos, la asimetría en el espectro de la ec.(2.32) se traduce en que para los valores empíricos de los parámetros hay dos estados ligados con $\mathcal{S} = -1$, mientras que los estados con $\mathcal{S} = 1$ están en el contínuo [20, 21, 22]. El estado ligado de menor energía corresponde a $(\Lambda, l) = (\frac{1}{2}, 1)$. Los distintos bariones del octete $J^P = \frac{1}{2}^+$ y del decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$ se obtienen poblando ese estado ligado con kaones. Cada kaón contribuye con $\mathcal{S} = -1$ a la extrañeza y con $\omega_{\Lambda,l}$ a la energía. Si sumamos simplemente $|\mathcal{S}|$ veces la energía ω a la masa del solitón se obtiene la masa del centroide con extrañeza $\mathcal{S}$. Para obtener el espectro de los hiperones aún debemos construir estados de buen spin e isospín. Las diferencias de energía entre estos estados están dados por las correcciones rotacionales. Para obtenerlas introducimos en la próxima subsección las cooordenadas colectivas.

En cuanto a los estados del contínuo, un análisis de corrimientos de fases en el canal $\mathcal{S} = -1$ demuestra la presencia de resonancias en ondas parciales con momentos angulares $l \geq 2$ [29]. En particular, la $\Lambda(1520)$ aparece como una resonancia en el canal $\Lambda = 3/2, l = 2$.

2.3 Las coordenadas colectivas

Los autoestados de spin e isospín se generan por un procedimiento que consiste escencialmente en aproximar las soluciones exactas dependientes del tiempo por otras, donde la dependencia temporal está completamente contenida en las coordenadas colectivas asociadas a los modos cero, que luego se cuantizan canónicamente.

En nuestro caso, introducimos coordenadas colectivas en SU(2) sólamente

$$
\begin{aligned}
u_\pi(\vec{r},t) &= A(t)u_\pi^{(H)}(\vec{r})A^\dagger(t), \\
K(\vec{r},t) &= A(t)\tilde{K}(\vec{r},t)\,,
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

con $A(t) \in SU(2)$. K es el kaón en el sistema de referencia del laboratorio y $\tilde{K}$ es el kaón en el sistema de referencia rotante del solitón.

Siguiendo la ref. [19] queremos examinar cuáles son los números cuánticos de $\tilde{K}$. Ante una transformación de isospín $u_\pi \to B u_\pi B^\dagger$ estas variables transforman como

$$
\begin{aligned}
A &\to BA, \\
\tilde{K} &\to \tilde{K},
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

de donde se concluye que $\tilde{K}$ tiene isospín igual a cero. Por otro lado, bajo una rotación espacial

$$
\begin{aligned}
u_\pi^{(H)} &\to e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}} u_\pi^{(H)} e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}} = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} u_\pi^{(H)} e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}, \\
\tilde{K} &\to e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}\tilde{K} = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}}\tilde{K},
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

donde usamos que $e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}} u_\pi^{(H)} e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}} = u_\pi^{(H)}$. Esto nos dice que ante una rotación espacial A y $\tilde{K}$ transforman de la siguiente manera

$$
A \to A e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}, \tag{2.48}
$$

$$
\tilde{K} \to e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}}\tilde{K}, \tag{2.49}
$$

de donde se concluye que el operador de momento angular total de $\tilde{K}$ es el *grand spin* $\vec{\Lambda}$, que de ahora en más también llamaremos $\vec{J}_K$ sobreentendiendo que se trata del momento angular del kaón en el sistema de referencia del solitón.

Definimos una velocidad angular $\vec{\Omega}$

$$
\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\Omega} = A^\dagger \dot{A} \tag{2.50}
$$

que es de orden O($1/N_c$) debido a que el solitón rota despacio porque su momento de inercia es de orden O(N_c). Reemplazando en el lagrangiano, ec.(2.62), las expresiones (2.45) y usando la definición de $\vec{\Omega}$ obtenemos el término adicional δL

$$
\begin{aligned}
L(K,u_\pi) &= L(\tilde{K},u_\pi^{(H)}) + \delta L, \\
\delta L &= \frac{1}{2}\Theta\Omega^2 - c\,\vec{\Omega}\cdot\vec{J}_K
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

que es de orden $1/N_c$ y que nos dará las correcciones hiperfinas a la energía. Θ es el momento de inercia del solitón

$$\Theta = \frac{8\pi}{3} f_\pi^2 \int dr\, r^2 \sin^2 F \left[1 + \frac{1}{\epsilon^2 f_\pi^2}\left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right] \qquad (2.52)$$

y c es la constante de estructura hiperfina, cuya forma explícita se puede encontrar en la ref. [30]. El momento angular colectivo queda definido canónicamente por

$$\begin{aligned} J_c^i &= \frac{\partial L}{\partial \Omega_i} \\ &= \Theta \Omega^i - c J_K^i . \end{aligned} \qquad (2.53)$$

Para el Hamiltoniano obtenemos (sólo consideramos antikaones)

$$H^{fuerte} = M_{sol} + |\mathcal{S}|\omega + \frac{1}{2\Theta}(\vec{J}_c + c\vec{J}_K)^2 \,. \qquad (2.54)$$

La interacción $\vec{J}_c \cdot \vec{J}_K$ indica que los hiperones serán autoestados de $\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_K$, es decir que el momento angular colectivo y del kaón se acoplan para dar finalmente el spin del hiperón. Los kaones mantienen su estadística bosónica a pesar de que se comportan como partículas de spin $\frac{1}{2}$ debido a la transmutación de su isospín en el campo del solitón. Por lo tanto, en caso de tener más de un kaón ligado en el canal $\Lambda = \frac{1}{2}$ la función de onda debe ser completamente simétrica. El momento angular total del sistema de kaones es entonces el máximo posible, es decir

$$J_K = \frac{1}{2}|\mathcal{S}|. \qquad (2.55)$$

Un ejemplo de esto es la Ω^-, con $J^P = \frac{3}{2}^+$.

Los operadores de isospín y de momento angular colectivo están relacionados [24]

$$\vec{I} = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left[A^\dagger \vec{\tau} A \tau^i\right] J_c^i \qquad (2.56)$$

de donde se obtiene que $J_c^2 = I^2$. Como el momento angular total $\vec{J}$ del hiperón debe ser semientero, una consecuencia de esto es que si la extrañeza es par el isospín es semientero y viceversa, si la extrañeza es impar el isospín es entero, como podemos ver en la tabla I.

Tabla I

Partícula	I	J^P	$\mathcal{S}$	J_K	l
N	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	0	-	-
Δ	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}^+$	0	-	-
Λ	0	$\frac{1}{2}^+$	-1	$\frac{1}{2}$	1
Σ	1	$\frac{1}{2}^+$	-1	$\frac{1}{2}$	1
Σ^*	1	$\frac{3}{2}^+$	-1	$\frac{1}{2}$	1
Ξ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	-2	1	1
Ξ^*	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^+$	-2	1	1
Ω	0	$\frac{3}{2}^+$	-3	$\frac{3}{2}$	1
$\Lambda(1405)$	0	$\frac{1}{2}^-$	-1	$\frac{1}{2}$	0

Table 1: Números cuánticos de algunos bariones que se obtienen poblando el canal $\Lambda = \frac{1}{2}$ con antikaones.

Los estados ligados con $l = 1$ (ondas p) tienen paridad positiva, mientras que los correspondientes a $l = 0$ (ondas s) tienen paridad negativa.

Tomando los elementos de matriz diagonales del hamiltoniano, ec.(2.54), entre distintos estados del octete y del decuplete de hiperones, obtenemos la fórmula de masas

$$M_{I,J,\mathcal{S}} = M_{sol} + \omega|\mathcal{S}| + \frac{1}{2\Theta}\Big[cJ(J+1) + (1-c)I(I+1) + \frac{c(c-1)}{4}|\mathcal{S}|(|\mathcal{S}|+2)\Big] \quad (2.57)$$

donde I, J y $\mathcal{S}$ son el isospín, spin y la extrañeza respectivamente. Las funciones de onda de los estados correspondientes se pueden encontrar en el apéndice B.

Para el estado fundamental $|\Lambda = \frac{1}{2}, l = 1, \Lambda_z >$, utilizando las ec.(2.81, 2.82) se puede ver que el campo de kaones se reduce a

$$\tilde{K}(\vec{r}, t) \quad = \quad -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{i\omega t} k(r) \vec{\tau} \cdot \hat{r} \ \chi^{\Lambda_z} \quad (2.58)$$

donde χ^{Λ_z} es un isospinor de dos componentes. En este caso obtenemos para la constante hiperfina

$$c_1 = 1 - 2\omega_1 \int dr \ k^2 \quad \Big\{ \quad \frac{4}{3} f(r) \ r^2 \cos^2 \frac{F}{2} \\ - \frac{1}{2\epsilon^2 f_K^2} \left[\frac{d}{dr}(r^2 F' \sin F) - \frac{4}{3} \sin^2 F \cos^2 \frac{F}{2} \right] \Big\} \quad (2.59)$$

con la función de onda de los kaones normalizada de acuerdo con las relaciones de ortonormalidad (2.34) de la siguiente manera

$$2\int dr\ r^2 k^2 \left[f(r)\omega + \lambda(r)\right] \;=\; 1. \tag{2.60}$$

2.4 Resultados numéricos para el espectro

A continuación presentamos los principales resultados que se obtienen para tres conjuntos de parámetros distintos [30, 31]. En SET I y SET III tomamos el valor empírico de la masa del pion. En el SET II tomamos el límite quiral. En el caso del SET I y del SET II la constante de decaimiento del pion f_π y el parámetro de Skyrme ϵ se toman de manera que ajusten los valores empíricos de la masa del nucleón y de la Δ. En el caso del SET III se fija f_π en su valor empírico y se ajusta el parámetro de Skyrme ϵ para reproducir correctamente la *diferencia* de masa entre el nucleón y la Δ. Si bien en principio también es posible determinar ϵ a partir de propiedades puramente mesónicas, como p.ej. la constante de acoplamiento $f_{\rho\pi\pi}$ en caso de considerar al modelo de Skyrme como el límite de bajas energías de una teoría con mesones vectoriales, o bien el scattering pión-pión en una onda parcial D [32], aquí tomaremos ϵ como un parámetro ajustable. Este es el tratamiento usual y es razonable esperar que sea necesario un ajuste de este tipo mientras no se tengan en cuenta las correcciones a un lazo de piones. Por ejemplo, al tomar el valor empírico de f_π en el SET III obtemenos un valor muy grande para la masa del solitón que se traduce en un valor de aproximadamente 1.7 GeV para la masa del nucleón. Esto es un problema bien conocido y se resuelve teniendo en cuenta las correcciones cuánticas [33], que serán ignoradas en todo este trabajo. Una referencia muy reciente sobre esta cuestión es [34].

En todos los casos la constante de decaimiento del kaón la determinamos a partir del valor fenomenológico $\frac{f_K}{f_\pi} \approx 1.22$. Para la masa del kaón tomamos el valor experimental $m_K = 495 MeV$. Para los tres conjuntos de parámetros obtenemos dos estados ligados, uno de paridad negativa para $l = 0$ y otro de paridad positiva para $l = 1$. En la tabla II presentamos las energías y las constantes hiperfinas correspondientes.

Tabla II

	SET I	SET II	SET III
m_π (dato)	$138\ MeV$	0	$138\ MeV$
f_π (dato)	$54\ MeV$	$64.5\ MeV$	$93\ MeV$
ϵ (dato)	4.84	5.45	4.26
$M_{sol}\ (MeV)$	864	864	1646
$\Theta\ (fm)$	1.01	1.01	1.01
$\omega_1\ (MeV)$	209	222	254
$\omega_0\ (MeV)$	388	415	
c_1	0.39	0.50	0.33
c_0	0.78	0.77	

Table 2: Energías de ligadura y constantes de acoplamiento hiperfinas para tres conjuntos de parámetros distintos. El subíndice indica el momento angular l del estado ligado.

A partir de la ec.(2.57) se pueden determinar los valores de $\hat{\omega}$ y $\hat{c}$ que mejor ajustan el espectro [31]

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1 &= 218\,MeV \\ \hat{c}_1 &= 0.65 \end{aligned} \tag{2.61}$$

En la tabla III presentamos las diferencias de masas con respecto al nucleón.

Posiblemente la mejor predicción se obtiene para el SET II, que corresponde a tomar la masa del pión igual a cero. En este caso los valores calculados difieren en menos de un 10% de los experimentales. En los demás casos se obtienen valores similares. El ajuste muestra cual es la mejor predicción que es posible obtener dentro del modelo, con la fórmula de masas (2.57).

Para el estado de paridad negativa $\Lambda(1405)$ las masas calculadas están aproximadamente 100 MeV por debajo del valor experimental. Esto contrasta con la situación típica para modelos de quarks, donde en general se obtiene una masa demasiado grande para esta resonancia [35]. Finalmente podemos concluir que el modelo nos da un espectro de masas satisfactorio, más aún teniendo en cuenta de que para todo el sector extraño no tenemos ningún parámetro libre.

Tabla III

partícula	experimento	ajuste	SET I	SET II	SET III
Δ	293 ± 3	293	293	293	293
Λ	177 ± 1	176	147	167	189
Σ	254 ± 5	244	266	265	320
Σ^*	446 ± 3	435	381	411	416
Ξ	379 ± 4	392	372	395	465
Ξ^*	594 ± 2	582	486	542	562
Ω	733 ± 1	736	610	684	729
$\Lambda(1405)$	468 ± 4	-	358	386	

Table 3: Diferencias de masas (en MeV) respecto de la masa calculada del nucleón. Los valores experimentales indicados son las diferencias de masas entre promedios de multipletes de isospín.

2.5 Apéndice A: Los potenciales

En este apéndice presentamos la forma explícita del lagrangiano del modelo que nos ocupa, que se obtiene a partir de la ec.(2.6) expandiendo a segundo orden en kaones usando el ansatz de Callan-Klebanov, ec. (2.10), así como también la ecuación de movimiento correspondiente y los potenciales que aparecen en la misma.

Para el lagrangiano tenemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SU(2)} + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{WZ} + \mathrm{O}(K^4) \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)} &= \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu u_\pi^\dagger \partial^\mu u_\pi) + \frac{1}{32\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu u_\pi^\dagger u_\pi, \partial_\nu u_\pi^\dagger u_\pi\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} f_\pi^2 m_\pi^2\,\mathrm{Tr}(u_\pi + u_\pi^\dagger - 2), \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= (D_\mu K)^\dagger D^\mu K - \frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu u_\pi^\dagger \partial^\mu u_\pi) K^\dagger K - m_K^2 K^\dagger K \\ &\quad - \frac{1}{4}\frac{f_\pi^2}{f_K^2} m_\pi^2 K^\dagger (u_\pi + u_\pi^\dagger - 2) K, \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left[\frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu u_\pi^\dagger u_\pi, \partial_\nu u_\pi^\dagger u_\pi\right]^2 K^\dagger K + 2\,\mathrm{Tr}(a^\mu a^\nu)(D_\mu K)^\dagger D_\nu K \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}(D_\mu K)^\dagger D^\mu K\,\mathrm{Tr}(\partial_\nu u_\pi^\dagger \partial^\nu u_\pi) - 6 (D_\mu K)^\dagger [a^\mu, a^\nu] D_\nu K \right] \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\mathcal{L}_{WZ} = i\frac{N_c}{4 f_K^2} B^\mu \left[(D_\mu K)^\dagger K - K^\dagger D_\mu K\right]. \tag{2.66}$$

donde usamos las siguientes definiciones:

$$v_\mu = \frac{1}{2}(N^\dagger \partial_\mu N + N \partial_\mu N^\dagger) \tag{2.67}$$

$$a_\mu = \frac{1}{2}(N^\dagger \partial_\mu N - N \partial_\mu N^\dagger) \tag{2.68}$$

$$D_\mu K = \partial_\mu K + v_\mu K \tag{2.69}$$

con $N = \sqrt{u_\pi}$. Usando el hedgehog Ansatz para u_π, ec.(2.14), y la expansión en ondas parciales (2.25) obtenemos la siguiente ecuación de autovalores para los kaones

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 h(r)\frac{d}{dr}) - m_K^2 - V_{ef}^{\Lambda,l}(r) + f(r)\omega_{\Lambda,l}^2 - 2\mathcal{S}\lambda(r)\omega_{\Lambda,l}\right] k_{\Lambda,l}(r) = 0. \tag{2.70}$$

donde $\mathcal{S}$ es la extrañeza del kaón y $\omega_{\Lambda,l}$ es la energía correspondiente al modo $k_{\Lambda,l}$. Con las convenciones que usamos sólo debemos considerar energías positivas. Tenemos un estado ligado si $\omega_{\Lambda,l,n} < m_K$. El potencial $V_{ef}^{\Lambda,l}(r)$ está dado por

$$
\begin{aligned}
V_{ef}^{\Lambda,l}(r) &= 2\left(\frac{\sin^2\frac{F}{2}}{r}\right)^2\left[1+\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left(F'^2+\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right]-\frac{1}{4}\left(F'^2+2\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\\
&\quad -\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left[2\frac{\sin^2 F}{r^2}(2F'^2+\frac{\sin^2 F}{r^2})\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\frac{6}{r^2}\left(\frac{\sin^2 F}{r^2}\sin^4\frac{F}{2}+\frac{d}{dr}\left(F'\sin F\sin^2\frac{F}{2}\right)\right)\right]\\
&\quad +\left[1+\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left(F'^2+\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right]\frac{l(l+1)}{r^2}\\
&\quad +\left\{\frac{4\sin^2\frac{F}{2}}{r^2}\left[1+\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left(F'^2+\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right]\right.\\
&\quad \left.-\frac{3}{2\epsilon^2 f_K^2}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\sin^2 F}{r^2}\cos F-\frac{d}{dr}(F'\sin F)\right]\right\}\frac{\Lambda(\Lambda+1)-l(l+1)-3/4}{2}\\
&\quad -\frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{2f_K^2}(1-\cos F)\,. \qquad (2.71)
\end{aligned}
$$

Los potenciales restantes son

$$
\begin{aligned}
h(r) &= h_1(r)+h_2(r) = 1+\frac{1}{2\epsilon^2 f_K^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}\,, && (2.72)\\
h_1(r) &= 1+\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}F'^2, && (2.73)\\
h_2(r) &= \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left(2\frac{\sin^2 F}{r^2}-F'^2\right), && (2.74)\\
f(r) &= 1+\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left(F'^2+2\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\,, && (2.75)\\
\lambda(r) &= -\frac{N_c}{8\pi^2 f_K^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}F' && (2.76)\\
&= \frac{N_c}{4f_K^2}B_0. && (2.77)
\end{aligned}
$$

2.6 Apéndice B: Las funciones de onda

En este apéndice describimos como se construyen las funciones de onda de los hiperones. Partimos de la función de onda del skyrmión [24]

$$\Psi^{(I)}_{I_3,S_3} = |I, I_3, S_3 > \;\; = \;\; \varphi^{(I)} \sqrt{\frac{2I+1}{2\pi^2}} (-1)^{I+I_3} D^{(I)}_{-I_3,S_3} \tag{2.78}$$

donde $\varphi^{(I)}$ es una fase arbitraria y $D^{(I)}_{-I_3,S_3}$ son las matrices de Wigner [36]. Para el skyrmión tenemos que $I^2 = S^2$, siendo $\vec{I}$ el operador de isospín y $\vec{S}$ el operador de momento angular. I_3, S_3 son las proyecciones respectivas.

En esta representación el operador

$$R_{aj}(A) \;\; = \;\; \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left[A^\dagger \tau_a A \tau_j \right] \tag{2.79}$$

corresponde a la matriz $D^{(1)}_{aj}$.

La función de onda del hiperón se obtiene acoplando el *grand spin* $\vec{\Lambda}$ del kaón ligado con el momento angular del skyrmión. De esta manera obtenemos los estados de hiperones $|H>$ como autoestados de momento angular J, de isospín I (aportado totalmente por el skyrmión) y extrañeza $\mathcal{S}$. Explícitamente

$$|H> = |I, I_3, J, J_3 >_{\Lambda,l} \;\; = \;\; \sum_{\Lambda_z} < J, J_3 | I, J_3 - \Lambda_z, \Lambda, \Lambda_z > \Psi^{(I)}_{I_3, J_3-\Lambda_z} \tilde{K}_{\Lambda l \Lambda_z} \tag{2.80}$$

donde $\tilde{K}_{\Lambda l \Lambda_z}$ es la función de onda del kaón ligado. Queremos destacar que el isospín $I_K = \frac{1}{2}$ del kaón no contribuye al isospín total del hiperón. En el campo de fondo del solitón, el isospín del kaón se acopla con su momento angular orbital como si fuera una partícula de spin $\frac{1}{2}$. Obtenemos

$$\tilde{K}_{\Lambda l \Lambda_z} \;\; = \;\; k_{\Lambda l}(r) \mathcal{Y}_{\Lambda l \Lambda_z}(\hat{r}) \tag{2.81}$$

donde $\mathcal{Y}_{\Lambda l \Lambda_z}$ son armónicos esféricos espinoriales

$$\mathcal{Y}_{\Lambda l \Lambda_z} \;\; = \;\; \begin{pmatrix} < \Lambda, \Lambda_z | l, \Lambda_z - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > Y_{l,\Lambda_z - \frac{1}{2}} \\ < \Lambda, \Lambda_z | l, \Lambda_z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} > Y_{l,\Lambda_z + \frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.82}$$

3 Propiedades electromagnéticas estáticas

3.1 La corriente electromagnética

Para incluir la interacción electromagnética de una manera minimal partimos nuevamente de la acción efectiva quiral con términos de ruptura de simetría, ec. (2.6). Siguiendo el procedimiento usual incorporamos el campo electromagnético A_μ como un campo de gauge introduciendo la derivada covariante

$$D_\mu U = \partial_\mu U + ie\ A_\mu\ [Q, U] \tag{3.1}$$

donde $e^2 = 1/137$ y

$$Q \;=\; \frac{1}{2}\left[\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\right] \tag{3.2}$$

es el operador de carga eléctrica. Nuestra acción efectiva será ahora

$$\Gamma[A_\mu] = \Gamma_{SK}[A_\mu] + \Gamma_{an}[A_\mu] + \Gamma_{sb}[A_\mu] \tag{3.3}$$

donde $\Gamma_{SK}[A_\mu]$ y $\Gamma_{sb}[A_\mu]$ tienen la misma forma que antes con la derivada común reemplazada por la derivada covariante.

$$\Gamma_{SK}[A_\mu] \;=\; \int d^4x \left\{ \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}(D_\mu U^\dagger D^\mu U) + \frac{1}{32\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\left([D_\mu U^\dagger U, D_\nu U^\dagger U]^2\right) \right\}, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{sb}[A_\mu] \;=\; \int d^4x\ \Bigg\{ & \frac{f_\pi^2 m_\pi^2 + 2 f_K^2 m_K^2}{12}\,\mathrm{Tr}\left[U + U^\dagger - 2\right] \\ & + \sqrt{3}\frac{f_\pi^2 m_\pi^2 - f_K^2 m_K^2}{6}\,\mathrm{Tr}\left[\lambda_8\left(U + U^\dagger\right)\right] \\ & + \frac{f_K^2 - f_\pi^2}{12}\,\mathrm{Tr}\left[(1-\sqrt{3}\lambda_8)\left(U(D_\mu U)^\dagger D^\mu U + U^\dagger D_\mu U (D^\mu U)^\dagger\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

En el caso de la parte anómala Γ_{an} hay que tener un poco más de cuidado. la expresión invariante de gauge se obtiene incluyendo términos adicionales [27, 37] y es

$$\begin{aligned}\Gamma_{an}[A_\mu] \;=\; & -\frac{iN_c}{240\pi^2}\int d^5x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}(L_\mu L_\nu L_\alpha L_\beta L_\gamma) \\ & -\frac{N_c}{48\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big\{eA_\mu\ \ \mathrm{Tr}\left[Q\left(L_\nu L_\rho L_\sigma - R_\nu R_\rho R_\sigma\right)\right] \\ & \qquad -ie^2 A_\mu \partial_\nu A_\rho\ \ \mathrm{Tr}\left[2\ Q^2(L_\sigma - R_\sigma) + QU^\dagger QUL_\sigma - QUQU^\dagger R_\sigma\right]\Big\}\ .\end{aligned} \tag{3.6}$$

Agrupando términos lineales y cuadráticos en A_μ (los cúbicos y cuárticos se anulan) podemos escribir la acción efectiva, ec. (3.3), como

$$\Gamma[A_\mu] = \Gamma^{fuerte} + \Gamma^{lin} + \Gamma^{cuad}\,, \tag{3.7}$$

donde

$$\Gamma^{lin} \;=\; -\int d^4x \; e \; A_\mu J^\mu\,, \tag{3.8}$$

$$\Gamma^{cuad} \;=\; -\int d^4x \; e^2 \; A_\mu \; G^{\mu\nu} \; A_\nu \tag{3.9}$$

y Γ^{fuerte} es la acción en ausencia de campos electromagnéticos, ec.(2.6), que describe las interacciones fuertes que dan lugar al hiperón.

Para la corriente electromagnética se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} J^\mu \;=\; & -i\frac{f_\pi^2}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{Q(L^\mu + R^\mu)\right\} \\ & -i\frac{f_K^2 - f_\pi^2}{12}\,\mathrm{Tr}\left\{(1-\sqrt{3}\lambda_8)\left([U,Q]L^\mu - L^\mu[U^\dagger,Q] + [U^\dagger,Q]R^\mu - R^\mu[U,Q]\right)\right\} \\ & +\frac{i}{8\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\left\{Q\left([L_\nu,[L^\mu,L^\nu]] + [R_\nu,[R^\mu,R^\nu]]\right)\right\} \\ & +\frac{N_c}{48\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left\{Q\left(L_\nu L_\rho L_\sigma - R_\nu R_\rho R_\sigma\right)\right\}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La contribución cuadrática es conocida como la contribución *seagull* . Para el tensor $G^{\mu\nu}$ se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} \;=\; & -g^{\mu\nu}\left[\frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}P^2 + \frac{f_K^2 - f_\pi^2}{12}\,\mathrm{Tr}\left\{(1-\sqrt{3}\lambda_8)(P^2U^\dagger + UP^2)\right\}\right] \\ & +\frac{1}{8\epsilon^2}\left[g^{\mu\nu}h^\alpha_\alpha - h^{\mu\nu}\right] \\ & +\frac{iN_c}{48\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left[(2Q^2 + QU^\dagger QU)L_\sigma - (2Q^2 + QUQU^\dagger)R_\sigma\right]\partial_\rho\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde se usaron las siguientes definiciones

$$P \;=\; Q - U^\dagger\, Q\, U\,, \tag{3.12}$$

$$h_{\mu\nu} \;=\; \mathrm{Tr}\left[PL_\mu PL_\nu - P^2 L_\nu L_\mu\right]\,. \tag{3.13}$$

El tensor métrico es $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. En las ecuaciones (3.10) y (3.11) se distinguen claramente las distintas contribuciones provenientes del término cuadrático (modelo σ no lineal), del término cuártico (término de Skyrme), de los términos de ruptura de simetría y de la contribución anómala.

La forma de la carga eléctrica, ec. (3.2), nos permite escribir la corriente electromagnética como la suma de una contribución isovectorial J_3^μ y una contribución isoescalar J_8^μ.

$$J_{em}^\mu = J_3^\mu + J_8^\mu, \tag{3.14}$$

donde hay que tener el cuidado de trabajar con la corriente en el sistema de referencia del laboratorio, es decir

$$J_3^\mu \quad = \quad D_{3b}^{(1)} J_b^{S,\mu}. \tag{3.15}$$

$J_b^{S,\mu}$ es la corriente isovectorial en el sistema rotante del solitón y está asociada a la carga $Q = \frac{\lambda_b}{2}$.

En el apéndice A se encuentran las expresiones generales para la corriente electromagnética después de expandir a segundo orden en los kaones, así como también sus elementos de matriz diagonales correspondientes al estado fundamental.

3.2 Los momentos magnéticos

El operador de momento magnético es

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r \ \vec{r} \times \vec{J}_{em}. \tag{3.16}$$

Nosotros estamos interesados básicamente en la tercer componente del momento magnético $\vec{\mu}$. Su contenido operatorial queda explicitado separando las distintas contribuciones de la siguiente manera [38, 39]

$$\mu^3 \quad = \quad \mu_s^3 + \mu_v^3 \tag{3.17}$$

$$\mu_s^3 \quad = \quad \mu_{s,0} J_c^3 + \mu_{s,1} J_K^3 \tag{3.18}$$

$$\mu_v^3 \quad = \quad -2(\mu_{v,0} + \mu_{v,1} |\mathcal{S}|) D_{33}^{(1)} \tag{3.19}$$

Los momentos magnéticos elementales $\mu_{s,0}$, $\mu_{s,1}$, $\mu_{v,0}$ y $\mu_{v,1}$ son funciones de los perfiles clásicos y de las funciones de onda del kaón. $\vec{J}_c$ es el momento angular colectivo, $\vec{J}_K$ es el momento angular del kaón y $D_{33}^{(1)}$ es una matriz de Wigner.

En la tabla IV presentamos los elementos de matriz diagonales del operador μ^3, ec. (3.17). El caso de la $\Lambda(1405)$ se discute por separado en la sección 6.

Tabla IV

$$
\begin{aligned}
\mu(p) &= \frac{1}{2}\mu_{s,0} + \frac{2}{3}\mu_{v,0} \\
\mu(n) &= \frac{1}{2}\mu_{s,0} - \frac{2}{3}\mu_{v,0} \\
\mu(\Lambda) &= \frac{1}{2}\mu_{s,1} \\
\mu(\Sigma^+) &= \frac{2}{3}\mu_{s,0} - \frac{1}{6}\mu_{s,1} + \frac{2}{3}(\mu_{v,0} + \mu_{v,1}) \\
\mu(\Sigma^0) &= \frac{2}{3}\mu_{s,0} - \frac{1}{6}\mu_{s,1} \\
\mu(\Sigma^-) &= \frac{2}{3}\mu_{s,0} - \frac{1}{6}\mu_{s,1} - \frac{2}{3}(\mu_{v,0} + \mu_{v,1}) \\
\mu(\Sigma^{*,+}) &= \mu_{s,0} + \frac{1}{2}\mu_{s,1} + (\mu_{v,0} + \mu_{v,1}) \\
\mu(\Sigma^{*,0}) &= \mu_{s,0} + \frac{1}{2}\mu_{s,1} \\
\mu(\Sigma^{*,-}) &= \mu_{s,0} + \frac{1}{2}\mu_{s,1} - (\mu_{v,0} + \mu_{v,1}) \\
\mu(\Xi^0) &= -\frac{1}{6}\mu_{s,0} + \frac{2}{3}\mu_{s,1} - \frac{2}{9}(\mu_{v,0} + 2\mu_{v,1}) \\
\mu(\Xi^-) &= -\frac{1}{6}\mu_{s,0} + \frac{2}{3}\mu_{s,1} + \frac{2}{9}(\mu_{v,0} + 2\mu_{v,1}) \\
\mu(\Xi^{*,0}) &= \frac{1}{2}\mu_{s,0} + \mu_{s,1} + \frac{2}{3}(\mu_{v,0} + 2\mu_{v,1}) \\
\mu(\Xi^{*,-}) &= \frac{1}{2}\mu_{s,0} + \mu_{s,1} - \frac{2}{3}(\mu_{v,0} + 2\mu_{v,1}) \\
\mu(\Omega^-) &= \frac{3}{2}\mu_{s,1}
\end{aligned}
$$

Table 4: Momentos magnéticos para los distintos bariones del decuplete y del octete.

Las contribución puramente solitónica es

$$
\mu_{s,0} = -\frac{2M_N}{3\pi\Theta}\int dr\, r^2 \sin^2 F\, F' \,, \tag{3.20}
$$

$$
\mu_{v,0} = \frac{1}{2}M_N\Theta \,. \tag{3.21}
$$

Las contribuciones mixtas del solitón y los kaones que se obtienen en el caso del estado fundamental $\Lambda = \frac{1}{2}$, $l = 1$ son

$$
\begin{aligned}
\mu_{s,1} &= c_1\ \mu_{s,0} - \frac{4}{3} M_N \int dr\ r^2 \left\{ k^2 \cos^2 \frac{F}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[4\frac{k^2}{r^2} \sin^2 F \cos^2 \frac{F}{2} + k^2 F'^2 \cos^2 \frac{F}{2} + 3kk'F' \sin F \right] \right\}, \qquad (3.22) \\
\mu_{v,1} &= \frac{M_N}{3} \int dr\ r^2 \left\{ k^2 \cos^2 \frac{F}{2} \left(1 - 4\sin^2 \frac{F}{2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[4\frac{k^2}{r^2} \sin^2 F \cos^2 \frac{F}{2} \left(3 - 8\sin^2 \frac{F}{2} \right) \right. \\
&\qquad + k^2 F'^2 \cos^2 \frac{F}{2} \left(1 - 18 \sin^2 \frac{F}{2} \right) - 2k^2 \omega_1^2 \sin^2 F \\
&\qquad \left. \left. + 2k'^2 \sin^2 F + 3kk'F' \sin F \left(3 - 4\sin^2 \frac{F}{2} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{N_c M_N}{36} \frac{\omega_1}{f_K^2 \pi^2} \int dr\ r^2 \left(k^2 \sin^2 F F' + kk' \sin 2F \right) . \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

En estas fórmulas M_N es la masa del nucleón, que aparece debido a que los momentos magnéticos están expresados en unidades del magnetón nuclear $\frac{e}{2M_N}$.

3.3 Resultados numéricos para los momentos magnéticos

A continuación presentamos los resultados que se obtienen [39, 31] para los tres conjuntos de parámetros que ya discutimos en la sección 2.4. En la tabla V también se incluyen los momentos magnéticos elementales $\hat{\mu}_{s,0}$, $\hat{\mu}_{s,1}$, $\hat{\mu}_{v,0}$ y $\hat{\mu}_{v,1}$ que mejor ajustan los datos experimentales [39]. La diferencia más significativa con respecto

Tabla V

	ajuste	SET I	SET II	SET III
$\mu_{s,0}$	0.88	0.74	0.56	0.37
$\mu_{v,0}$	3.53	2.40	2.40	2.40
$\mu_{s,1}$	-1.19	-1.07	-0.77	-1.11
$\mu_{v,1}$	-0.93	-0.16	-0.13	-0.10

Table 5: Momentos magnéticos elementales expresados en magnetones nucleares. En todos los casos se usó $M_N = 939 MeV$.

a los valores óptimos se encuentra en el caso de $\mu_{v,1}$. El módulo de los momentos elementales calculados es en todos los casos más pequeño que el valor dado por el

Tabla VI

partícula	experimento	ajuste	SET I	SET II	SET III	QM
p	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
n	-0.68	-0.68	-0.63	-0.70	-0.79	-0.67
Λ^0	-0.22	-0.22	-0.27	-0.21	-0.31	-0.21
Σ^+	0.87	0.90	1.10	1.07	1.10	0.96
Σ^0		0.28	0.34	0.27	0.24	0.29
Σ^-	-0.41	-0.34	-0.42	-0.54	-0.62	-0.38
$\Sigma^{*,+}$		1.03	1.24	1.29	1.18	1.13
$\Sigma^{*,0}$		0.10	0.10	0.09	-0.11	0.13
$\Sigma^{*,-}$		-0.83	-1.04	-1.12	-1.39	-0.87
Ξ^0	-0.45	-0.47	-0.66	-0.58	-0.72	-0.50
Ξ^-	-0.24	-0.20	-0.19	-0.07	-0.18	-0.16
$\Xi^{*,0}$		0.13	0.35	0.49	0.30	0.25
$\Xi^{*,-}$		-0.67	-1.07	-1.03	-1.34	-0.75
Ω^-	-0.69	-0.64	-0.82	-0.63	-0.94	-0.62

Table 6: Momentos magnéticos del octete y del decuplete respecto del momento magnético calculado del protón. La columna QM presenta los resultados del modelo de quarks de la referencia [40].

ajuste. Por ejemplo, vemos que usando los valores correspondientes al SET I para el momento magnético del protón se obtiene $\mu_p = 1.97$ y para el neutrón $\mu_n = -1.23$. Estos valores son mucho menores que los resultados experimentales $\mu_p^{(exp)} = 2.79$ y $\mu_n^{(exp)} = -1.91$. Sin embargo el modelo solitónico en general reproduce bien los cocientes de los momentos magnéticos. Obtenemos $\mu_n/\mu_p = -0.63$ que compara favorablemente bien con el valor experimental $\mu_n^{(exp)}/\mu_p^{(exp)} = -0.68$.

Los mejores resultados se obtienen para los dos primeros conjuntos de parámetros, SET I y SET II y son similares a lo que se obtiene en el modelo de quarks [40]. Las diferencias con respecto a los valores empíricos son de aproximadamente un 20-30%, lo que se puede considerar como razonablemente bueno si se tiene en cuenta que no tenemos ningún parámetro libre.

3.4 Apéndice A: Expresiones explícitas

En este apéndice presentamos las expresiones generales de la corriente electromagnética expandida a segundo orden en los kaones y también las expresiones que se obtienen para los elementos de matriz diagonales correspondientes al estado fundamental.

La contribución cuadrática junto con la contribución que proviene de los términos de ruptura de simetría es

$$\begin{aligned} J^\mu &= -i\frac{f_\pi^2}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{Q(L^\mu + R^\mu)\right\} \\ &\quad -i\frac{f_K^2 - f_\pi^2}{12}\,\mathrm{Tr}\Big\{(1-\sqrt{3}\lambda_8) \\ &\qquad ([U,Q]L^\mu - L^\mu[U^\dagger,Q] + [U^\dagger,Q]R^\mu - R^\mu[U,Q])\Big\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

La contribución cuártica es

$$J_4^\mu = \frac{i}{8\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\Big\{Q\left([L_\nu,[L^\mu,L^\nu]] + [R_\nu,[R^\mu,R^\nu]]\right)\Big\} \tag{3.25}$$

y finalmente la contribución anómala es

$$J_{(an)}^\mu = \frac{N_c}{48\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\Big\{Q(L_\nu L_\rho L_\sigma - R_\nu R_\rho R_\sigma)\Big\}. \tag{3.26}$$

Tomando $Q_b = \frac{\lambda_b}{2}$ obtenemos la parte isovectorial. Es conveniente usar las siguientes definiciones

$$M_b = \frac{1}{2}(N^\dagger\tau_b N + N\tau_b N^\dagger), \tag{3.27}$$

$$S_b = \frac{1}{2}(N^\dagger\tau_b N - N\tau_b N^\dagger). \tag{3.28}$$

Para la contribución cuadrática obtenemos

$$\begin{aligned} J_{2b}^\mu &= if_\pi^2\,\mathrm{Tr}(S_b a^\mu) \\ &\quad +\frac{i}{2}\Big\{K^\dagger M_b D^\mu K - (D^\mu K)^\dagger M_b K - \mathrm{Tr}(S_b a^\mu)K^\dagger K\Big\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Para la contribución cuártica obtenemos

$$
\begin{aligned}
J^{\mu}_{4b} \;=\;& -\frac{i}{\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\left([S_b, a_\nu][a^\mu, a^\nu]\right) \\
&+\frac{i}{4\epsilon^2 f_K^2}\Big\{-\ \mathrm{Tr}(a^\mu a^\nu)\left(K^\dagger M_b D_\nu K - (D_\nu K)^\dagger M_b K\right) \\
&\qquad + \mathrm{Tr}(a_\nu a^\nu)\left(K^\dagger M_b D^\mu K - (D^\mu K)^\dagger M_b K\right) \\
&\qquad -3\left(K^\dagger M_b [a^\nu, a^\mu] D_\nu K - (D_\nu K)^\dagger [a^\mu, a^\nu] M_b K\right) \\
&\qquad + \mathrm{Tr}(S_b a^\nu)\left((D^\mu K)^\dagger D_\nu K + (D_\nu K)^\dagger D^\mu K\right) \\
&\qquad -2\ \mathrm{Tr}(S_b a^\mu)\left((D^\nu K)^\dagger D_\nu K\right) \\
&\qquad +3\left((D^\mu K)^\dagger [a^\nu, S_b] D_\nu K - (D_\nu K)^\dagger [a^\nu, S_b] D^\mu K\right) \\
&\qquad + \{2\,\mathrm{Tr}(a^\mu a^\nu)\,\mathrm{Tr}(a_\nu S_b) - 2\,\mathrm{Tr}(a_\nu a^\nu)\,\mathrm{Tr}(a^\mu S_b) \\
&\qquad\quad +3\,\mathrm{Tr}([a^\nu, a^\mu][a_\nu, S_b])\}\, K^\dagger K\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

y para la contribución anómala

$$
\begin{aligned}
J^{\mu}_{(an)b} \;=\;& -\frac{N_c}{4f_K^2}\Big\{B^\mu K^\dagger M_b K + \frac{\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}}{3\pi^2}\left((D_\alpha K)^\dagger a_\beta a_\gamma S_b K - K^\dagger S_b a_\alpha a_\beta D_\gamma K\right. \\
&\qquad \left. - \mathrm{Tr}(a_\alpha M_b)((D_\beta K)^\dagger D_\gamma K + K^\dagger a_\beta a_\gamma K)\right)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Tomando $Q_8 = \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}}$ obtenemos la parte isoescalar. Para la contribución cuadrática obtenemos

$$
J^{\mu}_{(2)8} \;=\; \frac{i}{2}(K^\dagger D^\mu K - D^\mu K^\dagger K). \tag{3.32}
$$

Para la contribución cuártica obtenemos

$$
\begin{aligned}
J^{\mu}_{(4)8} \;=\;& \frac{i}{4\epsilon^2 f_K^2}\Big\{\mathrm{Tr}(a^\mu a^\nu)\left((D_\nu K)^\dagger K - K^\dagger D_\nu K\right) \\
&\qquad + \mathrm{Tr}(a_\nu a^\nu)\left(K^\dagger D^\mu K - (D^\mu K)^\dagger K\right) \\
&\qquad +3\left(K^\dagger [a^\mu, a^\nu] D_\nu K + (D_\nu K)^\dagger [a^\mu, a^\nu] K\right)\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

y para la contribución anómala

$$
J^{\mu}_{(an)8} \;=\; \frac{N_c}{6}B^\mu - \frac{N_c}{4f_K^2}B^\mu K^\dagger K. \tag{3.34}
$$

A continuación presentamos los elementos de matriz diagonales correspondientes al estado fundamental $\Lambda = \frac{1}{2}$, $l = 1$, incluyendo términos hasta orden $\mathrm{O}(N_c^0)$. Para los antikaones en el estado fundamental tenemos en las siguientes fórmulas

$$
\vec{J}_K \;\equiv\; <\Lambda'_z|\vec{J}_K|\Lambda_z> = -\chi^\dagger_{\Lambda'_z}\frac{\vec{\tau}}{2}\chi_{\Lambda_z}. \tag{3.35}
$$

La contribución cuadrática isovectorial es

$$\begin{aligned} J^0_{2b} &= -f_\pi^2 \sin^2 F(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}\cdot\hat{r}\;\hat{r}) \\ &+2\frac{k^2}{4\pi}\omega_1 \left[(1+\cos F)\vec{J}_K\cdot\hat{r}\;\hat{r} - \cos F\;\vec{J}_K\right], \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} J^i_{2b} &= -f_\pi^2 \frac{\sin^2 F}{r}\epsilon_{ibl}\hat{r}^l \\ &-\frac{1}{8\pi}\frac{k^2}{r}(\cos F + \cos 2F)\;\epsilon_{ibl}\;\hat{r}^l. \end{aligned} \tag{3.37}$$

La contribución cuártica isovectorial es

$$\begin{aligned} J^0_{4b} &= -\frac{1}{\epsilon^2}\sin^2 F\left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\right)(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}\cdot\hat{r}\;\hat{r}) \\ &+\frac{\omega_1}{8\pi\epsilon^2 f_K^2}\Bigg\{k^2\left(F'^2 + 4\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\left(2\cos^2\frac{F}{2}\;\vec{J}_K\cdot\hat{r}\;\hat{r} - \cos F\;\vec{J}_K\right) \\ &\qquad -2k^2\frac{\sin^2 F}{r^2}\vec{J}_K \\ &\qquad +6kk'F'\sin F(\vec{J}_K\cdot\hat{r}\;\hat{r} - \vec{J}_K)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} J^i_{4b} &= -\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\sin^2 F}{r}\left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\epsilon_{ibl}\hat{r}^l \\ &-\frac{1}{16\pi\epsilon^2 f_K^2}\Bigg\{\frac{k^2}{r}\Bigg[\left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\right)(\cos F\cos^2\frac{F}{2} - 4\sin^2 F) \\ &\qquad\qquad +3\frac{\sin^2 F}{r^2}\cos F\cos^2\frac{F}{2} + 8\frac{\sin^2 F}{r^2}\cos^4\frac{F}{2}\Bigg] \\ &\qquad +2(k'^2 - k^2\omega_1^2)\frac{\sin^2 F}{r} \\ &\qquad +3kk'F'\frac{\sin F}{r}(1+2\cos F)\Bigg\}\;\epsilon_{ibl}\;\hat{r}^l \end{aligned} \tag{3.39}$$

y la contribución anómala isovectorial es

$$\begin{aligned} J^0_{(an)b} &= -\frac{N_c}{24\pi^3 f_K^2}\Bigg\{k^2 F'\frac{\sin^2 F}{r^2}\;\vec{J}_K \\ &\qquad +2\frac{k^2}{r^2}\cos^2\frac{F}{2}\Big[kF'\cos^2\frac{F}{2}\;\vec{J}_K\cdot\hat{r}\;\hat{r} \\ &\qquad\qquad -k'\sin F\left(\vec{J}_K\cdot\hat{r}\;\hat{r} - \vec{J}_K\right)\Big]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$J^i_{(an)b} = -\frac{N_c}{48\pi^3 f_K^2}\frac{\omega_1}{r}\left[k^2F'\sin^2 F + kk'\sin 2F\right]\;\epsilon_{ibl}\;\hat{r}^l. \tag{3.41}$$

La contribución cuadrática isoescalar es

$$J^0_{2(8)} = -\frac{\omega_1}{4\pi}k^2, \tag{3.42}$$

$$J^i_{2(8)} = \frac{1}{2\pi}\frac{k^2}{r}\cos^2\frac{F}{2}\ \hat{r}\times\vec{J}_K. \tag{3.43}$$

La contribución cuártica isoescalar es

$$J^0_{4(8)} = -\frac{\omega_1 k^2}{16\pi\epsilon^2 f_K^2}\left(F'^2+2\frac{\sin^2 F}{r^2}\right), \tag{3.44}$$

$$J^i_{4(8)} = \frac{1}{8\pi\epsilon^2 f_K^2}\left[\frac{k^2}{r}\left(F'^2+4\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\cos^2\frac{F}{2}+3kk'F'\frac{\sin F}{r}\right]\ \hat{r}\times\vec{J}_K \tag{3.45}$$

y la contribución anómala isoescalar es

$$J^0_{an(8)} = -\frac{N_c}{12\pi^2}F'\frac{\sin^2 F}{r^2}+\frac{N_c}{32\pi^3 f_K^2}k^2F'\frac{\sin^2 F}{r^2}, \tag{3.46}$$

$$J^i_{an(8)} = \frac{N_c}{12\pi^2}\frac{\sin^2 F}{r}F'\left(\hat{r}\times\vec{\Omega}\right)^i. \tag{3.47}$$

4 Decaimientos electromagnéticos

En esta sección estudiamos los decaimientos radiativos de los hiperones. Obtenemos predicciones para los anchos de decaimiento totales. Además calculamos el cociente E2/M1 entre las transiciones cuadrupolares eléctricas (E2) y dipolares magnéticas (M1) correspondientes a los decaimientos del decuplete al octete.

Próximamente los experimentos que se realizarán en CEBAF[4] y Fermilab[5, 6] proveerán información nueva y precisa sobre los decaimientos electromagnéticos de los hiperones. Esto hace que sea de gran interés estudiar estas transiciones en los diferentes modelos teóricos y comparar las distintas predicciones. Las transiciones entre estados hadrónicos son más sensibles a su estructura interna que el espectro de los hadrones, por lo que usualmente constituyen una puesta a prueba más exigente para los distintos modelos que las propiedades "diagonales" como las masas y los momentos magnéticos. Los decaimientos radiativos de hiperones ya se calcularon hace algún tiempo en el modelo de quarks no-relativista [41, 42] y en el MIT bag model [42]. Más recientemente este tipo de transiciones también fue examinado en el contexto de la teoría de perturbaciones quiral para bariones pesados [43] y también en una simulación numérica de QCD en la red [44]. Nosotros realizamos el estudio en el modelo solitónico de estados ligados [1].

Para los decaimientos del decuplete al octete $J^P = \frac{3}{2}^+ \longrightarrow J^P = \frac{1}{2}^+$ están permitidas las transiciones multipolares E2 y M1, cuadrupolar eléctrica y dipolar magnética respectivamente. A menos que exista alguna regla de selección particular las transiciones M1 dominan fuertemente con respecto a las transiciones E2. El cociente E2/M1 es una cantidad importante que refleja la posible existencia de deformaciones de carga en los estados bariónicos. De hecho, este cociente para $\Delta \to N\gamma$ recibió recientemente una considerable atención, tanto desde el punto de vista teórico [43, 44, 45] como del experimental [46].

4.1 Fórmulas generales

Esta subsección es un breve resumen de los pasos a seguir para obtener los anchos de decaimiento totales. Seguimos escencialmente las convenciones de la ref.[47]. Partimos de la siguiente expresión para la probabilidad de emisión por unidad de tiempo de un fotón con polarización $m = \pm 1$, con un vector de onda $\vec{k}$, debido a una transición multipolar $(\alpha \to \beta, al)$

$$T_{\beta\alpha}(\vec{k}m;al) \;=\; \frac{k}{2\pi}|S_{\beta\alpha}(\vec{k}m;al)|^2 d\Omega_{\hat{k}} \tag{4.1}$$

donde $d\Omega_{\hat{k}}$ es el diferencial de angulo sólido y

$$S_{\beta\alpha}(\vec{k}m;al) \;=\; <\beta|S_{lm}(\vec{k};a)|\alpha> . \tag{4.2}$$

El índice a indica si la transición es eléctrica (E) o magnética (M). El momento angular está dado por l. El cambio en la paridad entre los estados iniciales y finales está dado por $(-1)^l$ para las transiciones eléctricas y $(-1)^{l+1}$ para las transiciones magnéticas. Tomando el eje z en la dirección de $\vec{k}$ obtenemos

$$S_{lm}(k;E) \;=\; \sqrt{2\pi}\sqrt{2l+1}\; i^{l+1}\; \Omega_{lm}(k;E), \tag{4.3}$$

$$S_{lm}(k;M) \;=\; \sqrt{2\pi}\sqrt{2l+1}\; i^{l}\; \Omega_{lm}(k;M) \tag{4.4}$$

con

$$\Omega_{lm}(k;a) \;=\; \int \vec{j}_{em}\cdot\vec{A}_{lm}(k,\vec{r};a)\; d^3r \tag{4.5}$$

donde

$$\vec{A}_{lm}(k,\vec{r};M) \;=\; \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\vec{L}\left[j_l(kr)Y_{lm}(\hat{r})\right], \tag{4.6}$$

$$\vec{A}_{lm}(k,\vec{r};E) \;=\; \frac{-i}{k\sqrt{l(l+1)}}\vec{\nabla}\times\left\{\vec{L}\left[j_l(kr)Y_{lm}(\hat{r})\right]\right\}, \tag{4.7}$$

siendo j_l las funciones de Bessel esféricas. Con estas definiciones $S_{lm}(k;a)$ es un operador tensorial de orden l. Para obtener la expresión general que corresponde al caso en que $\vec{k}$ apunta en cualquier dirección realizamos una rotación

$$S_{\beta\alpha}(\vec{k}m;al) \;=\; \sum_q \mathcal{D}^l_{qm}(\hat{k})S_{\beta\alpha}(kq;al). \tag{4.8}$$

Reemplazando en (4.1), integrando sobre todas las direcciones de emisión usando

$$\int \mathcal{D}^{l*}_{m'q'}(\hat{k})\mathcal{D}^l_{mq}(\hat{k})d\Omega_k \;=\; \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{mm'}\delta_{qq'} \tag{4.9}$$

y sumando sobre las dos polarizaciones $m=\pm 1$ obtenemos

$$T_{\beta\alpha}(k;al) \;=\; \frac{4k}{2l+1}\sum_q |S_{\beta\alpha}(kq;al)|^2. \tag{4.10}$$

Usando el teorema de Wigner-Eckart tenemos

$$< \beta|S_{lm}|\alpha > \;=\; < J_iM_ilm|J_fM_f >< J_f||S_l||J_i >, \tag{4.11}$$

$$|\alpha > \;=\; |J_iM_i >, \tag{4.12}$$

$$|\beta > \;=\; |J_fM_f >, \tag{4.13}$$

donde los estados iniciales y finales son estados de buen momento angular. Sumando sobre estados finales (M_f), promediando sobre estados iniciales (M_i) y sumando sobre q, finalmente obtenemos para el ancho de decaimiento del proceso ($J_i \to J_f, al$)

$$\Gamma_{\beta\alpha}(k; al) \;=\; \frac{4k}{2l+1}\frac{2J_f+1}{2J_i+1}|< J_f||S_l(k;a)||J_i >|^2. \tag{4.14}$$

En términos de Ω_l

$$\Gamma_{\beta\alpha}(k; al) \;=\; 8\pi k\frac{2J_f+1}{2J_i+1}|< J_f||\Omega_l(k;a)||J_i >|^2. \tag{4.15}$$

En el caso de las transiciones El, siguiendo los pasos del teorema de Siegert que nos permite expresar la amplitud de transición en términos de la densidad de carga eléctrica, obtenemos

$$< \beta||\Omega_l^E||\alpha > \;=\; i\eta\sqrt{\frac{l+1}{l}} < \beta||\hat{O}_l||\alpha > \tag{4.16}$$

donde

$$\hat{O}_{lm}(k) \;=\; \int \rho_{em} j_l(kr) Y_{lm}(\hat{r}) d^3r \tag{4.17}$$

con $\eta = 1$ para la absorción y $\eta = -1$ para la emisión de un fotón. Finalmente obtenemos

$$\Gamma_{\beta\alpha}(k; El) \;=\; 8\pi k\frac{l+1}{l}\frac{2J_f+1}{2J_i+1}|< J_f||\hat{O}_l(k)||J_i >|^2. \tag{4.18}$$

4.2 Las expresiones del modelo

Como mencionamos en la sección introductoria, estamos interesados en los siguientes decaimientos radiativos del decuplete de hiperones

$$\begin{aligned} \Sigma^* &\to \Lambda\,\gamma\,, \\ \Sigma^* &\to \Sigma\,\gamma\,, \\ \Xi^* &\to \Xi\,\gamma\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

El desarrollo multipolar del campo electromagnético presentado en la subsección anterior nos permite obtener a partir de la ec.(4.15) la siguiente expresión para el ancho de decaimiento correspondiente a las transiciones dipolares magnéticas

$$\Gamma_{M1} \;=\; 18\; e^2\; q\; | < \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\; |\hat{M}_3(q)|\; \tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\; > |^2. \tag{4.20}$$

El elemento de matriz está tomado entre estados del decuplete y del octete de hiperones, ambos con proyección de spin $J_3 = +1/2$. El operador $\hat{M}_3(q)$ está definido como

$$\hat{M}_3(q) \;=\; \frac{1}{2} \int \frac{j_1(qr)}{r} \left(\vec{r}\; \times \vec{J}_{em}\right)_3 \; d^3r \tag{4.21}$$

donde $j_1(qr)$ es la función de Bessel esférica para $l = 1$ y $\vec{J}_{em}$ es la corriente electromagnética. Por otro lado, el ancho de decaimiento correspondiente a las transiciones cuadrupolares eléctricas se obtiene a partir de la ecuación (4.18) y está dado por

$$\Gamma_{E2} \;=\; \frac{675}{8}\; e^2\; q\; | < \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\; |\hat{Q}_{33}(q)|\; \tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\; > |^2\,, \tag{4.22}$$

donde el operador $\hat{Q}_{33}(q)$ está definido como

$$\hat{Q}_{33}(q) \;=\; \int d^3r\; \frac{j_2(qr)}{r^2} \left(z^2 - \frac{r^2}{3}\right) \rho^{em}\,. \tag{4.23}$$

Aquí j_2 es la función de Bessel esférica para $l = 2$ y ρ^{em} la densidad de carga eléctrica. Las energías típicas de los fotones emitidos en los decaimientos que nos ocupan y los radios de los hiperones satisfacen aproximadamente $qr \approx 1$. En este caso se cumple la condición $j_{l-1}(qr) >> j_{l+1}(qr)$ y la aplicación del teorema de Siegert para la deducción de la ec.(4.22) es válida. Una ventaja importante de este método es que evita inconsistencias relacionadas con la cuantización colectiva del Skyrmión [45].

Los operadores $\hat{M}_3(q)$ y $\hat{Q}_{33}(q)$ se pueden obtener a partir de las expresiones explícitas de $\vec{J}_{em}$ y ρ_{em} presentadas en la sección 3. Llegamos a la siguiente expresión para $\hat{M}_3(q)$

$$\hat{M}_3(q) \;=\; \eta_{s,S}(q)\; J_3^c + \eta_{s,K}(q)\; J_3^K - 2(\eta_{v,S}(q) + |\mathcal{S}|\eta_{v,K}(q))\; D_{33}^{(1)} \tag{4.24}$$

donde J^c es el momento angular colectivo , J^K el spin del kaon ligado y $D_{33}^{(1)}$ una matriz de Wigner. Estos operadores ya fueron presentados oportunamente al discutir los momentos magnéticos. La dependencia en el momento q está contenida en las siguientes funciones, estrechamente relacionadas con los momentos magnéticos elementales.

$$\begin{aligned}
\eta_{s,S}(q) &= -\frac{1}{3\pi\Theta}\int dr\ rj_1(qr)\sin^2 FF', && (4.25)\\
\eta_{v,S}(q) &= \frac{2\pi}{3}f_\pi^2\int dr\ rj_1(qr)\sin^2 F\left[1+\frac{1}{\epsilon^2 f_\pi^2}\left(F'^2+\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right], && (4.26)\\
\eta_{s,K}(q) &= c\ \eta_{s,S}(q)-\frac{2}{3}\int dr\ rj_1(qr)\left\{k^2\cos^2\frac{F}{2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left[4\frac{k^2}{r^2}\sin^2 F\cos^2\frac{F}{2}+k^2F'^2\cos^2\frac{F}{2}+3kk'F'\sin F\right]\right\} && (4.27)\\
\eta_{v,K}(q) &= \frac{1}{6}\int dr\ rj_1(qr)\left\{k^2\cos^2\frac{F}{2}\left(1-4\sin^2\frac{F}{2}\right)\right.\\
&\quad+\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left[4\frac{k^2}{r^2}\sin^2 F\cos^2\frac{F}{2}\left(3-8\sin^2\frac{F}{2}\right)\right.\\
&\quad+k^2F'^2\cos^2\frac{F}{2}\left(1-18\sin^2\frac{F}{2}\right)-2k^2\omega^2\sin^2 F\\
&\quad\left.\left.+2k'^2\sin^2 F+3kk'F'\sin F\left(3-4\sin^2\frac{F}{2}\right)\right]\right\}\\
&\quad+\frac{N_c}{72}\frac{\omega}{f_K^2\pi^2}\int dr\ rj_1(qr)\left(k^2\sin^2 FF'+kk'\sin 2F\right). && (4.28)
\end{aligned}$$

En las ecuaciones precedentes los subíndices s y v denotan las partes isoescalares e isovectoriales. Las contribuciones del solitón y del kaón están indicadas con los subíndices S yK, respectivamente. Para el operador relacionado con las transiciones cuadrupolares $\hat{Q}_{33}(q)$ obtenemos

$$\hat{Q}_{33}(q) = \nu_{v,S}(q)\left[J_3^c\ D_{33}^{(1)}+\frac{I_3}{3}\right]+\nu_{v,K}(q)\left[J_3^K\ D_{33}^{(1)}-\frac{J_a^K\ D_{3a}^{(1)}}{3}\right] \quad (4.29)$$

donde I_3 es la componente z del operador de isospín y la dependencia en q está contenida en las funciones $\nu_{v,S}(q)$ y $\nu_{v,K}(q)$ que son

$$\begin{aligned}
\nu_{v,S}(q) &= \frac{8\pi f_\pi^2}{15\Theta}\int dr\ r^2\ j_2(qr)\ \sin^2 F\left[1+\frac{1}{\epsilon^2 f_\pi^2}(F'^2+\frac{\sin^2 F}{r^2})\right], && (4.30)\\
\nu_{v,K}(q) &= c\ \nu_{v,S}+\frac{8}{15}\int dr\ r^2\ j_2(qr)\left\{\omega\ k^2\cos^2\frac{F}{2}\right.\\
&\quad+\frac{\omega}{4\epsilon^2 f_K^2}\left[k^2\cos^2\frac{F}{2}(F'^2+4\frac{\sin^2 F}{r^2})+3kk'F'\sin F\right]\\
&\quad\left.-\frac{N_c}{12\pi^2 f_K^2}\frac{\cos^2\frac{F}{2}}{r^2}\left[k^2F'\cos^2\frac{F}{2}-kk'\sin F\right]\right\}. && (4.31)
\end{aligned}$$

Para calcular los elementos de matriz correspondientes a los operadores $\hat{M}_3(q)$ y $\hat{Q}_{33}$ tenemos que evaluar los elementos de matriz fuera de la diagonal de J_3^c, J_3^K, $I_3\ D_{33}^{(1)}$, $J_3^c D_{33}^{(1)}$, $J_3^K D_{33}^{(1)}$ y $J_a^K D_{3a}^{(1)}$ entre estados de hiperones. Esto se hace utilizando las técnicas usuales de cálculo para operadores de momento angular.
Para $\hat{M}_3$ obtenemos

$$< \Lambda|\hat{M}_3|\Sigma_0 > \ = \ -\frac{2}{3}\left[\eta_{v,S}(q) + \eta_{v,K}(q)\right] , \tag{4.32}$$

$$< \Lambda|\hat{M}_3|\Sigma_0^* > \ = \ \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\eta_{v,S}(q) + \eta_{v,K}(q)\right] , \tag{4.33}$$

$$< \Sigma_0|\hat{M}_3|\Sigma_0^* > \ = \ \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\eta_{s,S}(q) - \eta_{s,K}(q)\right] , \tag{4.34}$$

$$< \Sigma_\pm|\hat{M}_3|\Sigma_\pm^* > \ = \ \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\eta_{s,S}(q) - \eta_{s,K}(q) \pm (\eta_{v,S}(q) + \eta_{v,K}(q))\right] , \tag{4.35}$$

$$< \Xi_{\underline{0}}|\hat{M}_3|\Xi_{\underline{0}}^* > \ = \ \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\eta_{s,S}(q) - \eta_{s,K}(q) \pm \frac{4}{3}(\eta_{v,S}(q) + 2\eta_{v,K}(q))\right] , \tag{4.36}$$

mientras que para $\hat{Q}_{33}$ obtenemos

$$< \Lambda|\hat{Q}_{33}(q)|\Sigma_0^* > \ = \ -\frac{\sqrt{2}}{6}\nu_{v,S}(q) , \tag{4.37}$$

$$< \Sigma_0|\hat{Q}_{33}(q)|\Sigma_0^* > \ = \ 0 , \tag{4.38}$$

$$< \Sigma_\pm|\hat{Q}_{33}(q)|\Sigma_\pm^* > \ = \ \mp\frac{\sqrt{2}}{6}\left[\nu_{v,S}(q) - \frac{\nu_{v,K}(q)}{6}\right] , \tag{4.39}$$

$$< \Xi_{\underline{0}}|\hat{Q}_{33}(q)|\Xi^*{\underline{0}} > \ = \ \mp\frac{4\sqrt{2}}{27}\nu_{v,K}(q) . \tag{4.40}$$

Nótese que para $qr << 1$ las funciones de Bessel que aparecen en las expresiones para los η's y ν's se pueden reemplazar por la expresión aproximada. En ese caso tenemos

$$\hat{M}_3(q) \ \rightarrow \ \frac{q}{3}\ \mu_3 , \tag{4.41}$$

$$\hat{Q}_{33}(q) \ \rightarrow \ \frac{q^2}{15}\ Q_{33} . \tag{4.42}$$

Aquí, μ_3 es el operador de momento magnético usual (estático) y Q_{33} es el operador de momento cuadrupolar eléctrico. Sin embargo, hay que recordar que para las transiciones que nos interesan $qr \approx 1$, por lo que la aproximación "estática" no es buena.

Finalmente damos la expresión para el cociente E2/M1 que mencionamos en la introducción. Este cociente está definido en términos de los elementos de matriz E2 y M1 como [45]

$$\frac{E2}{M1} = \frac{1}{3}\frac{< D(1/2)|S^{E2}_{2,1}|O(-1/2) >}{< D(1/2)|S^{M1}_{1,1}|O(-1/2) >}. \tag{4.43}$$

Donde $O(-1/2)$ representa un estado del octete con $J_3 = -1/2$, $D(1/2)$ un estado del decuplete con $J_3 = +1/2$ y $S_{l,m}$ es el operador definido en la subsección 4.1. En términos de los elementos de matriz de los operadores $\hat{M}_3$ y $\hat{Q}_{33}$ este cociente puede expresarse como

$$\frac{E2}{M1} = \frac{5}{4}\frac{< \hat{Q}_{33} >}{< \hat{M}_3 >}. \tag{4.44}$$

Comparando esta expresión con la ec.(4.20,4.22) notamos que se satisface la siguiente relación

$$\frac{\Gamma_{E2}}{\Gamma_{M1}} = 3\left[\frac{E2}{M1}\right]^2. \tag{4.45}$$

En el límite $qr << 1$ la ec.(4.44) se reduce a la expresión

$$\frac{E2}{M1} \to \frac{q}{4}\frac{< Q_{33} >}{< \mu_3 >} \tag{4.46}$$

dada en la ref.[45] para el caso particular del proceso $N\gamma \to \Delta$.

4.3 Resultados numéricos y conclusiones

En nuestros cálculos utilizamos dos conjuntos de parámetros distintos con el objeto de estimar las incertezas intrínsecas del modelo. Los conjuntos SET I y SET II a los que hacen referencia las tablas VII y VIII fueron presentados oportunamente en la subsección 2.4. Los resultados para los anchos de decaimiento totales están dados en la tabla VII. En todos nuestros cálculos tomamos para el momento q del fotón la diferencia entre las masas empíricas de los estados iniciales y finales [41, 42]. Vemos que nuestros resultados coinciden bien con los del modelo de quarks no relativista (NRQM) [41, 42, 44] y con el bag model (BM) [42]. Los valores que se obtienen usando la teoría de perturbaciones quiral para bariones pesados [43] y QCD en la red [44] también cubren un rango consistente con nuestras predicciones. Esta coincidencia general entre los distintos modelos contrasta con la situación que tenemos para los anchos de decaimiento de la $\Lambda(1405)$ [3] donde la predicción del NRQM es mucho mayor que la obtenida con otros modelos. Esto es otra indicación de que

Tabla VII

	Nuestro cálculo		NRQM	BM	empírico
	SET I	SET II			
$\Sigma_0 \to \Lambda\gamma$	8	7	8.5	4.6	8.9 ± 0.7
$\Sigma_0^* \to \Lambda\gamma$	243	170	273	152	
$\Sigma_0^* \to \Sigma_0\gamma$	19	11	18	15	
$\Sigma_+^* \to \Sigma_+\gamma$	91	59	110		
$\Sigma_-^* \to \Sigma_-\gamma$	1	1	2.5		
$\Xi_0^* \to \Xi_0\gamma$	148	97	135		
$\Xi_-^* \to \Xi_-\gamma$	5	5	3.2		

Table 7: Anchos de decaimientos radiativos para hiperones (en keV) calculados en el modelo solitónico de estados ligados. Nótese que los anchos parciales E2 y M1 se pueden obtener a partir de los anchos totales que figuran en esta tabla usando la ec.(4.45) junto con las predicciones para E2/M1 de la tabla VIII. También presentamos las predicciones del modelo de quarks no relativista (NRQM) [41, 42, 44] y del bag model (BM) [42]. Incluimos la predicción para el ancho de decaimiento $\Sigma_0 \to \Lambda\gamma$ junto con su valor empírico, el único valor medido hasta el momento.

contrariamente a los demás hiperones del octete, la $\Lambda(1405)$ no se puede considerar simplemente como un estado de tres quarks.

Otra característica interesante de nuestro cálculo es la supresión de los decaimientos $\Sigma_-^* \to \Sigma_-\gamma$, $\Xi_-^* \to \Xi_-\gamma$ de acuerdo con la bien conocida regla de selección de U-spin de $SU(3)$ [48, 49]. En la tabla VII también incluimos el ancho de decaimiento para la única transición permitida dentro del octete, $\Sigma_0 \to \Lambda\gamma$, que es puramente M1. Hasta el momento, este es el único ancho de decaimiento que se conoce empíricamente. Como vemos, la predicción del modelo solitónico es razonablemente buena. En el límite estático mencionado anteriormente el momento magnético de transición correspondiente a este proceso ya fue calculado en la ref.[38].

Los cocientes $E2/M1$ para las transiciones del decuplete al octete están dados en la tabla VIII. Como era de esperar, para las transiciones permitidas obtenemos valores pequeños, mientras que para las transiciones prohibidas por la regla de selección de U-spin, $\Sigma_-^* \to \Sigma_-\gamma$, $\Xi_-^* \to \Xi_-\gamma$ obtenemos cocientes grandes. Nuestros valores son similares en módulo pero tienen signo contrario a los resultados citados en las refs.[43, 44]. Esto se debe probablemente a una diferencia en la definición del cociente E2/M1. Aquí usamos las convenciones usadas en [45, 47]. En el caso de las transiciones prohibidas nuestros valores son un poco más grandes. Para estas transiciones los valores de $M1$ y $E2$ son pequeños, de manera que los valores precisos del cociente $E2/M1$ son más sensibles a los detalles de cada modelo y es de esperar que ocurran diferencias cuantitativas. Una característica particular de nuestro modelo es que la transición E2 (y por lo tanto el cociente E2/M1) correspondiente al decaimiento $\Sigma_0^* \to \Sigma_0 \gamma$ se anula. Esto es una consecuencia de la simetría esférica de la densidad de carga isoescalar. Como se puede ver en la ec.(4.29) el operador $\hat{Q}_{33}$ sólo tiene componentes isovectoriales y haciendo un cálculo sencillo se verifica que sus elementos de matriz entre estados del mismo isospín son proporcionales a la proyección del isospín, con lo que la amplitud para el proceso mencionado es cero.

Tabla VIII

	SET I	SET II
$\Sigma_0^* \to \Lambda$	- 4.56	- 5.43
$\Sigma_0^* \to \Sigma_0$	0	0
$\Sigma_+^* \to \Sigma_+$	- 4.84	- 7.61
$\Sigma_-^* \to \Sigma_-$	- 57.7	- 51.1
$\Xi_0^* \to \Xi_0$	- 3.13	- 4.38
$\Xi_-^* \to \Xi_-$	- 17.8	- 18.5

Table 8: Cocientes E2/M1 (en %) calculados en el modelo solitónico de estados ligados.

5 Las polarizabilidades

En esta sección presentamos un cálculo detallado de las polarizabilidades eléctricas y magnéticas de los hiperones del octete.

Las polarizabilidades electromagnéticas son cantidades de interés para la mejor comprensión de la estructura hadrónica [50]. Estas caracterizan la respuesta dinámica de los hadrones frente a campos electromagnéticos externos. Hasta el presente se le ha dedicado una gran cantidad de trabajo experimental y teórico a las polarizabilidades del protón y del neutrón (ver p.ej. refs.[51, 52] como resúmenes recientes de trabajos experimentales y teóricos, respectivamente), pero muy poco se sabe sobre las polarizabilidades de los hiperones. Sin embargo, con la puesta en funcionamiento de los haces de hiperones en FNAL y CERN, la situación experimental se modificará. En particular, las polarizabilidades del hiperón Σ se medirán pronto en el experimento E781 SELEX de Fermilab [7, 6]. Estas circunstancias provocaron un cierto número de investigaciones teóricas en diferentes modelos de hadrones. Se hicieron predicciones en el modelo de quarks no relativista (NRQM) [49] y en teoría de perturbaciones quiral para bariones pesados (HBCPT) [53]. Como es bien sabido, ambos modelos tienen algunos problemas para describir las polarizabilidades magnéticas de los bariones. Dentro del NRQM es muy difícil entender la importante contribución diamagnética a la polarizabilidad magnética del nucleón. En el caso de HBCPT, las predicciones no pueden ser muy precisas mientras no se incluyan las excitaciones de los orbitales P (tipo Δ), que son de orden superior en la expansión quiral.

Por todas estas razones es interesante intentar una descripción basada en un punto de vista completamente diferente, como el que provee el modelo solitónico. Dentro del contexto de los solitones quirales, hasta el momento sólo se estudiaron las polarizabilidades eléctricas [54], en el modelo colectivo. En nuestro trabajo estudiamos las polarizabilidades estáticas, eléctricas y magnéticas, usando el modelo de estados ligados, que ya sabemos que da buenos resultados para los momentos magnéticos de los hiperones y sus radios [39, 55].

Las polarizabilidades estáticas están definidas en términos del cambio de energía δH que producen debido a la presencia de un campo eléctrico o magnético estático

$$\delta H \;=\; -\frac{1}{2}\,\alpha\,E^2 - \frac{1}{2}\,\beta\,B^2\,. \tag{5.1}$$

donde la polarizabilidad eléctrica es α y la polarizabilidad magnética es β. En lo que sigue estudiaremos las dependencias en E^2 y B^2 por separado, eligiendo convenientemente el potencial A^μ. A partir de la forma de la interacción (3.7) queda claro que hay en principio dos contribuciones a las polarizabilidades estáticas, una que proviene del término cuadrático en A^μ, que es la contribución *seagull* y la otra que se obtiene aplicando teoría de perturbaciones a segundo orden al término lineal en A^μ. Esta última contribución, llamada *dispersiva*, es muy pequeña en el caso eléctrico. En el Apéndice A realizamos una estimación de su magnitud. En el Apéndice B están resumidas las expresiones explícitas a partir de las cuales se obtienen las polarizabilidades.

5.1 La polarizabilidad eléctrica estática

El cambio en la energía proporcional a E^2 se puede obtener fácilmente a partir de (3.7) tomando un potencial A^μ de la forma

$$A^\mu = (A_0, 0)\,, \qquad\qquad A_0 = -zE \tag{5.2}$$

que corresponde a un campo eléctrico constante E a lo largo del eje z . Usando las definiciones (3.12, 3.13), las contribuciones seagull se pueden expresar como

$$\alpha_s = \frac{e^2}{2}\int d^3r\left\{z^2\left[f_\pi^2\,\mathrm{Tr}(P^2) + \frac{1}{2\epsilon^2}h_{ii} + \frac{f_K^2 - f_\pi^2}{3}\,\mathrm{Tr}\left\{(1-\sqrt{3}\lambda_8)(P^2U^\dagger + UP^2)\right\}\right]\right\}. \tag{5.3}$$

Al deducir la ec.(5.3) supusimos que las contribuciones de tipo *seagull* al Hamiltoniano son simplemente iguales a las contribuciones *seagull* que aparecen en el Lagrangiano, pero con signo opuesto. Alrededor de este tema se generó recientemente una controversia. En las refs.[52, 56] se argumentó que en general, en una teoría de campos las contribuciones *seagull* eléctricas en el Hamiltoniano deben anularse. Sin embargo, como se discutió en [57], esto no es así si los grados de libertad están restringidos a un subespacio colectivo. En esta última referencia se demostró explícitamente que el procedimiento que utilizamos es completamente válido cuando se trata al modelo de Skyrme en la presencia de un campo eléctrico constante introduciendo coordenadas colectivas.

La contribución dispersiva α_d está determinada por los elementos de matriz del operador dipolar eléctrico que describen transiciones entre el estado particular del octete que se está examinando y estados excitados de paridad negativa. En general se cree que α_d es mucho menor que α_s[58]. Por esta razón no volveremos a considerarlo en nuestra discusión. En el apéndice A realizamos una estimación de la aproximación en la que estamos incurriendo de esta manera.

Finalmente observamos que α_s no tiene contribuciones provenientes del término anómalo (3.6), debido a la antisimetría del tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Reemplazando en α_s el ansatz adiabáticamente rotado, se obtiene el siguiente operador

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \Big[\gamma_1^{(e)} + \gamma_2^{(e)}\left(D_{33}^{(1)}\right)^2 + \gamma_3^{(e)}|\mathcal{S}| \\ &\qquad + \gamma_4^{(e)}|\mathcal{S}|\left(D_{33}^{(1)}\right)^2 + \gamma_5^{(e)}\ J_a^K D_{3a}^{(1)} + \gamma_6^{(e)}\ J_3^K D_{33}^{(1)}\Big]\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde absorbimos la carga eléctrica e^2 en las polarizabilidades elementales $\gamma_i^{(e)}$ ($i = 1, \ldots, 6$), que dependen del perfil del solitón y de la función de onda del kaón ligado sólamente. Sus expresiones explícitas están presentadas en el apéndice B. Finalmente debemos evaluar los elementos de matriz diagonales de los operadores que aparecen en (5.4) para los distintos estados de hiperones. Esto se hace usando las técnicas usuales en los cálculos con estados de buen momento angular. Para el octete de bariones correspondiente al estado fundamental obtenemos

$$\alpha_s(\Lambda) = \gamma_1^{(e)} + \gamma_3^{(e)} + \frac{1}{3}\left(\gamma_2^{(e)} + \gamma_4^{(e)}\right), \tag{5.5}$$

$$\alpha_s(\Sigma_0) = \gamma_1^{(e)} + \gamma_3^{(e)} + \frac{1}{3}\left(\gamma_2^{(e)} + \gamma_4^{(e)}\right), \tag{5.6}$$

$$\alpha_s(\Sigma_\pm) = \gamma_1^{(e)} + \gamma_3^{(e)} + \frac{1}{3}\left(\gamma_2^{(e)} + \gamma_4^{(e)}\right) \pm \frac{1}{2}\left(\gamma_5^{(e)} + \frac{1}{3}\gamma_6^{(e)}\right), \tag{5.7}$$

$$\alpha_s(\Xi_{\underline{0}}) = \gamma_1^{(e)} + 2\gamma_3^{(e)} + \frac{1}{3}\left(\gamma_2^{(e)} + 2\gamma_4^{(e)}\right) \pm \frac{2}{3}\left(\gamma_5^{(e)} + \frac{1}{3}\gamma_6^{(e)}\right). \tag{5.8}$$

5.2 La polarizabilidad magnética estática

Para calcular la polarizabilidad magnética estática procedemos de manera similar. En este caso tomamos como potencial vector

$$A^\mu = (0, -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}) \tag{5.9}$$

que es el que corresponde a un campo magnético $\vec{B}$ constante a lo largo del eje z, $\vec{B} = B\hat{z}$. Debemos tener en cuenta ambas contribuciones, la *seagull* y la dispersiva. El hamiltoniano que se deriva de (3.7) es

$$H = H^{fuerte} + H^{lin} + H^{cuad}, \tag{5.10}$$

donde, como antes, las contribuciones provenientes de L^{an} se anulan debido a razones de simetría. El término cuadrático nos da la contribución *seagull* para la polarizabilidad magnética. Su forma explícita en términos de los operadores P y $h_{\mu\nu}$ es

$$\beta_s = -\frac{e^2}{8}\int d^3r \Bigg\{ (r^2 - z^2)\left[f_\pi^2 \,\mathrm{Tr}(P^2) + \frac{f_K^2 - f_\pi^2}{3}\,\mathrm{Tr}\left\{ (1-\sqrt{3}\lambda_8)(P^2U^\dagger + UP^2) \right\} \right] + \\ + \frac{1}{2\epsilon^2}\left[r_i r_j h_{ij} + r^2 h_{33} - r_i r_3 (h_{i3} + h_{3i}) - (r^2 - z^2) h_{00} \right] \Bigg\}. \qquad (5.11)$$

Un cálculo extenso nos demuestra que β_s tiene la misma forma operatorial que α_s

$$\begin{aligned} \beta_s \;=\; & \Big[\gamma_1^{(m)} + \gamma_2^{(m)} \left(D_{33}^{(1)}\right)^2 + \gamma_3^{(m)} |\mathcal{S}| \\ & + \gamma_4^{(m)} |\mathcal{S}| \left(D_{33}^{(1)}\right)^2 + \gamma_5^{(m)}\; J_a^K D_{3a}^{(1)} + \gamma_6^{(m)}\; J_3^K D_{33}^{(1)} \Big] , \end{aligned} \qquad (5.12)$$

donde todos los operadores involucrados tienen que ser evaluados nuevamente entre los estados de hiperones del octete. Por lo tanto, para la contribución *seagull* de las polarizabilidades magnéticas obtenemos expresiones formales similares a las de las ec. (5.5)–(5.8), donde las polarizabilidades elementales $\gamma_i^{(e)}$ están reemplazadas por $\gamma_i^{(m)}$ $(i = 1, \ldots, 6)$. Sus expresiones explícitas están expresadas en el apéndice B.

Queremos observar que al derivar la ec. (5.11) supusimos una vez más de manera implícita que $H^{cuad} = -L^{cuad}$. Estos es correcto a menos de una pequeña contribución que proviene de L^{lin}, proporcional al cociente $(\mu_s/M_N)^2$, donde μ_s y M_N son los momentos magnéticos isoescalares y la masa del nucleón, respectivamente. Para una discusión más detallada se puede ver p.ej. la ref.[59].

Las contribuciones dispersivas se generan a partir del término H^{lin} en (5.10). Usando teoría de perturbaciones a segundo orden se obtiene

$$\beta_d^H = \frac{e^2}{2M_N^2} \sum_{H' \neq H} \frac{|\langle H|\mu_3|H'\rangle|^2}{m_{H'} - m_H} \qquad (5.13)$$

donde los índices H y H' se refieren a distintos estados de hiperones. Al escribir la ec. (5.13) usamos la forma explícita de H^{lin} para el caso particular de un campo magnético constante B a lo largo del eje z.

$$H^{lin} = -\frac{e}{2M_N}\; B\; \mu_3 \qquad (5.14)$$

donde μ_3 es el operador de momento magnético discutido en la sección 3.

Los elementos de matriz relevantes se expresan en términos de los momentos magnéticos elementales $\mu_{s,i}, \mu_{v,i}$, ec.(3.20)-(3.23) y son

$$
\begin{aligned}
< \Lambda|\mu_3|\Sigma_0 > &= -\frac{2}{3}\left[\mu_{v,0} + \mu_{v,1}\right] , && (5.15)\\
< \Lambda|\mu_3|\Sigma_0^* > &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\mu_{v,0} + \mu_{v,1}\right] , && (5.16)\\
< \Sigma_0|\mu_3|\Sigma_0^* > &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\mu_{s,0} - \mu_{s,1}\right] , && (5.17)\\
< \Sigma_\pm|\mu_3|\Sigma_\pm^* > &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\mu_{s,0} - \mu_{s,1} \pm (\mu_{v,0} + \mu_{v,1})\right] , && (5.18)\\
< \Xi_{\underline{0}}|\mu_3|\Xi_{\underline{0}}^* > &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\mu_{s,0} - \mu_{s,1} \pm \frac{4}{3}(\mu_{v,0} + 2\mu_{v,1})\right] . && (5.19)
\end{aligned}
$$

Nótese que para cada hiperón del octete sólo algunos pocos elementos de matriz no se anulan.

5.3 Resultados numéricos y conclusiones

En nuestros cálculos numéricos utilizamos dos conjuntos de parámetros distintos, SET I y SET III, que ya fueron presentados en la sección 2.4.

Los resultados obtenidos se resumen en las tablas IX-XII. En las primeras dos tablas, las tablas IX y X, presentamos las polarizabilidades elementales γ_i para el caso eléctrico y magnético respectivamente. En las tablas XI y XII presentamos nuestros resultados para las polarizabilidades eléctricas y magnéticas, respectivamente. En el caso de las polarizabilidades magnéticas también presentamos las contribuciones *seagull* y dispersivas por separado.

Discutamos primero los valores de las polarizabilidades elementales γ_i. Vemos que para ambos conjuntos de parámetros las contribuciones puramente solitónicas γ_1 y γ_2 son mucho más grandes que las demás. Esto vale tanto para el caso eléctrico como para el magnético. Como resultado de este comportamiento esperamos una separación más bien pequeña entre los valores correspondientes a la contribución *seagull* de los distintos bariones. Esto se observa de hecho en las tablas XI y XII. También notamos que los valores de γ_i son bastante dependientes de los valores de los parámetros. Esto es de esperar al menos en el caso de los términos dominantes γ_1 y γ_2. Como es bien sabido, en el modelo de Skyrme estas magnitudes son básicamente proporcionales al cuadrado del radio isovectorial del nucleón[1] que a su vez es muy

[1]Esta relación vale estrictamente para el término seagull eléctrico. En el caso magnético hay una

Tabla IX

	Set I	Set III
$\gamma_1^{(e)}$	32.1	20.7
$\gamma_2^{(e)}$	-16.0	-10.4
$\gamma_3^{(e)}$	1.11	0.78
$\gamma_4^{(e)}$	0.34	0.19
$\gamma_5^{(e)}$	4.11	2.14
$\gamma_6^{(e)}$	-3.83	-2.23

Table 9: Las polarizabilidades eléctricas elementales (en $10^{-4} fm^3$), definidas en el apéndice B, para dos conjuntos de parámetros.

Tabla X

	Set I	Set III
$\gamma_1^{(m)}$	-11.1	-7.35
$\gamma_2^{(m)}$	-4.91	-3.00
$\gamma_3^{(m)}$	-0.62	-0.42
$\gamma_4^{(m)}$	0.22	0.10
$\gamma_5^{(m)}$	-0.93	-0.42
$\gamma_6^{(m)}$	-1.30	-0.72

Table 10: Las polarizabilidades magnéticas elementales en $10^{-4} fm^3$ (contribución seagull).

sensible a la elección de parámetros. SET I nos da el valor $< r_v^2 >= 1.08\ fm^2$ mientras que el valor que obtenemos con SET III es $< r_v^2 >= 0.70\ fm^2$. El valor empírico es $< r_v^2 >_{emp}= 0.81\ fm^2$. Por supuesto que esta dependencia en los parámetros se refleja en los valores de las polarizabilidades eléctricas y diamagnéticas de los hiperones. Por otro lado , las contribuciones dispersivas a las polarizabilidades magnéticas son mucho más estables ante un cambio de parámetros. Esto es una consecuencia de la compensación entre la dependencia con los parámetros del numerador y denominador en la ec.(5.13).

Es interesante comparar nuestras predicciones con las de otros modelos. Nuestros resultados nos dan un valor grande para la polarizabilidad eléctrica de Σ^+. Esto está de acuerdo con las predicciones del modelo de quarks de la ref.[49], $\bar{\alpha}_{\Sigma^+}^{NRQM} =$

corrección numéricamente pequeña .

Tabla XI

	Set I	Set III
N	26.7	17.3
Λ	28.0	18.1
Σ^0	28.0	18.1
Σ^+	29.4	18.8
Σ^-	26.5	17.4
Ξ^0	31.1	19.9
Ξ^-	27.3	18.0

Table 11: Polarizabilidades eléctricas (en $10^{-4} fm^3$) para el octete $\frac{1}{2}^+$. Sólo se considera la contribución seagull.

$20.8 \times 10^{-4} fm^3$. Sin embargo, este último modelo predice un valor mucho menor para el caso de Σ^-, $\bar{\alpha}_{\Sigma^-}^{NRQM} = 5.7 \times 10^{-4} fm^3$. Si bien nosotros también predecimos un valor menor para Σ^- comparado con el de Σ^+, en nuestro caso la separación entre ambos valores es mucho más pequeña. Como mencionamos antes, esto es una consecuencia directa del hecho de que en nuestro modelo las polarizabilidades eléctricas están dominadas por la contribución puramente solitónica. Un resultado similar también se encuentra en el tratamiento perturbativo del modelo colectivo $SU(3)$ [54].

Para completar la discusión es importante mencionar que en el caso del nucleón, donde el valor empírico de la polarizabilidad eléctrica $(\alpha_N)_{emp} = 12 \times 10^{-4} fm^3$ está bien establecido (ver la ref.[51] para una determinación reciente y un recuento de la situación experimental actual), el modelo de Skyrme predice un valor un poco grande en el caso del SET III y demasiado grande en el caso del SET I . Al igual que el problema de la masa del solitón, parece haber indicaciones de que esto se puede arreglar si se consideran las correcciones de orden superior [34]

Pasamos ahora a las polarizabilidades magnéticas. Nuestros resultados presentan diferencias más bien grandes entre los distintos hiperones. Esta diferenciación se debe a las contribuciones dispersivas. También observamos que en el caso del SET I obtenemos valores negativos debido a que la contribución *seagull* está sobreestimada. El valor que obtenemos para la polarizabilidad magnética de Σ^+ con el SET III es compatible con la predicción del modelo de quarks no relativista [49]. Por otro lado, en el caso de la Σ^-, si bien también obtenemos un comportamiento diamagnético, nuestro valor (en módulo) es mayor. Los resultados que se obtienen usando teoría de

Tabla XII

	Set I			Set III		
	β_s	β_d	β_{tot}	β_s	β_d	β_{tot}
N	-12.8	5.6	-7.2	-8.3	5.6	-2.7
Λ	-13.3	12.0	-1.3	-8.7	12.1	3.4
Σ^0	-13.3	-4.0	-17.3	-8.7	-4.0	-12.7
Σ^+	-14.0	10.1	-3.9	-9.1	10.4	1.3
Σ^-	-12.6	0.12	-12.5	-8.4	0.48	-7.9
Ξ^0	-14.8	13.0	-1.8	-9.6	14.0	4.4
Ξ^-	-13.0	0.59	-12.4	-8.7	1.5	-7.2

Table 12: Polarizabilidades magnéticas (en $10^{-4} fm^3$) de los hiperones del octete $\frac{1}{2}^+$. En este caso la parte dispersiva también contribuye a la polarizabilidad total.

perturbaciones quiral para bariones pesados son bastante diferentes de los nuestros, lo que es de esperar, ya que esos cálculos no incluyen excitaciones tipo Δ.

Debido a que existen discrepancias importantes entre los distintos modelos está claro que los futuros experimentos en FNAL y CERN serán de gran utilidad para poder discriminar entre ellos.

5.4 Apéndice A: Contribuciones dispersivas a la polarizabilidad eléctrica

En este apéndice hacemos una estimación de la magnitud de la contribución dispersiva a la polarizabilidad eléctrica de los hiperones. Esta se origina en las transiciones dipolares eléctricas a estados excitados de paridad negativa. Al igual que en el caso magnético, aplicamos teoría de perturbaciones a segundo orden al término lineal del hamiltoniano H^{lin}. En el caso de un campo eléctrico estático la expresión correspondiente a la contribución dispersiva es

$$\alpha_d^H = 2e^2 \sum_{H'} \frac{| < H'|d_3|H > |^2}{m_{H'} - m_H} \,, \tag{5.20}$$

donde d_3 es la tercer componente del operador dipolar eléctrico

$$d_3 = \int dV \; z \; \rho^{em} \,. \tag{5.21}$$

Consideraremos aquí el caso particular de la Λ, para la cual suponemos que la mayor contribución dispersiva a la polarizabilidad eléctrica proviene de tener a la $\Lambda(1405)$

como estado intermedio. De esta manera, $H = \Lambda$ y la suma sobre H' queda restringida a un sólo estado, $H' = \Lambda(1405)$. Para esta transición sólo necesitamos considerar la contribución isoescalar de los kaones a la densidad de carga ρ^{em}

$$\rho^{em}(kaon) = \frac{i}{2} f \left[K^\dagger \dot{K} - \dot{K}^\dagger K \right] - \lambda K^\dagger K \, , \tag{5.22}$$

donde f y λ son las mismas funciones que aparecen en la ecuación de movimiento de los kaones (sección 2), cuyas expresiones explícitas reproducimos aquí

$$\begin{aligned} f &= 1 + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[F'^2 + 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \right] , & (5.23) \\ \lambda &= - \frac{N_c}{8\pi^2 f_K^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \; F' \, . & (5.24) \end{aligned}$$

Tomando el elemento de matriz de ρ^{em} entre los estados $\Lambda(1405)$ y Λ obtenemos

$$< \Lambda(1405) | \rho^{em} | \Lambda >= - \left[f(\omega_0 + \omega_1) + 2\lambda \right] \; \frac{k_0 \; k_1}{4\pi} \; \hat{r} \cdot < \vec{J} > \tag{5.25}$$

donde $< \vec{J} >$ significa el elemento de matriz del operador de spin entre los estados $\Lambda(1405)$ y Λ. Finalmente $(\omega_0, \, k_0)$ y $(\omega_1, \, k_1)$ son la energía de ligadura de los kaones y la función de onda radial correspondiente en los canales $(1/2, 0)$ y $(1/2, 1)$, respectivamente. Obtenemos

$$< \Lambda(1405) | d_3 | \Lambda >= -\gamma \tag{5.26}$$

con

$$\gamma = \frac{1}{6} \int dr \; r^3 \left[f(\omega_0 + \omega_1) + 2\lambda \right] \; k_0 \; k_1 \, . \tag{5.27}$$

Para llegar a esta expresión realizamos una integral angular y tomamos además $< J_3 >= 1/2$. Reemplazando en la expresión para α obtenemos finalmente la contribución a la polarizabilidad eléctrica de la Λ debida a transiciones dipolares al estado intermedio de paridad negativa $\Lambda(1405)$

$$\alpha_d^\Lambda = \frac{2 \; e^2 \gamma^2}{m_{\Lambda(1405)} - m_\Lambda} \tag{5.28}$$

Numéricamente obtenemos

$$\alpha_d^\Lambda = 1.08 \times 10^{-4} \; fm^3 \tag{5.29}$$

para el SET I y

$$\alpha_d^\Lambda = 0.54 \times 10^{-4} \; fm^3 \tag{5.30}$$

para el SET III . Como ya habíamos anticipado, estos valores son mucho más pequeños que las contribuciones *seagull* presentadas en la tabla XI. Esto es, por supuesto, sólo una estimación del orden de magnitud de esta cantidad, ya que un cálculo completo debería incluir todos los estados intermedios posibles. Si bien aquí nos restringimos al caso de la Λ, resultados similares se esperan para el resto de los hiperones.

5.5 Apéndice B: Expresiones explícitas

Las polarizabilidades eléctricas elementales son:

$$\gamma_1^{(e)} = \frac{16}{15}\pi\ e^2 \int dr\ r^4 \sin^2 F \left[f_\pi^2 + \frac{1}{\epsilon^2}\left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] , \tag{5.31}$$

$$\gamma_2^{(e)} = -\frac{8}{15}\pi\ e^2 \int dr\ r^4 \sin^2 F \left[f_\pi^2 + \frac{1}{\epsilon^2}\left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] , \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3^{(e)} = \frac{1}{15}\ e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ & k^2(1+4\cos^2 F) \\ & - \frac{1}{\epsilon^2 f_K^2} \left[\frac{9}{2} k^2 F'^2 \sin^2 F + 5k^2 \frac{\sin^4 F}{r^2} - \frac{5}{4} k^2 \left(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right. \\ & \qquad -2k'^2 \sin^2 F - 2\frac{k^2}{r^2} \sin^2 F \cos^2 \frac{F}{2} (1+3\cos F) \\ & \qquad \left. -3kk'F' \sin 2F \right] \Bigg\} , \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned} \gamma_4^{(e)} = \frac{2}{15}\ e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ & k^2 \sin^2 F \\ & + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[\frac{9}{2} k^2 F'^2 \sin^2 F + 5k^2 \frac{\sin^4 F}{r^2} - 3kk'F' \sin 2F \right. \\ & \qquad \left. -2k'^2 \sin^2 F - 2\frac{k^2}{r^2} \sin^2 F \cos^2 \frac{F}{2} (1+3\cos F) \right] \Bigg\} , \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} \gamma_5^{(e)} = -\frac{2}{15}\ e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ & k^2(1-4\cos F) \\ & - \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[16k^2 \cos^2 \frac{F}{2} \frac{\sin^2 F}{r^2} - k^2 \left(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) (1-4\cos F) \right. \\ & \qquad \left. +24kk'F' \sin F \right] \Bigg\} , \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\gamma_6^{(e)} = -\frac{8}{15}\ e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ k^2 \cos^2 \frac{F}{2} + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[k^2 \cos^2 \frac{F}{2} \left(F'^2 + 4\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) + 3kk'F' \sin F \right] \Bigg\} . \quad (5.36)$$

Para las polarizabilidades magnéticas elementales[2] tenemos:

$$\gamma_1^{(m)} = -\frac{2}{5}\pi\ e^2 \int dr\ r^4 \sin^2 F \left[f_\pi^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \left(F'^2 + \frac{1}{6}\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] , \quad (5.37)$$

$$\gamma_2^{(m)} = -\frac{2}{15}\pi\ e^2 \int dr\ r^4 \sin^2 F \left[f_\pi^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \left(F'^2 + \frac{7}{2}\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] , \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}\gamma_3^{(m)} = -\frac{1}{30}\ e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ & k^2(2 + 3\cos^2 F) \\ & + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \Bigg[5k^2 F'^2 \left(1 - \frac{27}{10}\sin^2 F \right) + 6\sin^2 F(k'^2 - \omega^2 k^2) \\ & + 5k^2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left(1 - \frac{7}{10}\sin^2 F \right) + 9kk'F' \sin 2F \\ & + 3\frac{k^2}{r^2} \sin^2 F \cos^2 \frac{F}{2}(1 + \frac{1}{3}\cos F) \Bigg] \Bigg\} , \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned}\gamma_4^{(m)} = \frac{1}{30}\ e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ & k^2 \sin^2 F \\ & + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \Bigg[\frac{9}{2}k^2 \sin^2 F \left(F'^2 + \frac{29}{9}\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) - 2\sin^2 F(k'^2 - \omega^2 k^2) \\ & - 3kk'F' \sin 2F \\ & - \frac{k^2}{r^2} \sin^2 F \cos^2 \frac{F}{2}(1 + 27\cos F) \Bigg] \Bigg\} , \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}\gamma_5^{(m)} = \frac{1}{15}\ e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ & k^2(2 - 3\cos F) \\ & - \frac{1}{2\epsilon^2 f_K^2} \Bigg[k^2 F'^2 \left(\frac{3}{2}\cos F - 1 \right) + \frac{k^2}{r^2} \sin^2 F \left(\cos F - \frac{3}{2} \right) \\ & + 9kk'F' \sin F \Bigg] \Bigg\} , \end{aligned} \quad (5.41)$$

[2] Nótese que las expresiones de $\gamma_1^{(m)}$ y $\gamma_2^{(m)}$ junto con la ec.(5.12) no conducen a las ecs.(45-46) de la ref.[60], las cuales están equivocadas. Esto sólo afecta las polarizabilidades magnéticas de la Δ. De cualquier manera los valores numéricos correctos son muy similares a los de la referencia citada.

$$\gamma_6^{(m)} = -\frac{2}{15}\, e^2 \int dr\ r^4 \Bigg\{ k^2 \cos^2 \frac{F}{2} + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[k^2 \cos^2 \frac{F}{2} \left(F'^2 + 14 \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) + 3kk'F' \sin F \right] \Bigg\} \quad (5.42)$$

Las contribuciones solitónicas $\gamma_1^{(e,m)}$ y $\gamma_2^{(e,m)}$ sólo dependen del ángulo quiral, mientras que las restantes tienen en cuenta la contribución mixta del solitón y los kaones ligados.

6 Propiedades de la $\Lambda(1405)$

En esta sección estudiamos algunas propiedades electromagnéticas y fuertes de la Λ (1405). Obtenemos valores para la constante de acoplamiento fuerte $g_{\Lambda^* NK}$, para el momento magnético, el radio cuadrático medio y para sus anchos de decaimiento radiativo.

La resonancia $\Lambda(1405)$, de paridad negativa $J^P = \frac{1}{2}^-$, es entre los bariones más livianos uno de los estados menos entendidos. En un comienzo fue tratada como un estado ligado nucleón - kaón [61]. Luego se consideró como más natural una descripción en términos de tres quarks. Sin embargo, en la mayoría de los cálculos basados en el modelo de quarks es bastante difícil describir su masa relativamente pequeña [35]. Dentro de ese modelo uno espera masas similares para la $\Lambda(1405)$ y la $\Lambda(1520)$, esta última con $J^P = \frac{3}{2}^+$, debido a que difieren sólamente en el acoplamiento $\vec{L} \cdot \vec{S}$ y se sabe que esta interacción es pequeña. Para obtener resultados de acuerdo con el valor experimental de la masa de la $\Lambda(1405)$ es necesario hacer suposiciones adicionales, como por ejemplo interacciones de tres quarks o interacciones mesón-quark [62]. Nos encontramos con problemas similares en el bag model [63]. Finalmente, un análisis realizado con el *cloudy bag model* [64] parece indicar que la $\Lambda(1405)$ consiste escencialmente en un estado ligado mesón - barión.

Desafortunadamente, la información empírica disponible hasta el momento para la $\Lambda(1405)$ es escasa. Esta situación cambiará con la puesta en funcionamiento de CEBAF, donde ya se ha aprobado un experimento [65] que estudiará los decaimientos electromagnéticos de esta resonancia. Recientemente también se realizaron nuevas propuestas [66] para utilizar otras facilidades experimentales en el estudio de propiedades de los hiperones.

Este renovado interés en el entendimiento de la estructura de la $\Lambda(1405)$ (en lo que sigue usaremos la notación Λ^*) hace que un estudio detallado de sus propiedades en un modelo solitónico sea algo particularmente deseable. Como ya mencionamos varias veces en las secciónes anteriores, en el modelo solitónico de estados ligados los estados de paridad negativa como la Λ^* corresponden a estados donde el kaón está ligado al solitón en una onda parcial $l = 0$. Recordemos que debido a la forma particular de la interacción efectiva los estados ligados con $l = 1$ tienen menos energía que los estados ligados con $l = 0$. La presente discusión completa trabajos anteriores realizados en el mismo modelo pero sólo para los estados fundamentales, donde se estudiaron las constantes de acoplamiento fuertes [67] y distintas propiedades electromagnéticas [38, 39, 55]. Esto permite una comparación más detallada con otros modelos así como también con los datos experimentales.

Para el caso particular de los hiperones Λ y Λ^*, la fórmula de masas (2.57) se reduce a

$$M = M_{sol} + \omega_l + \frac{3}{8\Theta} c_l^2 \, . \tag{6.1}$$

En la sección 2.4 (ver también la ref. [30]) ya se discutió que el modelo describe bien los hiperones de paridad positiva. Por ejemplo, la masa calculada para el estado fundamental $\Lambda(1116)$ es 1086 MeV usando el SET I de parámetros y 1105 MeV usando el SET II. Por otro lado la masa predicha para la $\Lambda(1405)$ es 1297 MeV usando el SET I y 1325 MeV usando el SET II. Estos resultados están aproximadamente 100 MeV por debajo de la masa empírica, algo que contrasta con las predicciones típicas de los modelos basados en quarks, donde la Λ^* resulta tener una masa demasiado grande. Queremos destacar que el modelo solitónico reproduce bien la diferencia de masas $\Lambda(1520) - \Lambda(1405)$. Siguiendo el procedimiento discutido en la ref.[29] para identificar la resonancia $\Lambda(1520)$ obtenemos para esta diferencia los valores de 92 MeV para el SET I y 129 MeV para el SET II, que coinciden bien con el valor experimental de 115 MeV.

6.1 Los acoplamientos fuertes de la $\Lambda(1405)$

La $\Lambda(1405)$ se acopla fuertemente a los canales KN y $\pi\Sigma$. Debido a que su masa está por debajo del umbral de producción de KN su ancho hadrónico total se debe principalmente al acoplamiento $\Lambda^*\pi\Sigma$. Por otro lado, el acoplamiento Λ^*KN juega un papel importante en el análisis de procesos como por ejemplo $K^-p \to \Lambda\gamma$ y $K^-p \to \Sigma^0\gamma$. En el estudio de estos procesos la constante $Kp\Lambda^*$ se considera usualmente como un parámetro ajustable [68]. Recientemente también se discutió el valor de esta constante de acoplamiento en relación a la posible condensación de kaones en la materia nuclear densa [69, 70].

En el modelo solitónico que nos ocupa se puede evaluar explícitamente la constante $Kp\Lambda^*$ a partir de la interacción efectiva descripta por el lagrangiano. Debemos examinar los elementos de matriz entre Λ^* (que es un sistema ligado solitón-kaón, en rotación) y el estado final compuesto por un nucleón (solitón rotante) y un kaón libre. Las rotaciones colectivas sólo afectan al solitón de $SU(2)$ y al kaón ligado. Siguiendo las líneas generales dadas en la ref. [67], relacionamos los operadores en la representación colectiva con los operadores en la representación usual de spin e isospín

$$\begin{aligned}
\langle\Lambda^*|A^\dagger|NK\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{8\pi}}\langle\Lambda^*|-\mathbf{1}|NK\rangle\,, \\
\langle\Lambda^*|\vec{\tau}A^\dagger|NK\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{8\pi}}\langle\Lambda^*|-\vec{\sigma}|NK\rangle\,.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Con estas identidades obtenemos la constante de acoplamiento buscada calculada en el umbral de producción de kaones

$$\frac{g_{\Lambda^* KN}}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int dr\; r^2\; k_0\left[f\; m_K\,\omega_0 + \lambda(m_K+\omega_0) - m_K^2 - V_{ef}^0\right]. \tag{6.3}$$

Las funciones f , λ y V_{ef}^0 están definidas en el apéndice A de la sección 2. El potencial V_{ef}^0 se obtiene reemplazando los valores $\Lambda = \frac{1}{2}$, $l = 0$ en la expresión general de $V_{ef}^{\Lambda,l}(r)$.

Es necesario aclarar que en nuestro modelo existe una cierta ambigüedad en la definición de la constante de acoplamiento $Kp\Lambda^*$. En general, para una resonancia de paridad negativa los acoplamientos seudoescalares y seudovectoriales tienen la forma

$$\mathcal{L}_{\rm PS} = g_{\Lambda^* NK}\;\bar{u}_{\Lambda^*}\;u_N\;K\,, \tag{6.4}$$

$$\mathcal{L}_{\rm PV} = -i\frac{g_{\Lambda^* NK}}{M_{\Lambda^*}-M_N}\;\bar{u}_{\Lambda^*}\gamma_\mu\;u_N\;\partial^\mu K\,. \tag{6.5}$$

Integrando por partes la ec.(6.5) y usando la ecuación de Dirac libre para Λ^* y N lo que uno obtiene es la ec.(6.4). Ambos acoplamientos son equivalentes para bariones libres. Sin embargo, si pasamos al límite no relativista de estas interacciones obtenemos expresiones diferentes. Partiendo del acoplamiento seudoescalar obtenemos

$$\mathcal{L}_{\rm PS} = g_{\Lambda^* NK}\;\chi^\dagger_{\Lambda^*}\;\chi_N\;K\,, \tag{6.6}$$

donde χ es el spinor del barión. Por otro lado, partiendo de la interacción seudovectorial llegamos a

$$\mathcal{L}_{\rm PV} = g_{\Lambda^* NK}\;\frac{m_K}{M_{\Lambda^*}-M_N}\;\chi^\dagger_{\Lambda^*}\;\chi_N\;K\,. \tag{6.7}$$

Es sabido que diferencias similares también ocurren para los acoplamientos fuertes del estado fundamental Λ [71]. En conclusión, si sólo se conoce la forma no relativista de la interacción como es el caso en nuestro modelo , la definición de $g_{\Lambda^* NK}$ no es unívoca. Al escribir la expresión (6.3) asumimos un acoplamiento seudoescalar, cuya correspondiente reducción no relativista es (6.6). Si hubieramos asumido una interacción seudovectorial, tendríamos un factor adicional $\frac{M_{\Lambda^*}-M_N}{m_K} \simeq 0.94$ multiplicando el miembro de la derecha de la ec.(6.3). Este factor es aproximadamente uno y no afecta significativamente los resultados numéricos.

La evaluación numérica de la ec.(6.3) nos da como resultado $g_{\Lambda^* NK} = 1.6$ para el SET I y $g_{\Lambda^* NK} = 2.2$ para el SET II. Estos valores están dentro del rango típico de los resultados numéricos citados en la literatura [72]. Además, en un análisis reciente de las longitudes de scattering empíricas kaón-nucleón [69], se obtuvo el valor $g_{\Lambda^* NK} \simeq 1.9$. Por otro lado, los cálculos hechos en el *chiral bag model* [73, 74] dan un valor más pequeño, $g_{\Lambda^* NK} = 0.46$.

Como mencionamos anteriormente, la $\Lambda(1405)$ tiene otra constante de acoplamiento fuerte que corresponde al vértice $\Lambda^*\Sigma\pi$. En el modelo solitónico de estados ligados este vértice consiste en tres fluctuaciones mesónicas, por lo que está suprimido por un factor $(1/N_c)^{1/2}$ con respecto del vértice $\Lambda^* NK$ que es de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$. En nuestra discusión consideramos sólamente las contribuciones $\mathcal{O}(N_c^0)$ debido a que un tratamiento consistente de términos que incluyen más de dos fluctuaciones es técnicamente muy complicado. Dentro de nuestras aproximaciones la constante de acoplamiento $g_{\Lambda^*\pi\Sigma}$ se anula. Este problema es una consecuencia de la suposición implícita hecha al sólo retener términos de orden cuadrático en las fluctuaciones, de que la ruptura de la simetría en la dirección de la extrañeza es grande. En el caso contrario en que se supone que la ruptura de simetría es pequeña, el modelo colectivo $SU(3)$ permite calcular los decaimientos de hiperones en los canales pión-hiperón [75].

6.2 Las propiedades electromagnéticas

Las propiedades electromagnéticas se obtienen a partir de la corriente electromagnética (3.10), que se divide naturalmente en una contribución isovectorial y una isoescalar. La primera es la responsable del decaimiento $\Lambda^* \to \Sigma^0\gamma$, $(|\Delta I| = 1)$, mientras que la última interviene en el decaimiento $\Lambda^* \to \Lambda\gamma$, $(\Delta I = 0)$. La componente isoescalar es también la única que contribuye al momento magnético de la Λ^* y a su radio cuadrático medio.

Para calcular el momento magnético de la Λ^* utilizamos la expresión standard, ec.(3.16). Las expresiones (3.17)-(**??**) nos muestran explícitamente el contenido operatorial de la ec.(3.16). Recordemos que el momento angular colectivo es igual al isospín, $J_c^2 = I^2$. Por lo tanto en el caso que nos ocupa, como la Λ^* es una resonancia isoescalar, el momento angular colectivo $\vec{J}_c$ se anula y no hay contribución solitónica pura al momento magnético. Sólo tenemos la contribución del término cuadrático en kaones que nos da la siguiente expresión

$$\mu_{\Lambda^*} = \frac{1}{2}\Big(c_0\,\mu_{s,sol} - a(k_0)\Big)\,, \tag{6.8}$$

donde el momento magnético isoescalar del solitón $\mu_{s,sol}$ y $a(k_0)$ están dados por

$$\begin{aligned} \mu_{s,sol} &= -\frac{2M_N}{3\pi\Theta}\int \mathrm{d}r\, r^2 \sin^2 F F'\,, & (6.9)\\ a(k_0) &= \frac{4}{3}M_N\int \mathrm{d}r\, r^2\Bigg\{k_0^2\sin^2\frac{F}{2} & (6.10)\\ &\quad +\frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2}\left[k_0^2\sin^2\frac{F}{2}(F'^2+\frac{4\sin^2 F}{r^2}) - 3k_0k_0'\sin F F'\right]\Bigg\}\,. \end{aligned}$$

M_N es la masa empírica del nucleón y aparece porque el momento magnético está expresado en magnetones nucleares. Comparando estas expresiones con las correspondientes al estado fundamental Λ se puede ver que el hecho de que el kaón esté ligado en una onda $l = 0$ modifica no sólo la expresión de la constante de estructura hiperfina, sino que también la forma explícita de $a(k_l)$. Si bien ambos kaones tienen el mismo *grand spin*, la estructura de isospín y espacial depende del momento angular l.

En la tabla XIII se pueden encontrar los momentos magnéticos de la Λ y la Λ^* calculados en nuestro modelo. Los resultados están presentados como cocientes con respecto al momento magnético calculado del protón. Como ya discutimos en la sección **??**, esto está motivado en el hecho de que los modelos solitónicos predicen un valor demasiado pequeño para el momento magnético del protón, pero describen bien los cocientes de los momentos magnéticos [38, 13]. Las predicciones para el momento magnético de la Λ [38, 39] ya fueron presentadas en la tabla VI de la sección **??**. Aquí las volvemos a citar con el objeto de comparar con nuestros resultados. Vemos que en el caso de la Λ^* los resultados dependen menos del conjunto de parámetros. En contraste con la Λ, para la Λ^* obtenemos un momento magnético pequeño y positivo. Esto se debe principalmente a dos razones. Por un lado la constante de estructura hiperfina es mayor en el estado ligado con $l = 0$. Por otro lado, el valor de $a(k_0)$ es menor que el de $a(k_1)$. Si bien la contribución cuadrática (la primer línea de la ec.(6.10)) tiene aproximadamente el mismo valor en ambos estados, la contribución cuártica es más pequeña en el caso $l = 0$. En el integrando de las contribuciones cuárticas las funciones que dependen del ángulo quiral están concentradas a cortas distancias, mientras que la función de onda para $l = 0$ está concentrada a una distancia mayor que la correspondiente a $l = 1$, lo que nos da el comportamiento mencionado.

El radio cuadrático medio magnético de la Λ^* se obtiene integrando la densidad de magnetización ecs.(6.9),(6.10), pesada con un factor adicional r^2 y normalizada con el coeficiente correcto [38, 55]. Obtenemos

$$\langle r_M^2 \rangle_{\Lambda^*} = \frac{1}{2\,\mu_{\Lambda^*}} \Big(c_0 \langle r^2 \rangle_{s,sol} - \langle r^2 \rangle_a \Big) \,, \tag{6.11}$$

donde

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{s,sol} &= -\frac{2M_N}{5\pi\Theta} \int dr\, r^4 \sin^2 F F' \,, && (6.12) \\ \langle r^2 \rangle_a &= \frac{4}{5} M_N \int dr\, r^4 \Big\{ k_0^2 \sin^2 \frac{F}{2} \\ &\quad + \frac{1}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[k_0^2 \sin^2 \frac{F}{2} (F'^2 + \frac{4 \sin^2 F}{r^2}) - 3 k_0 k_0' \sin F F' \right] \Big\} . && (6.13) \end{aligned}$$

El factor $\frac{1}{5}$ en lugar del factor $\frac{1}{3}$ en las ecs.(6.12)-(6.13) se obtiene fácilmente a partir de la normalización del factor de forma magnético en el límite de transferencia de impulso cero.

Para los hiperones isoescalares con $S = -1$ el radio cuadrático medio eléctrico es simplemente [38, 55]

$$\langle r_E^2 \rangle = \frac{1}{2} \Big[\langle r^2 \rangle_{\mathrm{B}} - \langle r^2 \rangle_{\mathcal{S}} \Big] \,, \tag{6.14}$$

con las definiciones

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{\mathrm{B}} &= -\frac{2}{\pi} \int dr\, r^2 \sin^2 F\, F' \,, && (6.15) \\ \langle r^2 \rangle_{\mathcal{S}} &= 2 \int dr\, k_l^2\, r^4 \left[f\, \omega_l + \lambda \right] . && (6.16) \end{aligned}$$

Los valores numéricos de los radios magnéticos y eléctricos calculados están en la tabla XIII. Los radios magnéticos predichos para la Λ^* son mucho más grandes que los correspondientes a la Λ. Esto se entiende de la siguiente manera. En el caso del estado fundamental Λ hay una cancelación parcial entre la contribución $c_1 \langle r^2 \rangle_{s,sol}$ y el término $\langle r^2 \rangle_a$, dando como resultado un radio magnético pequeño. Sin embargo, en el estado con $l = 0$ el factor r^2 en el integrando, ec.(6.13), suprime fuertemente a $\langle r^2 \rangle_a$. Debido a esto no tenemos una cancelación parcial en el numerador de la ec.(6.11). Este hecho junto con el valor pequeño del momento magnético en el denominador dan finalmente un valor grande para el radio magnético de la Λ^*.

Los resultados para los radios eléctricos son igualmente fáciles de entender. La única diferencia entre los casos de la Λ y la Λ^* aparece en el radio de extrañeza $\langle r^2 \rangle_{\mathcal{S}}$.

Tabla XIII

	Λ^*		Λ	
	Set I	Set II	Set I	Set II
$\mu_{s,sol}$	0.73	0.56	0.73	0.56
$a(k_l)$	0.27	0.26	1.35	1.06
μ/μ_p	0.08	0.09	-0.27	-0.21
$\langle r^2\rangle_{s,sol}$	0.40	0.28	0.40	0.28
$\langle r^2\rangle_a$	-0.02	0.01	0.37	0.22
$\langle r^2_M\rangle$	1.14	1.21	0.20	0.11
$\langle r^2\rangle_B$	0.47	0.35	0.47	0.35
$\langle r^2\rangle_{\mathcal{S}}$	0.64	0.60	0.27	0.18
$\langle r^2_E\rangle$	-0.09	-0.12	0.10	0.09

Table 13: Momentos magnéticos y radios eléctricos y magnéticos (en fm^2). Presentamos además la contribución de cada término por separado

La Λ^* es un estado excitado del sistema solitón-kaón, con lo que es natural esperar un radio de extrañeza mayor. Como esta contribución se sustrae del radio bariónico para obtener el radio eléctrico, es claro que este último tiene un valor menor (e incluso negativo) para la Λ^*.

Los decaimientos radiativos de la $\Lambda(1405)$ son

$$\Lambda(1405) \rightarrow \Lambda\gamma, \tag{6.17}$$

$$\Lambda(1405) \rightarrow \Sigma^0\gamma \tag{6.18}$$

y están relacionados con la parte isoescalar e isovectorial de la corriente electromagnética, respectivamente. En ambos casos se trata de transiciones dipolares eléctricas (E1). Los anchos de decaimiento correspondientes a estos procesos se obtienen a partir de la fórmula general (4.15) y se pueden escribir como

$$\Gamma_{E1} = e^2 q |\langle \Lambda^*, m' = \tfrac{1}{2}|\ \vec{t}_3\ |H, m = \tfrac{1}{2}\rangle|^2 \tag{6.19}$$

donde $|H\rangle = |\Lambda\rangle, |\Sigma\rangle$ es el hiperón en el estado final, q el momento del fotón emitido, e la carga del electrón y el operador correspondiente a la transición es la tercer componente de

$$\vec{t} = \int d^3r \left[(2j_0(qr) - j_2(qr))\,\vec{J}_{em} + 3j_2(qr)\vec{J}_{em}\cdot\hat{r}\ \hat{r} \right] \tag{6.20}$$

con j_0 y j_2 las funciones de Bessel esféricas de orden cero y de orden dos, respectivamente. Como es usual, sumamos sobre estados finales y promediamos sobre los posibles estados iniciales de spin. Un cálculo explícito nos muestra que los elementos de matriz relevantes de la corriente electromagnética $\vec{J}(\vec{r})$ se pueden escribir como

$$\vec{J}^{\Lambda^* H}(\vec{r}) = < \Lambda^* | \vec{J} | H > = \frac{i}{4\pi} \left[g_1^{\Lambda^* H}(r)\, \vec{J}_K + g_2^{\Lambda^* H}(r)\, \vec{J}_K \cdot \hat{r}\ \hat{r} \right] . \tag{6.21}$$

Las formas explícitas para las funciones radiales $g_1^{\Lambda^* H}$ y $g_2^{\Lambda^* H}$ son las siguientes

$$\begin{aligned} g_1^{\Lambda^*\Lambda} &= \cos F \left[1 + \frac{1}{\epsilon^2 f_K^2}(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}) \right] \frac{k_0 k_1}{r} \\ &+ \frac{3}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[F' \frac{\sin F}{r}(k_0' k_1 + k_0 k_1') - F'^2 \cos F \frac{k_0 k_1}{r} \right] , \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} g_2^{\Lambda^*\Lambda} &= -\cos F \left[1 + \frac{1}{\epsilon^2 f_K^2}(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}) \right] \frac{k_0 k_1}{r} \\ &-(1 + \frac{1}{2\epsilon^2 f_K^2} \frac{\sin^2 F}{r^2})(k_0' k_1 - k_0 k_1') \\ &- \frac{3}{4\epsilon^2 f_K^2} \left[F' \frac{\sin F}{r}(k_0' k_1 + k_0 k_1') - (F'^2 \cos F + 2F' \frac{\sin F}{r}) \frac{k_0 k_1}{r} \right] \end{aligned} \tag{6.23}$$

y para el decaimiento isovectorial

$$\begin{aligned} g_1^{\Lambda^*\Sigma^0} &= \frac{2\cos F - 1}{3} g_1^{\Lambda^*\Lambda} + \frac{1}{3\epsilon^2 f_K^2} \frac{\sin^2 F}{r} \left\{ k_0' k_1' - [\omega_0 \omega_1 + \frac{7}{4} F'^2 + 2 \frac{\sin^2 F}{r^2}] k_0 k_1 \right\} \\ &- \frac{N_c}{18 f_K^2 \pi^2} \left[\frac{\sin 2F}{2r}(\omega_1 k_0' k_1 + \omega_0 k_0 k_1') \right. \\ &\qquad \left. + F' \frac{k_0 k_1}{r}(\omega_0 \cos^2 \frac{F}{2} + \omega_1 \sin^2 \frac{F}{2} + \omega_0 \sin^2 F) \right] , \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned} g_2^{\Lambda^*\Sigma^0} &= \frac{2\cos F - 1}{3} g_2^{\Lambda^*\Lambda} - \frac{1}{3\epsilon^2 f_K^2} \frac{\sin^2 F}{r} \left\{ k_0' k_1' - [\omega_0 \omega_1 + \frac{7}{4} F'^2 + 2 \frac{\sin^2 F}{r^2}] k_0 k_1 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{2}{r}[k_0' k_1 \cos^2 \frac{F}{2} + k_0 k_1' \sin^2 \frac{F}{2}] \right\} \\ &- \frac{N_c}{18 f_K^2 \pi^2} \left\{ (\frac{\sin 2F}{r} - F')(\omega_0 \cos^2 \frac{F}{2} + \omega_1 \sin^2 \frac{F}{2}) \frac{k_0 k_1}{r} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\sin 2F}{2r}(\omega_1 k_0' k_1 + \omega_0 k_0 k_1') - \sin^2 F (F' \omega_0 - \frac{\sin F}{r}(\omega_0 - \omega_1)) \frac{k_0 k_1}{r} \right\} . \end{aligned} \tag{6.25}$$

Reemplazando en (6.19) y (6.20) obtenemos

$$\Gamma_{E1}(\Lambda^* \to \Lambda\gamma) \;=\; e^2 q |f_1^{\Lambda^*\Lambda}(q)|^2 \,, \tag{6.26}$$

$$\Gamma_{E1}(\Lambda^* \to \Sigma^0\gamma) \;=\; e^2 q |f_1^{\Lambda^*\Sigma^0}(q)|^2 \tag{6.27}$$

donde $f_1^{\Lambda^* H}(q)$ se puede expresar en términos de $g_{1,2}^{\Lambda^* H}$

$$f_1^{\Lambda^* H}(q) \;=\; \int \mathrm{d}r\; r^2 \left[g_1^{\Lambda^* H}(r)\; j_0(qr) + \frac{g_2^{\Lambda^* H}(r)}{3}\; (j_0(qr) + j_2(qr)) \right] . \tag{6.28}$$

Esta función aparece en la transformada de Fourier de la corriente electromagnética [3]

$$\vec{J}^{\Lambda^* H}(\vec{q}) \;=\; i \left[f_1^{\Lambda^* H}(q)\; \vec{J}_K + f_2^{\Lambda^* H}(q)\; \vec{J}_K \cdot \hat{q}\; \hat{q} \right] , \tag{6.29}$$

donde

$$f_2^{\Lambda^* H}(q) \;=\; - \int \mathrm{d}r\; r^2\; g_2^{\Lambda^* H}(r)\; j_2(qr) \,. \tag{6.30}$$

Para el momento q del fotón emitido tomamos la diferencia de energía entre el hiperón del estado inicial y el hiperón del estado final. Como en nuestro modelo la masa calculada de la Λ^* es un poco pequeña, esta diferencia de masas se subestima y nos da un momento q_{calc} pequeño. Por esta razón también presentamos en la tabla XIV los resultados para q_{emp} , que es el momento que se obtiene como diferencia de las masas empíricas de los estados iniciales y finales. Debido a que $f_1^{\Lambda^* H}$ es básicamente constante en el rango de valores relevante para q, las amplitudes de decaimiento son aproximadamente proporcionales al momento q. En la Tabla XIV también incluimos resultados obtenidos en el modelo de quarks (QM) [41], en la bolsa del MIT (BM) [42] y en el *cloudy bag model* (CBM) [73]. Finalmente también presentamos algunos valores empíricos obtenidos a partir del análisis de decaimientos de átomos kaónicos (KA) [76]. Vemos que nuestros valores son menores que los del modelo de quarks y son compatibles con las predicciones de los del bag model. La mayor diferencia con los resultados del CBM aparece en el ancho de decaimiento $\Gamma(\Lambda^* \to \Sigma^0\gamma)$. El CBM predice un ancho de decaimiento muy pequeño para este proceso. En general nuestros valores son más grandes que los que se obtienen del análisis empírico de la ref.[76]. Sin embargo hay que notar que en ese análisis interviene la constante de acoplamiento fuerte $g_{\Lambda^* NK}$ como un parámetro. En la ref.[76] se tomó el valor $g_{\Lambda^* NK} = 3.2$. Con un valor más pequeño de esta constante, así como la obtenemos en nuestro modelo se tendrían anchos de decaimiento más de acuerdo con nuestras predicciones.

Tabla XIV

	Set I		Set II		QM	BM	CBM	KA
	q_{emp}	q_{calc}	q_{emp}	q_{calc}				
$\Gamma(\Lambda^* \to \Lambda\gamma)$	67	44	56	40	143	60	75	27 ± 8
$\Gamma(\Lambda^* \to \Sigma^0\gamma)$	29	13	29	17	91	18	2.4	10 ± 4 ó 23 ± 7

Table 14: Anchos de los decaimientos radiativos de la Λ^* (en keV) para los valores empíricos y calculados del momento del fotón. También presentamos las predicciones de modelo de quarks (QM) [41], del MIT bag model (BM) [42], del cloudy bag model (CBM) [73] y del análisis de los decaimientos de átomos kaónicos (KA) [76].

6.3 Conclusiones

Nuestro cálculo en el modelo solitónico predice una masa para la Λ^* que es un poco menor que la empírica, pero reproduce bien la diferencia $\Lambda(1520) - \Lambda(1405)$. Encontramos que las predicciones para el valor de la constante de acoplamiento fuerte $g_{\Lambda(1405)NK}$ están dentro del rango de los valores empíricos no muy bien conocidos. Esto contrasta con la situación que tenemos para los modelos de la $\Lambda(1405)$ basados en una descripción en términos de tres quarks, que predicen valores menores[74]. Por otro lado, es interesante observar que para los hiperones de menor energía (el octete $J^P = \frac{1}{2}^+$) el modelo solitónico y el modelo de tres quarks predicen valores similares para la constante de acoplamiento $g_{\Lambda NK}$ [67, 74]. En cuanto al vértice $\Lambda(1405)\pi\Sigma$, en el modelo solitónico corresponde a considerar la interacción de tres fluctuaciones. En nuestro cálculo sólo consideramos los términos cuadráticos en las fluctuaciones, que son de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$, con la consecuencia obvia de que entonces $g_{\Lambda\pi\Sigma}$ se anula.

También hicimos predicciones para los momentos magnéticos y los radios electromagnéticos de la $\Lambda(1405)$. Desafortunadamente, estas magnitudes son bastante difíciles de determinar empíricamente. En cualquier caso, los cocientes μ_{Λ^*}/μ_p están cualitativamente de acuerdo con otros cálculos mencionados en la bibliografía [77]. Posiblemente más interesantes sean las predicciones para los decaimientos electromagnéticos. Calculamos los anchos de decaimiento correspondientes al proceso isoescalar $\Lambda^* \to \Lambda\gamma$ y al isovectorial $\Lambda^* \to \Sigma^0\gamma$. Nuestros resultados son mucho más pequeños que los del modelo de quarks [41] y coinciden razonablemente bien con los resultados del bag model de la ref.[42]. Por otro lado son un poco mayores que los valores obtenidos a partir de los datos empíricos de decaimiento de átomos kaónicos[76]. Esto se puede deber al valor de $g_{\Lambda(1405)NK}$ usado en ese análisis. En cualquier caso, está claro que se necesita más información empírica sobre las propiedades de la $\Lambda(1405)$. Por esta razón esperamos que pronto estén disponibles los resultados de los experimentos planeados para el estudio de las propiedades de hiperones en CEBAF y otras facilidades.

References

[1] C. L. Schat, C. Gobbi and N. N. Scoccola, Phys. Lett. **B356** (1995) 1.

[2] C. Gobbi, C. L. Schat and N. N. Scoccola, Nucl. Phys. **A**, in press, Los Alamos archive *hep-ph/9509211*.

[3] C. L. Schat, N. N. Scoccola and C. Gobbi, Nucl. Phys. **A585** (1995) 627.

[4] R. A. Schumacher, Nucl. Phys. **A585** (1995) 63c.

[5] J. S. Russ, Nucl. Phys. **A585** (1995) 39c.

[6] M. A. Moinester, Proc. of Workshop on Chiral Dynamics, MIT, July 1994, eds. A. Bernstein and B. Holstein, Los Alamos archive *hep-ph/9409463*.

[7] J. Russ, spokesman, FNAL E781 Collaboration;
J. Russ, Proc. of the CHARM2000 Workshop, Fermilab, June 1994, eds. D. M. Kaplan and S. Kwan, Fermilab-Conf-94/190, p.111 (1994).

[8] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore, 1987.

[9] R. K. Bhaduri, *Models of the Nucleon*, Addison-Wesley, 1988.

[10] G. t' Hooft, Nucl. Phys. **B72** (1974) 461; *ibid* **B75** (1974) 461.

[11] E. Witten, Nucl. Phys. **B160** (1979) 57.

[12] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. **260** (1961) 127.

[13] G. S. Adkins, C. R. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. **B228** (1983) 552.

[14] I. Zahed and G. E. Brown, Phys. Rep. **142** (1986) 1.

[15] G. Holzwarth and B. Schwesinger, Rep. Prog. Phys. **49** (1986) 825.

[16] H. Weigel, *Baryons as Three Flavour Solitons*, Tübingen University preprint, Los Alamos archive hep-ph/9509398.

[17] E. N. Nyman and D. O. Riska, Rep. Prog. Phys. **53** (1990) 1137.

[18] H. Yabu and K. Ando, Nucl. Phys. **B301** (1988) 601.

[19] C. G. Callan and I. Klebanov, Nucl. Phys. **B262** (1985) 365.

[20] C. G. Callan, K. Hornbostel and I. Klebanov, Phys. Lett. **B202** (1988) 269.

[21] N. N. Scoccola, H. Nadeau, M. A. Nowak and M. Rho, Phys. Lett. **B201** (1988) 425.

[22] U. Blom, K. Dannbom and D. O. Riska, Nucl. Phys. **A493** (1989) 384.

[23] M. Rho, Phys. Rep. **240** (1994) 1.

[24] G. S. Adkins, in K.-F. Liu (ed.), *Chiral Solitons*, World Scientific, Singapore, 1987.

[25] S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev **177** (1969) 2239 ;
C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev **177** (1969) 2247.

[26] Y. Igarashi, M. Johmura, A. Kobahashi, H. Otsu, T. Sato, and S. Sawada, Nucl. Phys. **B259** (1985) 721.

[27] E. Witten, Nucl. Phys. **B223** (1983) 422, 433.

[28] D. O. Riska and N. N. Scoccola, Phys. Lett. **B265** (1991) 188.

[29] N.N. Scoccola, Phys. Lett. **B236** (1990) 245.

[30] M. Rho, D. O. Riska and N. N. Scoccola, Z. Phys. **A341** (1992) 343.

[31] G. Pari and N. N. Scoccola, Phys. Lett. **B296** (1992) 391.

[32] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 747.

[33] B. Mousallam, Ann. Phys. **225** (1993) 264.

[34] F. Meier and H. Walliser, *Quantum Corrections to Baryon Properties in Chiral Soliton Models*, Los Alamos archive hep-ph/9602359.

[35] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. **D18** (1978) 4187.

[36] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1974.

[37] Ö. Kaymakcalan, S. Rajeev and J. Schechter, Phys. Rev. **D30** (1984) 594.

[38] J. Kunz and P. J. Mulders, Phys. Rev. **D41** (1990) 1578.

[39] Y. Oh, D.-P. Min, M. Rho and N. N. Scoccola, Nucl. Phys. **A534** (1991) 493.

[40] D. B. Lichtenberg, Phys. Rev. **D15** (1977) 345.

[41] J. W. Darewych, M. Horbatsch and R. Koniuk, Phys. Rev. **D28** (1983) 1125.

[42] E. Kaxiras, E. J. Moniz and M. Soyeur, Phys. Rev. **D32** (1985) 695.

[43] M. N. Butler, M. J. Savage and R. P. Springer, Nucl. Phys. **B399** (1993) 69; Phys. Lett. **B304** (1993) 353; Phys. Lett. **B314** (1993) 122 (E).

[44] D. B. Leinweber, T. Draper and R. M. Woloshyn, Phys. Rev. **D48** (1993) 2230.

[45] A. Wirzba and W. Weise, Phys. Lett. **B188** (1987) 6;
T. Watabe, C. V. Christov and K. Goeke, Phys. Lett. **B349** (1995) 197.

[46] R. Davidson, N. C. Mukhopadhyay and R. Wittman, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 804;
F. Beck, contribution to the 7^{th} *Conference on Perspectives in Nuclear Physics at Intermediate Energies*, Trieste, May 8-12, 1995.

[47] J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Nuclear Theory*, Vol.2 , North-Holland, Amsterdam, 1976, p.89.

[48] H. J. Lipkin, Phys. Rev. **D7** (1973) 846.

[49] H. J. Lipkin and M.A. Moinester, Phys. Lett. **B287** (1992) 179.

[50] V. A. Petrun'kin, Sov. J. Nucl.Phys. **12** (1981) 278.

[51] B. E. MacGibbon *et al*, Los Alamos archive *nucl-ex/9507001*.

[52] A. I. L'vov, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993) 5267.

[53] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor and U-G. Meissner, Phys. Rev. **D46** (1992) R2756; Phys. Lett. **B319** (1993) 269.

[54] B. Schwesinger, Phys. Lett. **B298** (1993) 17.

[55] C. Gobbi, S. Boffi and D. O. Riska, Nucl. Phys. **A547** (1992) 633.

[56] S. Saito and M. Uehara, Phys. Lett. **B325** (1994) 20.

[57] N. N. Scoccola and T. D. Cohen, Nucl. Phys. **A**, in press (Los Alamos archive *hep-ph/9507328*).

[58] M. Chemtob, Nucl. Phys. **A473** (1987) 613.

[59] N. N. Scoccola and W. Weise, Phys. Lett. **B232** (1989) 287; Nucl. Phys. **A517** (1990) 495.

[60] S. Scherer and P. J. Mulders, Nucl. Phys. **A549** (1992) 521.

[61] R. H. Dalitz and S. F. Tuan, Phys. Rev. Lett. **5** (1959) 425;
J. J. Sakurai, Ann.Phys.(N.Y.)**11** (1960) 1;
R. C. Arnold and J. J. Sakurai, Phys. Rev. **128** (1962) 2808.

[62] M. Arima, S. Matsui and K. Shimizu, Phys. Rev. **C49** (1994) 2831.

[63] Y. Umino and F. Myhrer, Phys. Rev. **D39** (1989) 3391.

[64] E. A. Veit, B. K. Jennings, R. C. Barret and A. W. Thomas, Phys.Lett.**B137** (1984) 415;
E. A. Veit, B. K. Jennings, A. W. Thomas and R. C. Barret, Phys. Rev. **D31** (1985) 1033.

[65] D. L. Adams *et al.* (CLAS Collaboration), *"Radiative decays of low-lying hyperons"*, CEBAF Letter of intent (unpublished).

[66] P. G. Harris, *"A possible experiment to study the radiative decay of excited hyperons"*, in Proc. of "Future Directions in Particle and Nuclear Physics at Multi-GeV Hadron Beam Facilities", ed. by D.F. Geesaman (1993), p. 349.

[67] C. Gobbi, D. O. Riska and N. N. Scoccola, Nucl. Phys. **A544** (1992) 671.

[68] R. L. Workman and H. W. Fearing, Phys. Rev. **D37** (1988) 3117.

[69] C-H. Lee, H. Jung, D-P. Min and M. Rho, Phys. Lett. **B326** (1994) 14.

[70] M. J. Savage, Phys. Lett. **331** (1994) 411.

[71] J. Cohen, Phys. Rev. **C37** (1988) 187.

[72] O. Dumbrajs *et al.*, Nucl. Phys. **B216** (1983) 277.

[73] Y. Umino and F. Myhrer, Nucl. Phys. **A529** (1991) 713.

[74] Y. Umino and F. Myhrer, Nucl. Phys. **A554** (1993) 593.

[75] B. Schwesinger and H. Walliser, Phys. Lett. **B242** (1990) 139;
B. Schwesinger, Nucl. Phys. **A537** (1992) 253.

[76] H. Burkhardt and J. Lowe, Phys. Rev. **C44** (1991) 607.

[77] R. Williams, C.-R. Ji and S. R. Cotanch, Phys. Rev. **D41** (1990) 1449.