

ESTUDIO DE MODELOS DE QUARKS  
NO LOCALES CON GRADOS DE LIBERTAD  
DE EXTRAÑEZA

Alberto F. Scarpettini

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Noviembre de 2003

## Resumen

Se estudian algunas propiedades hadrónicas y del vacío utilizando un modelo quiral de tres sabores de quarks con interacciones no locales y separables. Este modelo incluye un término que tiene en cuenta la anomalía axial y que da lugar a la mezcla de sabores. Consideramos el caso en que el propagador de los quarks tiene polos a energías reales, como también el caso en que aparecen sólo polos complejos, que puede interpretarse como una realización de confinamiento. Primeramente, nos concentramos en el cálculo de las masas de los mesones y sus constantes de decaimiento, utilizando reguladores no locales gaussianos y lorentzianos. Los resultados numéricos obtenidos están en buen acuerdo con los valores empíricos, especialmente en el esquivo caso del cociente  $f_K/f_\pi$ . Por otro lado, la mayor debilidad del modelo parece estar conectada al sector  $\eta - \eta'$ , donde resulta complicado obtener simultáneamente un buen fiteo para las masas y los ángulos de mezcla. En una segunda parte, se extiende el modelo a temperatura y densidad finitas utilizando un formalismo que se basa en la estructura analítica del propagador de los quarks. En los casos considerados, encontramos una transición de fase quiral de primer orden para valores bajos de la temperatura, transformándose en una transición suave de segundo orden al superar un cierto “punto final”. Este punto fue localizado en la posición  $(T_F, \mu_F) \simeq (60 \text{ MeV}, 200 \text{ MeV})$ . Se discute además la especial relevancia de los primeros polos del propagador.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. El modelo NJL y sus extensiones no locales</b>	<b>15</b>
2.1. El modelo NJL y su relación con QCD . . . . .	15
2.2. El modelo NJL con simetría $U(1)$ . . . . .	17
2.2.1. Fermiones sin masa y simetría quirál . . . . .	17
2.2.2. Generación dinámica de masa fermiónica . . . . .	18
2.2.3. Bosón de Goldstone pseudoescalar . . . . .	20
2.3. El modelo NJL en $SU(3)$ . . . . .	21
2.3.1. Simetrías de QCD para tres sabores . . . . .	21
2.3.2. La anomalía axial . . . . .	22
2.3.3. La interacción efectiva en el modelo NJL . . . . .	23
2.4. Interacciones no locales y separables . . . . .	24
<b>3. Modelo no local en <math>SU(3)</math> a temperatura y potencial químico nulos</b>	<b>28</b>
3.1. La acción efectiva . . . . .	28
3.2. Masas y constantes de acoplamiento quark-mesón . . . . .	33
3.3. Constantes de decaimiento débil . . . . .	35
<b>4. Extensión del modelo a temperatura y potencial químico finitos</b>	<b>37</b>
4.1. Formalismo de tiempo imaginario . . . . .	37
4.2. Ecuaciones del gap . . . . .	38
4.3. Potencial termodinámico . . . . .	41
4.4. Condensado de quarks . . . . .	44
4.5. Densidad de quarks . . . . .	45
4.6. Susceptibilidad magnética . . . . .	46
<b>5. Resultados numéricos</b>	<b>47</b>
5.1. Resultados para temperatura y potencial químico nulos . . . . .	47
5.2. Resultados para temperatura y potencial químico finitos. Diagrama de fases quirál . . . . .	54
<b>6. Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>A. Cálculo de las integrales de lazo para mesones</b>	<b>63</b>

<b>B. Cálculo de los polos del propagador del quark</b>	<b>70</b>
B.1. Interacción gaussiana . . . . .	70
B.2. Interacción lorentziana . . . . .	72
<b>C. Relación entre los polos del propagador y de <math>\tilde{F}(z)</math></b>	<b>75</b>
<b>D. Sumatoria sobre las frecuencias de Matsubara</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Lo conocido es finito, lo desconocido infinito; desde el punto de vista intelectual estamos en una pequeña isla en medio de un océano ilimitable de inexplicabilidad. Nuestra tarea en cada generación es recuperar algo más de tierra.

T. H. Huxley, 1887.

No nos preguntamos qué propósito útil hay en el canto de los pájaros, cantar es su deseo desde que fueron creados para cantar. Del mismo modo no debemos preguntarnos por qué la mente humana se preocupa por penetrar los secretos de los cielos... La diversidad de los fenómenos de la Naturaleza es tan grande y los tesoros que encierran los cielos tan ricos, precisamente para que la mente del hombre nunca se encuentre carente de su alimento básico.

Johannes Kepler, *Mysterium Cosmographicum*.

De acuerdo al Modelo Standard de partículas elementales y sus interacciones, los hadrones están formados por fermiones (quarks) que interactúan entre sí a través de los bosones mediadores de las interacciones fuertes (gluones). La teoría que describe las interacciones fuertes es una teoría de campos de gauge no abeliana llamada Cromodinámica Cuántica (QCD) [1]. El hecho de que el grupo de simetría interna (color) sea no abeliano hace que QCD tenga características muy diferentes a las de la Electrodinámica Cuántica (QED). En particular QCD tiene dos propiedades sumamente importantes: libertad asintótica y confinamiento. La libertad asintótica hace que en el rango de altas energías (y alto momento transferido) los quarks se comporten como casi-libres, es decir, la interacción entre dos quarks debida al intercambio de un gluón desaparece en el límite de impulso infinito. Por lo tanto las interacciones entre ellos puedan ser tenidas en cuenta utilizando teoría de perturbaciones, en función de la constante de acoplamiento quark-gluón. En este rango de altas energías, los procesos de dispersión son calculados con una gran precisión. Por el contrario, para bajas energías ( $\sim 1$  GeV) QCD es altamente no lineal y da lugar al confinamiento: los quarks no pueden ser separados indefinidamente, ya que la energía de interacción entre ellos aumenta con la distancia.

En el estudio de ciertas propiedades hadrónicas tales como sus masas, constantes de acoplamiento, etc., el rango de interés es justamente el de bajas energías.

De esta manera, si bien uno tiene la forma explícita del lagrangiano de QCD que describe toda la dinámica del sistema, resulta muy complicado obtener información útil para la mayoría de los procesos físicos de bajas energías interesantes. Por esta razón, varios métodos fueron desarrollados para aproximar QCD. Entre ellos está la “QCD en red”, que en realidad intenta resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discreto [1]. Pero incluso aquí se presentan serios problemas, entre ellos la inclusión de un potencial químico finito [2]. Por ello, en este método también es necesario hacer aproximaciones. Otra opción es la de los modelos efectivos: se busca un lagrangiano simplificado que contenga las características principales de QCD a bajas energías, como por ejemplo, sus simetrías.

Una característica importante de QCD es precisamente que, si se supone que los quarks no tienen masa, posee una simetría llamada simetría quiral o quiralidad. Esta simetría nos indica que los quarks sin masa poseen una helicidad bien definida, es decir, son dextrógiros o levógiros. Esta suposición es razonablemente válida para los sabores *up* y *down*, ya que  $m_u \sim m_d \ll \Lambda_{QCD}$ , donde  $\Lambda_{QCD} \sim 200$  MeV, escala característica de QCD. Según veremos más adelante, en la naturaleza esta simetría está espontáneamente rota, al menos para bajas temperaturas y densidades. O sea que si bien es una simetría del lagrangiano de QCD, no lo es de su estado fundamental. Esto se debe a la estructura compleja del vacío físico. Los condensados de gluones y de pares quark-antiquark en el vacío (tal como sucede con los condensados de pares de electrones de Cooper en un superconductor) pueden ser los responsables de la supresión completa de campos eléctricos de color y de la ruptura de la simetría quiral de sabor. De esta forma, paradójicamente, el vacío está lejos de ser considerado como carente de estructura sino que debe ser visto como un medio físico complejo.

Uno de los modelos efectivos que ha recibido gran atención en los últimos 15 años es el de Nambu y Jona-Lasinio (NJL). Su historia se remonta al año 1961, en el que Y. Nambu y G. Jona-Lasinio publicaron dos trabajos titulados “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity” [3]. Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de algún límite en el cual el pión es un bosón de Goldstone (no másico) asociado con una ruptura espontánea de simetría. Lo que ellos pretendían era explicar la pequeña masa que distingue al pión de otros hadrones. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasinio partieron de un lagrangiano con una interacción de dos cuerpos entre nucleones (los bloques básicos de materia conocidos hasta ese momento) no másicos, por ello con simetría quiral, cuya ruptura espontánea hace finita la masa de los nucleones y da lugar a un bosón de Goldstone que ellos indentificaron con el pión.

Por esa época, QCD aún no existía. Cuando esta teoría finalmente fue formulada, a mediados de los años 70, el modelo NJL empezó a ser abandonado, debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Pero QCD resulta aplicable en forma exitosa fundamentalmente en el rango de altas energías, debido a la ya mencionada libertad asintótica. Para estudiar los procesos de bajas energías, aún hoy en día es necesario recurrir a aproximaciones o modelos efectivos. En este contexto, en la segunda parte de los años 80, surgió la idea de reinterpretar el modelo NJL como un modelo para un sistema de quarks en lugar de nucleones. En este caso, también hay que suponer que los grados de libertad de los gluones se pueden congelar para dar interacciones efectivas entre los quarks.

En su versión más sencilla este modelo sólo utiliza una interacción local del tipo escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial entre los fermiones y permite entender el mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral y la consiguiente aparición de los piones como bosones de Goldstone. Este modelo, así como sus extensiones que incluyen interacciones locales en otros canales, ha sido utilizado en numerosos estudios de las propiedades hadrónicas tanto en  $SU(2)$  como en el caso de considerar también el quark *strange* [4, 5].

Un problema del modelo NJL, relacionado con el uso de interacciones locales, es que se debe introducir algún tipo de regularización para evitar que los diagramas involucrados en la determinación de la auto-energía de los quarks, el condensado de quarks, etc., resulten divergentes. Esto introduce ciertas ambigüedades en el cálculo de dichas propiedades, así como de las correcciones debidas a los lazos de mesones. A lo largo de la última década han ido apareciendo trabajos que proponen el uso de interacciones no locales para solucionar este tipo de inconvenientes, a cambio de algunas complicaciones en los cálculos [6]. Una de las propuestas de mayor interés surge de la relación entre el modelo NJL y el modelo de líquido de instantones [7]. En este último modelo se supone que la solución de instantón representa la fluctuación estable dominante del campo de gluones. De la cuantización de los modos cero alrededor de dichas soluciones surge una interacción efectiva entre los quarks. Dicha interacción es no local, pero separable en el espacio de momentos. La dependencia en el momento de cada quark está caracterizada por un factor de forma  $r(p^2)$ . Esto motivó a diversos autores a utilizar este tipo de interacciones no locales para generalizar los modelos tipo NJL considerando no sólo el factor de forma particular que surge del modelo de instantones sino también del tipo gaussiano, lorentziano, etc. El uso de interacciones no locales tiene diversas ventajas ya que, por ejemplo, las anomalías son automáticamente preservadas [8], la acción efectiva es finita a todo orden en la expansión en lazos [9] (es decir tanto los lazos fermiónicos como de mesones son finitos), etc. Por otro lado recientemente [10] ha sido demostrado que mediante una adecuada elección del factor de forma es posible lograr que el propagador fermiónico no tenga polos reales y que por lo tanto los quarks no puedan aparecer como estados asintóticos. Esto es interpretado como una forma de implementar la propiedad de confinamiento que posee QCD, cosa que en el modelo NJL local no es posible hacer. Hasta ahora el uso de interacciones no locales se ha limitado mayormente a cálculos que incluyen sólo los dos sabores más livianos de quarks (*up* y *down*). Uno de los objetivos de este trabajo es extender estos estudios de manera de incorporar el quark *strange*.

Un tema para el cual el modelo NJL ha sido empleado con mucha frecuencia ha sido para estudiar el comportamiento de estas propiedades hadrónicas a temperatura y densidad finita [11], de manera de poder investigar las características de la transición de fase quiral, que se supone ocurre en QCD a altas temperaturas y/o densidades como las existentes en el universo temprano, el interior de las estrellas de neutrones y en las colisiones de iones pesados ultrarelativistas. Para testear la estructura del vacío es necesario perturbarlo con una energía de excitación suficiente para disolver los condensados en una escala grande de espacio y tiempo comparada con la característica de los condensados. Estimaciones basadas en cálculos de QCD en red predicen que la temperatura requerida es de 150 MeV o  $10^{12}$  K. Esto corresponde a una densidad de energía de más de 1 GeV/fm<sup>3</sup>, o más de siete veces la densidad de energía promedio en el interior del núcleo atómico. A temperaturas y densidades mayores, se espera que la ma-

teria nuclear está formada por gluones y quarks sin confinamiento, un estado llamado plasma de quarks y gluones. Basándose en estas ideas, la cosmología moderna nos dice que durante los primeros microsegundos después del Big Bang, cuando la temperatura excedía los 150 MeV, el universo completo era un plasma de quarks y gluones. Luego el universo se expandió, enfriándose por debajo de una cierta temperatura crítica. Esto llevó a una transición en la composición de la materia: el plasma primordial de quarks y gluones se transformó en un gas de nucleones y mesones. Al continuar el universo enfriándose, estas partículas se unieron para formar deuterio y, luego de las primeras reacciones nucleares, los elementos livianos como el helio y el litio. A partir de esta etapa, y bajo la acción de la gravedad, estos primeros elementos químicos tendieron a unirse, formando así las estrellas y galaxias. Finalmente, debido a las reacciones nucleares producidas en el interior de las estrellas y durante las explosiones estelares (novas y supernovas), se fueron formando los elementos pesados. Aquella sopa primordial de quarks y gluones es, entonces, el punto de partida de todos los elementos químicos.

El estado de la materia en que los quarks no están confinados dentro de los hadrones no es exclusivo del universo temprano, ya que también podría existir en el interior de las estrellas de neutrones. Estas estrellas se forman como resultado de la explosión de las supernovas y resultan ser extremadamente densas. Esto se debe a que están formadas por la propia materia de la supernova, interactuando con sí misma a través de la fuerza gravitatoria, pero sin la presión producida por las constantes reacciones termonucleares en el interior de la misma antes de la explosión, en lo que se denomina colapso gravitatorio. De esta manera, la gravedad concentra, típicamente, una cantidad de materia (eléctricamente neutra) del orden de 1,5 masas solares, en una esfera de sólo 10 km de radio, resultando en una densidad de alrededor de  $10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>, o sea, unas cinco veces la densidad de un núcleo atómico cargado. Esta densidad no es constante en todo el volumen de la estrella de neutrones, sino que la materia se comprime más y más a medida que se penetra a lo largo de su radio. Así, en la superficie exterior se encuentran átomos de materia ordinaria, con núcleos y electrones, pero más hacia el interior esta materia se encuentra tan comprimida por la fuerza de gravedad que los protones de los núcleos capturan a los electrones, transformando la materia en átomos más ricos en neutrones. Luego, más hacia el interior de la estrella, al llegar a una densidad de unos  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, los núcleos se disuelven completamente, resultando un fluido compuesto principalmente por neutrones, con un pequeño porcentaje de protones y electrones. Más profundo en la estrella de neutrones se alcanza una densidad de  $10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>. Si bien es difícil predecir qué pasa a tales densidades, entre las posibilidades se encuentran la transformación de los electrones más energéticos en muones, la transformación de los nucleones más energéticos en bariones más pesados, conteniendo quarks *strange*, y la transformación de los nucleones en materia de quarks.

Experimentalmente se intenta reproducir las condiciones existentes en nuestro universo temprano, mediante el uso de los grandes aceleradores de partículas. En ellos se hacen colisionar núcleos atómicos pesados con velocidades muy próximas a la de la luz. Estas colisiones a altas energías crean un gran número de partículas, dado que la energía de los proyectiles se transforma en la masa de estas partículas. La energía de bombardeo puede ser suficientemente grande tal que los núcleos pasan uno a través del otro, excitándose enormemente, y dejando el vacío entre ellos con una gran cantidad de energía. Este vacío excita-



do contiene quarks, antiquarks y gluones. De esta forma, la energía de colisión se transforma en pares de partículas, y cuanto mayor sea esta energía, mayor será la variedad de partículas que se puedan producir. Aunque esta fase densa y caliente de la colisión no dura mucho tiempo, las temperaturas y densidades alcanzadas son muy altas, semejando el vacío caliente del universo temprano.

En junio del año 2000, el “Relativistic Heavy Ion Collider” (RHIC) en Brookhaven, se puso en operación. Este acelerador de partículas hace colisionar dos haces de iones de oro que viajan en sentidos opuestos, a velocidades muy cercanas a la de la luz, a lo largo de un anillo de 4 km de longitud. Los iones pueden alcanzar energías de 200 GeV por nucleón, es decir, la colisión puede remontarnos hasta los primeros microsegundos del universo. Se estaría entonces en condiciones de “ver” la transición de la materia ordinaria (quarks confinados) al plasma de quarks y gluones (quarks libres). Por otro lado, en el CERN se está construyendo, en la actualidad, el “Large Hadron Collider” (LHC), otro acelerador de partículas que usará un anillo de 27 km. Se calcula que será capaz de hacer colisionar haces de plomo a energías del orden del TeV por nucleón. Se espera que el LHC esté en funcionamiento para el año 2007. Estos hechos, la puesta en funcionamiento del RHIC y la construcción del LHC, han hecho que en los últimos años se prestara una considerable atención al estudio del diagrama de fases de la teoría de las interacciones fuertes.

Un esquema cualitativo del diagrama de fases de QCD se muestra en la figura 1.1. A bajas temperaturas y densidades, el sistema puede ser descrito en términos de hadrones, nucleones, mesones, y estados de excitación interna de los nucleones. En la región de altas temperaturas ( $\sim 150$  MeV o  $10^{12}$  K) y altas densidades ( $\sim 5$  a  $10$  veces la densidad de materia nuclear), la descripción apropiada es en términos de quarks y gluones. La transición entre estas regiones puede ser abrupta, como en la ebullición del agua, con un calor latente (transición de primer orden), sin calor latente (segundo orden), o simplemente un paso suave pero rápido. En cualquier caso, la física cambia fuertemente entre los regímenes de bajas y altas temperaturas.

La figura 1.1 muestra también una segunda transición, de los núcleos normales, que están en estado líquido, a un gas de nucleones. Estas dos fases pueden coexistir a temperaturas por debajo de 15–20 MeV, y a densidades del orden de la materia nuclear normal. Como en la materia ordinaria, se requeriría un calor latente para que el sistema pase de la fase vapor, a través de una fase mixta de vapor y líquido, a la fase líquida.

Hay un creciente interés por investigar las consecuencias del uso de interacciones no locales en el comportamiento de las propiedades hadrónicas a temperatura y densidad finita [12], así como de entender el rol que juega el quark *strange*.

En la presente tesis se utiliza una extensión no local a  $SU(3)$  del modelo NJL para estudiar primeramente las propiedades de los nueve mesones pseudoescalares más livianos a temperatura y potencial químico nulos. Luego se estudia la transición de fases en que se restaura la simetría quiral. En el capítulo 2 se expondrán las características generales de QCD y se presentará el modelo de Nambu y Jona-Lasinio para el caso de un solo sabor, y luego se estudiará el caso más general de tres sabores de quarks. Finalmente, se introducirán las extensiones al modelo con interacciones no locales. En el capítulo 3 se expondrá el formalismo utilizado en la obtención de la ecuación del gap y en la determinación de las masas de los mesones y sus probabilidades de decaimiento. En

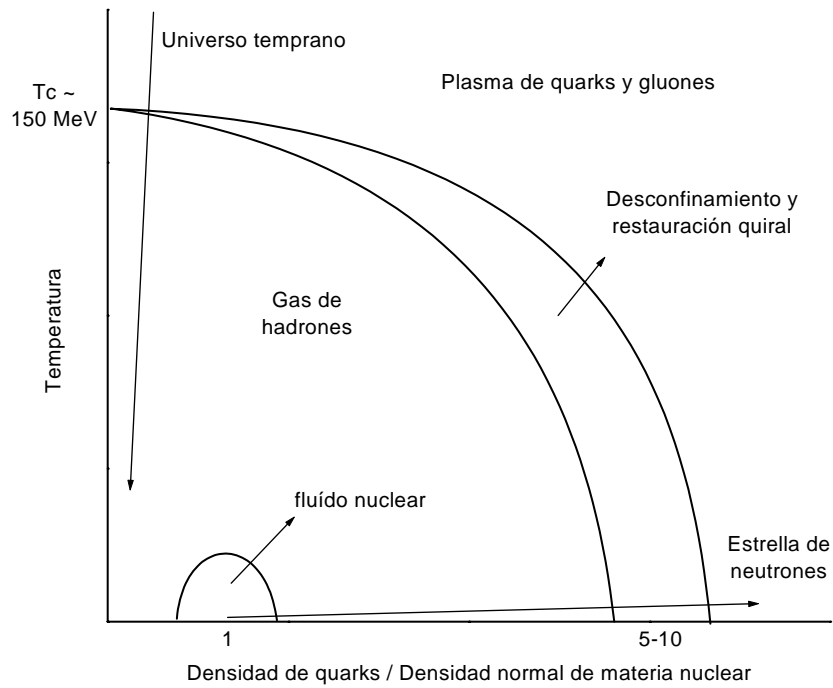


Figura 1.1: Diagrama de fases de la materia hadrónica. La figura muestra las regiones de temperatura y densidad en las cuales la materia existe como fluido nuclear, gas de hadrones, o plasma de quarks y gluones. El camino seguido por el universo temprano mientras se enfriaba desde la fase de plasma de quarks y gluones hasta la materia nuclear normal, se observa en la flecha de la izquierda. La flecha en la parte inferior traza el camino tomado por una estrella de neutrones mientras se forma. Las colisiones de iones pesados siguen un camino entre estos dos extremos, incrementando simultáneamente la temperatura y la densidad.

el capítulo 4 se explicará como incluir la temperatura y densidad finita en el modelo con interacciones no locales, utilizando el formalismo de tiempo imaginario. En el capítulo 5 se presentarán los resultados numéricos obtenidos con reguladores de tipo gaussiano y lorentziano, que describen el rango de no localidad. En el capítulo 6 se expondrán las conclusiones del trabajo. Por último, en los apéndices se describirán con más detalle algunos aspectos relevantes del cálculo realizado en los capítulos precedentes.

## Capítulo 2

# El modelo NJL y sus extensiones no locales

Dios es capaz de crear partículas de materia de distintos tamaños y formas... y quizás de densidades y fuerzas distintas, y de este modo puede variar las leyes de la naturaleza, y hacer mundos de tipos diferentes en partes diferentes del universo. Yo por lo menos no veo en esto nada contradictorio.

Isaac Newton, *Óptica*.

### 2.1. El modelo NJL y su relación con QCD

La Cromodinámica Cuántica es una teoría de gauge, no abeliana, que describe las interacciones fuertes [1]. Sus grados de libertad consisten en campos fermiónicos (quarks) y campos de gauge (gluones).

El lagrangiano de QCD con simetría de color  $SU(3)_C$  viene dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

representa el campo de quarks con tres colores y  $N_f$  sabores, las masas desnudas de los quarks están agrupadas en la matriz de masa  $m$  definida por  $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ ,

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a \quad (2.3)$$

es la derivada covariante que incluye a los campos gluónicos  $A_\mu^a$  (con índice de color  $a = 1, \dots, 8$ ),  $g$  es la constante de acoplamiento fuerte y  $\lambda^a$  son las matrices de Gell-Mann, generadoras del grupo de color  $SU(3)_C$ , que cumplen las propiedades

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c, \quad \text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \quad (2.4)$$

siendo  $f^{abc}$  las constantes de estructura del grupo  $SU(3)_C$ . El tensor de campo gluónico  $F_{\mu\nu}^a$  se define como

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.5)$$

Consideremos por el momento el caso de dos sabores ( $u$  y  $d$ ) y supongamos que los quarks correspondientes tienen masa nula (límite quiral). El lagrangiano (2.1) queda

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x) i\gamma_\mu D^\mu \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Este lagrangiano es invariante frente a las transformaciones de gauge de color  $SU(3)_C$ , que se manifiestan a través de los campos gluónicos en las derivadas covariantes. También es invariante frente a las transformaciones del grupo de Lorentz y del grupo de transformaciones globales de sabor  $SU(2)_V \otimes U(1)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_A$ .

Las transformaciones  $SU(2)_V$  y  $U(1)_V$  son las transformaciones unitarias que corresponden a la conservación del isospín y del número bariónico, respectivamente. Las transformaciones quirales o axiales  $SU(2)_A$  y  $U(1)_A$  alteran la paridad de un dado estado. Por ello, la realización de dichas simetrías en la naturaleza, debería implicar para cada multiplete la existencia de otro multiplete de paridad opuesta. Esto no es lo que se observa experimentalmente, de ahí se induce que tanto  $SU(2)_A$  como  $U(1)_A$  no se manifiestan en forma directa.

Se cree que  $SU(2)_A$  es una simetría espontáneamente rota. Al ocurrir esto, en el caso de quarks de masa nula, aparecen tres modos de excitación de los campos de quarks y gluones, de masa nula, llamados bosones de Goldstone (o más en general,  $N_f^2 - 1$  modos en el caso de  $N_f$  sabores de quarks de masa nula) [13]. Estos tres bosones se asocian con los piones, ya que experimentalmente se observa que la masa de los piones, si bien no es nula, es mucho menor que la de los nucleones. La expresión matemática de una simetría es la conmutación del hamiltoniano del sistema con el operador  $U$  correspondiente a la cantidad conservada, esto es,  $[H, U] = 0$ . Cuando una simetría está espontáneamente rota, lo que ocurre no es que el conmutador deja de ser nulo, sino que el vacío deja de ser invariante frente a las transformaciones del grupo de simetría del operador  $U$ . Como consecuencia de esto, el estado fundamental deja de ser único y pasa a estar degenerado. Esto se puede expresar como  $[H, U] = 0$ , pero  $HU|0\rangle \neq 0$ .

Por otro lado, en cuanto a la simetría  $U(1)_A$ , ésta está rota a nivel cuántico por la llamada “anomalía axial”. Esto significa que si bien la teoría clásica posee una dada simetría, en el proceso de cuantización ella se pierde porque la corriente de Noether recibe una contribución extra que hace que su cuadridivergencia deje de ser nula.

Si queremos partir de un lagrangiano efectivo, más simple que el de QCD pero con sus mismas características y simetrías, nos vemos naturalmente llevados a considerar el lagrangiano utilizado por Y. Nambu y G. Jona-Lasinio en su trabajo de 1961 [3]. Éste fue construido para nucleones con interacciones de dos cuerpos, y de manera que respetase las simetrías dadas por el grupo  $SU(2)_V \otimes U(1)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_A$  (más tarde excluyeron la simetría  $U(1)_A$  por consideraciones fenomenológicas). En nuestro caso, sólo es necesario reinterpretar dicho lagrangiano como uno de quarks, asumiendo que las interacciones locales de dos cuerpos se corresponden con una interacción efectiva, resultante de complicados procesos gluónicos.

El modelo de Nambu y Jona-Lasinio se define a través de un lagrangiano efectivo de fermiones relativistas interactuando a través de acoplamientos locales fermión-fermión. La utilidad de este modelo radica en que puede ser diseñado para incorporar todas las simetrías globales de QCD y permite “ver” los mecanismos de ruptura de las simetrías. Ofrece un esquema simple para estudiar la ruptura espontánea de simetría quiral y sus manifestaciones en la física de hadrones, como la generación dinámica de masa de los quarks, la aparición de un condensado de quarks y el rol de los piones como bosones de Goldstone. Tal vez el punto débil más importante del modelo es que no posee la propiedad de confinamiento de color de QCD. Su aplicabilidad está entonces limitada a aquellos fenómenos hadrónicos y nucleares que no dependen sensiblemente en los detalles del mecanismo de confinamiento. Sin embargo, para muchos aspectos importantes de la física hadrónica de bajas energías, las simetrías de QCD son probablemente tan o más importantes que el confinamiento. Es en este contexto que trabajaremos de aquí en adelante.

## 2.2. El modelo NJL con simetría $U(1)$

Antes de meternos de lleno en el análisis de la interacción de quarks con tres sabores, es útil explorar una versión simplificada del modelo NJL con fermiones de un sólo sabor. Este modelo  $U(1)$  posee muchas de las características importantes que encontraremos en la versión  $SU(3)$ , como la ruptura espontánea de la simetría quiral.

### 2.2.1. Fermiones sin masa y simetría quiral

Consideremos fermiones (partículas de espín 1/2) sin masa representados por el campo de Dirac  $\psi(x)$ . El lagrangiano de NJL es

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma_\mu\partial^\mu\psi(x) - G[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x))^2]. \quad (2.7)$$

La constante de acoplamiento local  $G$  tiene dimensiones de (longitud)<sup>2</sup>. Un modelo así es no renormalizable y requiere un parámetro de corte (*cut-off*)  $\Lambda$  en el espacio de momentos. Por lo tanto, esto puede aplicarse en el límite de bajas energías, es decir, a energías y momentos menores que  $\Lambda$ . Podemos introducir una constante de acoplamiento adimensional

$$g^2 = G\Lambda^2 \quad (2.8)$$

y referirnos a las regiones de acoplamiento débil y fuerte del modelo a aquellas con  $g^2/4\pi \ll 1$  y  $g^2/4\pi \gtrsim 1$ , respectivamente.

Los fermiones sin masa tienen una helicidad (o quiralidad) bien definida. Esto significa que su espín está alineado (dextrógiro) o anti-alineado (levógiro) con su momento. Si introducimos los campos dextrógiro (right) y levógiro (left)

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi, & \psi_L &= \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi, \\ \bar{\psi}_R &= \psi_R^\dagger\gamma_0 = \bar{\psi}\frac{1 - \gamma_5}{2}, & \bar{\psi}_L &= \psi_L^\dagger\gamma_0 = \bar{\psi}\frac{1 + \gamma_5}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

El lagrangiano libre  $\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi$  se separa en dos partes:

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L, \quad (2.10)$$

y es invariante ante transformaciones globales  $U(1)$  de los campos  $\psi_{R,L}$ :

$$\begin{aligned} U(1)_R &: \psi_R \rightarrow e^{i\alpha_R} \psi_R, \\ U(1)_L &: \psi_L \rightarrow e^{i\alpha_L} \psi_L, \end{aligned} \quad (2.11)$$

con fases arbitrarias  $\alpha_{R,L}$ . Esta invariancia se denomina simetría quiral  $U(1)_R \otimes U(1)_L$ . Las correspondientes corrientes de Noether son

$$J_R^\mu = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R, \quad J_L^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L, \quad (2.12)$$

con  $\partial_\mu J_R^\mu = \partial_\mu J_L^\mu = 0$ . Alternativamente, podemos escribir

$$J_{R,L}^\mu(x) = \frac{1}{2}[V^\mu(x) \pm A^\mu(x)] \quad (2.13)$$

en términos de las corrientes conservadas vector y vector axial

$$V^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad A^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x), \quad (2.14)$$

con  $\partial_\mu V^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0$ . Entonces, la simetría quiral  $U(1)_R \otimes U(1)_L$  es equivalente a la invariancia bajo el grupo  $U(1)_V \otimes U(1)_A$  con transformaciones

$$\begin{aligned} U(1)_V &: \psi \rightarrow e^{i\alpha_V} \psi, \\ U(1)_A &: \psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \alpha_A} \psi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Un término de masa  $\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi$  rompe explícitamente la simetría axial  $U(1)_A$ , y la corriente axial  $A_\mu$  ya no se conserva. De esta forma tenemos

$$\partial_\mu A^\mu = 2m\bar{\psi}i\gamma_5\psi, \quad (2.16)$$

mientras que la simetría  $U(1)_V$  se mantiene intacta con  $\partial_\mu V^\mu = 0$ . La interacción en (2.7) es obviamente invariante ante las transformaciones quirales (2.11), es decir, no mezcla helicidades. Entonces, el lagrangiano (2.7) con fermiones no másicos posee la simetría quiral.

### 2.2.2. Generación dinámica de masa fermiónica

Consideremos el lagrangiano de interacción de (2.7), de un único fermión sin masa en el caso de un acoplamiento fuerte  $G$ ,

$$\mathcal{L}_{int} = G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2]. \quad (2.17)$$

En la aproximación de Hartree (campo medio) se toman en cuenta sólo los términos directos, y el proceso relevante se muestra en la figura 2.1.

Cerrar el lazo fermiónico es equivalente a linealizar la interacción en la ecuación (2.17), reemplazando los términos  $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$  por  $2\bar{\psi}\Gamma\psi \langle \bar{\psi}\Gamma\psi \rangle$ , siendo  $\langle \bar{\psi}\Gamma\psi \rangle$  el valor de expectación del vacío y  $\Gamma$  cualquier matriz de Dirac que aparece en  $\mathcal{L}_{int}$ . Como el vacío debe ser invariante de Lorentz y debe conservar paridad, el único valor de expectación no nulo es  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , el condensado quark-antiquark relacionado con la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma_0 \psi$ . Entonces, la ecuación de Dirac en la aproximación de campo medio resulta

$$[i \not{\partial} + 2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle] \psi(x) = 0. \quad (2.18)$$

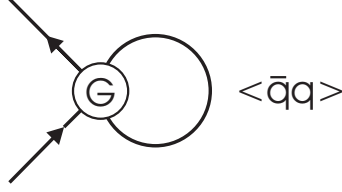


Figura 2.1: Cierre del lazo fermiónico, que esquematiza a la ecuación del gap.

Es posible definir entonces una masa fermiónica dinámica

$$M = -2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (2.19)$$

generada por una interacción escalar suficientemente fuerte entre fermiones. A la ecuación (2.19) se la denomina ecuación del gap del modelo NJL, en analogía con la ecuación correspondiente que determina el gap de energía en un superconductor.

En la aproximación de campo medio, el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  está dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \text{tr}[S_F(0)], \quad (2.20)$$

donde  $S_F$  es el propagador de Dirac, definido por

$$S_F(x-y) = -i \langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{\not{p} - M + i\epsilon}. \quad (2.21)$$

La aparición de  $S_F(0)$  en  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  refleja el lazo cerrado de la figura 2.1, con la línea fermiónica comenzando y terminando en el mismo punto del espacio-tiempo. Como la masa dinámica  $M$  está en la expresión de  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , entonces la ecuación del gap es una ecuación autoconsistente.

La integral  $S_F(0)$  es cuadráticamente divergente y requiere, por lo tanto, de un procedimiento de regularización apropiado. Si introducimos un *cut-off* de momento espacial  $\Lambda_3$  e integramos sobre la componente temporal  $p_0$  en la ecuación (2.20), nos queda

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -2 \int_{|\vec{p}| \leq \Lambda_3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} = -\frac{M}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} dp \frac{\vec{p}^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}. \quad (2.22)$$

Por lo tanto, el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  representa la densidad escalar de la energía negativa de Dirac, integrada hasta el momento  $|\vec{p}| \leq \Lambda_3$ . La ecuación del gap describe la interacción de un fermión con la parte “activa” del mar de Dirac. De la ecuación (2.22) se obtiene la ecuación del gap

$$M = \frac{2GM}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} dp \frac{\vec{p}^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad (2.23)$$

que tiene una solución no trivial con  $M \neq 0$  cuando la constante de acoplamiento  $G$  excede un valor crítico  $G_{crit} = \pi^2/\Lambda_3^2$  (los quarks adquieren una masa dinámica).

La generación dinámica de masa va en paralelo con la reestructuración del vacío: para  $G > G_{crit}$  el vacío contiene un condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  no nulo. Como la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi$  rompe la simetría quiral, el estado fundamental no tiene la simetría  $U(1)_R \otimes U(1)_L$  del lagrangiano. La simetría quiral es espontáneamente rota, y el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  es el parámetro de orden correspondiente.

En general, se distingue entre estos dos casos de realización de la simetría quiral:

- a) La fase Wigner-Weyl en la cual  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$  y los fermiones no tienen masa. Equivalentemente, la carga axial  $Q_5 = \int d^3x A_0(x)$  aniquila el vacío:  $Q_5 |0\rangle = 0$ . En el modelo NJL este es el caso para  $G < G_{crit}$ .
- b) La fase Nambu-Goldstone en la cual  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  y los fermiones tienen masa. En esta fase existe un bosón de Nambu-Goldstone no másico. La carga axial no aniquila el vacío:  $Q_5 |0\rangle \neq 0$ . En el modelo NJL esto sucede cuando  $G$  excede a la constante de acoplamiento crítico  $G_{crit}$ .

### 2.2.3. Bosón de Goldstone pseudoescalar

Como ya se ha mencionado, la ruptura espontánea de una simetría global implica la existencia de un modo de frecuencia cero, llamado bosón de Nambu-Goldstone. En este caso  $U(1) \otimes U(1)$ , este bosón de Goldstone es un modo fermión-antifermión pseudoescalar neutro ( $J^\pi = 0^-$ ), identificado con el pión. Su espín y paridad reflejan la simetría axial  $U(1)$  rota.

Para ver cómo emerge del modelo el pión de Goldstone sin masa, construimos la matriz  $T$  que surge de resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (ecuación de dos cuerpos) en el canal fermión-antifermión pseudoescalar para un dado cuádrimomento cuadrático  $q^2$  del mesón:

$$T_\pi(q^2) = K_\pi + K_\pi J_\pi(q^2) K_\pi + \dots = \frac{K_\pi}{1 - K_\pi J_\pi(q^2)}. \quad (2.24)$$

En la figura 2.2 se ilustra esta ecuación autoconsistente.

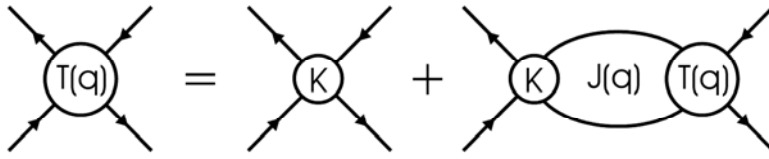


Figura 2.2: Esquemmatización de la ecuación de Bethe-Salpeter, que determina la matriz  $T$ .

La interacción en este canal está dada por el término  $G(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$  del lagrangiano de la ecuación (2.17). Entonces,  $K_\pi = 2G$  es el núcleo de la interacción, y  $J_\pi$  es la integral del lazo de interacción dada por

$$J_\pi(q^2) = i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} \right]. \quad (2.25)$$



El proceso de regularización de esta integral es idéntico al usado en la ecuación del gap (2.19).

La masa  $m_\pi$  del pión queda determinada por los polos de la matriz  $T$ , es decir por la condición

$$1 - 2G J_\pi(q^2 = m_\pi^2) = 0. \quad (2.26)$$

Utilizando la ecuación del gap es posible ver que una solución de esta ecuación es  $m_\pi = 0$  (en el límite quirral), lo que significa que el pión es un bosón de Goldstone, un modo de masa nula como consecuencia de una ruptura espontánea de simetría.

Si consideramos ahora el término  $\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi$ , que rompe explícitamente la simetría quirral, con una masa fermiónica desnuda  $m$  no nula, obtendremos una masa del pión distinta de cero.

Se define la constante de decaimiento  $f_\pi$  del pión como el elemento de matriz

$$\langle 0 | A_\mu(0) | \pi(q) \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi(0) | \pi(q) \rangle = 2i f_\pi q_\mu, \quad (2.27)$$

que describe el decaimiento del pión via la corriente axial  $A_\mu$ . Esta constante de normalización tiene unidades de energía. Utilizando nuevamente la aproximación de campo medio, obtenemos la relación para  $U(1)$  [14]:

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (2.28)$$

## 2.3. El modelo NJL en $SU(3)$

A partir de ahora trabajaremos con el modelo NJL como una aproximación de QCD de bajas energías, con tres quarks livianos. Este modelo para dos sabores (quarks  $u$  y  $d$  casi sin masa) ha sido extensamente estudiado [15, 16], y ha sido de gran utilidad para explorar la ruptura espontánea de la simetría quirral y la consecuente aparición de condensados de quarks, generación dinámica de masa y el pion como bosón de Goldstone.

Desarrollos más recientes prestaron atención a la generalización a  $SU(3)$ , es decir, la incorporación del quark *strange* dentro de este esquema [17, 18, 19, 20, 21]. Como la masa desnuda del quark *strange* es  $m_s \simeq 150$  MeV, no es un quark liviano ni pesado. Al mismo tiempo, introducir la extrañeza implica tratar el problema  $\eta'$  y la anomalía axial  $U(1)$ .

### 2.3.1. Simetrías de QCD para tres sabores

Nuestro punto de partida es QCD con  $N_f = 3$  sabores de quarks. Los campos fermiónicos (2.2) están formados por los tres quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ , y cada uno de ellos existe en  $N_c = 3$  colores. El lagrangiano de QCD es el de la ecuación (2.1). Además de la simetría local de gauge  $SU(3)$ , QCD con quarks sin masa es invariante ante transformaciones quirales globales. Consideremos

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^{(0)} + \delta\mathcal{L}, \quad (2.29)$$

donde  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$  es el límite  $m \rightarrow 0$  y  $\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}m\psi$ . Con  $N_f = 3$  sabores,  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$  es invariante ante el grupo

$$U(3)_R \otimes U(3)_L = SU(3)_R \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.30)$$

El grupo quiral  $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$  transforma campos dextrógiros y levógiros  $\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi$  según

$$\begin{aligned}\psi_R &\rightarrow e^{i\frac{\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha}_R}{2}}\psi_R, \\ \psi_L &\rightarrow e^{i\frac{\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha}_L}{2}}\psi_L,\end{aligned}\tag{2.31}$$

donde  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_8)$  es el set de matrices de  $SU(3)_f$  con  $\text{tr}(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij}$ , y  $\vec{\alpha}_{R,L}$  son fases arbitrarias. El grupo  $U(1)_V$  genera la transformación de fase  $\psi \rightarrow e^{i\alpha_V}\psi$ , y la corriente conservada relacionada con esta simetría es la corriente bariónica  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . La simetría axial  $U(1)_A$ , es decir, la invariancia ante transformaciones  $\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\alpha_A}\psi$ , se sabe que está rota en la naturaleza y probablemente por efecto de los instantones [22, 23]. Entonces, en el límite quiral con  $m \rightarrow 0$ , nos queda la simetría global  $SU(3)_R \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_V$ . Tenemos nueve corrientes vectoriales y ocho corrientes axiales conservadas:

$$V_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^i}{2}\psi, \quad i = 0, 1, \dots, 8, \quad \lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}I,\tag{2.32}$$

donde  $I$  es la matriz unitaria de  $3 \times 3$ , y

$$A_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^i}{2}\psi, \quad i = 1, \dots, 8.\tag{2.33}$$

Las correspondientes cargas vector y axial son

$$\begin{aligned}Q^i &= \int d^3x V_0^i(x), \\ Q_5^i &= \int d^3x A_0^i(x),\end{aligned}\tag{2.34}$$

con  $dQ^i/dt = dQ_5^i/dt = 0$ . Las masas de los quarks rompen esta simetría explícitamente, y tenemos

$$\begin{aligned}\partial^\mu V_\mu^j(x) &= i\bar{\psi}(x)[m, \frac{\lambda^j}{2}]\psi(x), \\ \partial^\mu A_\mu^j(x) &= i\bar{\psi}(x)\{m, \frac{\lambda^j}{2}\}\gamma_5\psi(x).\end{aligned}\tag{2.35}$$

Como las masas de  $u$  y  $d$  son muy pequeñas ( $m_{u,d} \leq 10$  MeV) comparadas con las masas típicas de los hadrones (alrededor de 1 GeV), esto sugiere que los términos  $m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d$  que rompen la simetría quiral pueden ser tratados como perturbaciones. Sin embargo, para el término  $m_s \bar{s}s$  con una masa del quark  $s$  bastante mayor ( $m_s \sim 150$  MeV) esto no es obvio.

Hay evidencias de los fenómenos hadrónicos de bajas energías [24] y de QCD en red [25, 26], que la simetría quiral  $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$  se rompe espontáneamente. Esto se evidencia en los condensados quark-antiquark  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  no nulos.

### 2.3.2. La anomalía axial

Mencionamos que la simetría  $U(1)_A$  del lagrangiano  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$  con quarks sin masa está rota en la naturaleza. Si hubiese una buena simetría quiral  $U(3)_R \otimes U(3)_L$ , tendríamos nueve corrientes axiales conservadas en vez de ocho. Todo el nonete pseudoescalar, incluyendo piones, kaones, mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , deberían aparecer como bosones de Goldstone sin masa. En cambio se observa que el mesón  $\eta'$ , con su masa  $m_{\eta'} = 958$  MeV comparable con la masa del nucleón, cae fuera de este esquema.

Este es el “problema  $\eta'$ ”, y se piensa que está relacionado con la anomalía axial en QCD. Las anomalías son simetrías de lagrangianos clásicos que se rompen al incluir efectos cuánticos [27].

Consideremos la corriente axial del singlete de  $SU(3)$

$$J_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\gamma_5\psi(x), \quad (2.36)$$

relacionada con la simetría  $U(1)_A$ . Ingenuamente, uno esperaría que la divergencia de esta corriente se anule en el límite quiral  $m \rightarrow 0$ . Este es el caso a nivel clásico de  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ , pero usando la teoría cuántica de campos resulta que  $\partial^{\mu}J_{\mu 5}$  es proporcional a un término que incluye campos gluónicos en la forma  $E_a B_a = \frac{1}{8}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_a^{\mu\nu}F_a^{\lambda\sigma}$  (producto de campos eléctrico y magnético de color):

$$\partial_{\mu}J_5^{\mu} = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} E_a B_a, \quad (2.37)$$

donde  $N_f$  es el número de sabores ( $N_f = 3$  en nuestro caso). La ruptura explícita de la simetría quiral introduce un término adicional  $2i\bar{\psi}m\gamma_5\psi$  en el lado derecho de esta ecuación. La ecuación (2.37) es conocida como la anomalía axial en QCD.

Las ecuaciones no abelianas de Yang-Mills admiten soluciones para las cuales la acción clásica euclídea  $\int d^4x E \cdot B$  es finita, llamadas soluciones de instantones [28]. A través de la ecuación (2.37), estos instantones se acoplan a los quarks. G. 't Hooft demostró en 1976 [22] que esta interacción efectiva entre quarks inducida por los instantones tiene la forma de un determinante de sabor

$$\det[\bar{\psi}_i(1 + \gamma_5)\psi_i] + \det[\bar{\psi}_i(1 - \gamma_5)\psi_i], \quad (2.38)$$

donde los índices de sabor  $i$  y  $j$  van a través de los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ . Esta interacción comprende los tres sabores simultáneamente, como ilustra la figura 2.3.

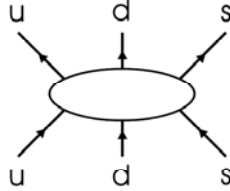


Figura 2.3: Estructura de seis patas de sabor de la interacción efectiva  $U(1)_A$ .

### 2.3.3. La interacción efectiva en el modelo NJL

El modelo NJL en  $SU(3)$  parte de las siguientes hipótesis:

- Considera a los quarks livianos  $u$ ,  $d$  y  $s$  como los grados de libertad del sistema.
- Asume que en el límite de bajas energías, los grados de libertad gluónicos están absorbidos dentro de una interacción efectiva y local entre quarks.
- Construye esta interacción en acuerdo con las simetrías de QCD.

El lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.39)$$

con la matriz de masas desnudas dada por  $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ . El lagrangiano de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)} \quad (2.40)$$

tiene una componente de interacción local de cuatro patas  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  y un término de ruptura  $U(1)_A$  que es como mínimo un vértice de seis patas. La interacción  $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$  se construye de modo tal que simule la ruptura  $U(1)_A$  por efecto de los instantones.

La interacción de cuatro patas debe satisfacer la simetría quirral  $U(3)_R \otimes U(3)_L$  junto a la simetría  $SU(3)_{color}$  y CPT. La forma más sencilla de esta interacción es

$$\mathcal{L}_{int}^{(4)} = \frac{G}{2} \sum_{i=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^i\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^i\psi)^2]. \quad (2.41)$$

Formas más generales que incluyen interacciones vectoriales y axiales también han sido estudiadas, dando lugar a resultados cualitativamente equivalentes.

La interacción  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  tiene aún una simetría axial  $U(1)_A$  no deseada. Como mencionamos antes, una manera de romper esta simetría  $U(1)_A$  y mantener la simetría  $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$  es introduciendo el determinante de 't Hooft

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = H \{ \det[\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] + \det[\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi] \}, \quad (2.42)$$

que puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = \frac{H}{4} A_{abc} (\bar{\psi}\lambda^a\psi) [(\bar{\psi}\lambda^b\psi)(\bar{\psi}\lambda^c\psi) - 3(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^b\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^c\psi)], \quad (2.43)$$

donde la suma es sobre los índices de sabor  $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 8\}$ . La constante de acoplamiento  $H$  tiene dimensiones de (longitud)<sup>5</sup> y las  $A_{abc}$  son las constantes de estructura simétricas de  $SU(3)$  definidas por

$$A_{abc} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} (\lambda_a)_{im} (\lambda_b)_{jn} (\lambda_c)_{kl}. \quad (2.44)$$

De esta forma, la estructura de  $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$  es una interacción de seis patas con mezcla de sabores, para  $N_f = 3$  sabores. En particular, este término es esencial para generar el desdoblamiento de masas observado en el sistema  $\eta - \eta'$ .

Entonces, el lagrangiano total del modelo NJL es

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi + \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)}. \quad (2.45)$$

## 2.4. Interacciones no locales y separables

En secciones anteriores hemos descrito un sistema de quarks interactuando a través de vértices de cuatro o seis puntos, que son invariantes quirales, y locales. La naturaleza local de dichas interacciones permite simplificar notablemente los cálculos, pero también trae consecuencias no deseadas, tales como integrales divergentes y no confinamiento. En cuanto a la primera consecuencia,

hay varios tipos de regularización usados en la literatura (*cut-offs*, Pauli-Villars, etc.), y todos ellos llevan a resultados cualitativamente parecidos, por lo cual no parece haber una razón física para decidirse por uno u otro esquema. En cuanto a la segunda consecuencia, el modelo usado lleva a la existencia de quarks no confinados, libres, hecho contrario a la experiencia.

Una posible solución a estos problemas es la sugerida por los estudios de la representación de instantones del vacío de QCD [29]. En esta imagen, la interacción de los quarks con los instantones induce un vértice efectivo, no local y separable. La naturaleza separable de la interacción permite seguir, hasta cierto punto, con las simplificaciones en los cálculos del caso local, a la vez que la no localidad provee al modelo de un *cut-off* natural. En muchos trabajos se han utilizado reguladores suaves, que mantienen estas mismas características, como por ejemplo funciones gaussianas y lorentzianas.

Consideremos una extensión no local del modelo NJL en  $SU(2)$  definida por la acción efectiva

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x \bar{\psi}(x) (i \not{\partial} - m) \psi(x) \\
&+ \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 V(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&\quad \times [\bar{\psi}(x_1) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_4) \\
&\quad + \bar{\psi}(x_1) i \gamma_5 \lambda^a \psi(x_3) \bar{\psi}(x_2) i \gamma_5 \lambda^a \psi(x_4)], \quad (2.46)
\end{aligned}$$

El potencial de interacción en el espacio de momentos euclídeo está dado por

$$V(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{(2\pi)^4}{2} G r(q_1) r(q_2) r(q_3) r(q_4) \delta(q_1 + q_2 - q_3 - q_4), \quad (2.47)$$

donde el factor de forma o regulador  $r(q_i)$  es en realidad  $r(q_i^2)$ , y cumple con la normalización  $r(0) = 1$ . En el caso en que  $r(q) = 1$  para todo momento  $q$ , se recupera el caso local. De aquí en más, a menos que se especifique lo contrario, todos los momentos que usemos estarán en el espacio euclídeo.

Como sucede en la versión local del modelo NJL, la simetría quiral es espontáneamente rota en este esquema no local para valores suficientemente grandes de la constante de acoplamiento  $G$ . Trabajando en la aproximación de Hartree, con  $N_c$  colores y  $N_f$  sabores en el sistema, la autoenergía  $\Sigma(q)$  o masa dinámica del quark viene dada por

$$\Sigma(q) = m + [\Sigma(0) - m] r^2(q), \quad (2.48)$$

donde  $m$  es la masa desnuda del quark, y la masa dinámica a momento cero  $\Sigma(0)$  es una solución de la ecuación del gap

$$\Sigma(0) - m = 4GN_c N_f \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{[m + (\Sigma(0) - m) r^2(q)] r^2(q)}{q^2 + [m + (\Sigma(0) - m) r^2(q)]^2}. \quad (2.49)$$

Entonces, para determinar  $\Sigma(q)$  sólo hace falta conocer la constante  $\Sigma(0)$ .

En el espacio de Minkowski, para que un quark exista en forma aislada se debe cumplir que

$$\Sigma^2(q_p) = q_p^2, \quad (2.50)$$

para valores reales  $q_p$  del cuadrimomento. Si nos colocamos en el sistema de la partícula ( $\vec{p} = 0$ ) y utilizamos la ecuación (2.48), nos queda

$$m + [\Sigma(0) - m] r^2(q_0) = q_0. \quad (2.51)$$

Se ve claramente que, según el factor de forma  $r(q)$  que se use, habrá un valor crítico de  $\Sigma(0)$  a partir del cual no existen soluciones reales de esta ecuación. O sea, el propagador del quark no tendrá polos reales, y es posible interpretar esto como una situación de confinamiento. Para determinar dicho valor crítico, basta pedir que se cumplan dos condiciones en ese punto: las dos curvas definidas por los miembros izquierdo y derecho de (2.50) se deben cruzar (esto es la ecuación (2.51)), y tener la misma pendiente, es decir

$$2[\Sigma(0) - m] r(q_0) \frac{dr}{dq_0} = 1. \quad (2.52)$$

Entonces, las ecuaciones (2.51) y (2.52) definen el  $\Sigma(0)$  crítico.

Por ejemplo podemos considerar como factor de forma una función gaussiana del cuadrimomento euclídeo

$$r(q) = e^{-\frac{q^2}{2\Lambda^2}}, \quad (2.53)$$

donde  $\Lambda$  es un *cut-off* natural al modelo que describe el rango de no localidad. Esta función cumple con los requerimientos básicos de ser invariante de Lorentz y decaer suficientemente rápido para momentos altos, de manera de mantener las integrales acotadas. Además, en el espacio coordinado también decae rápidamente con la distancia, lo que implica confinamiento. Pasando el regulador  $r(q)$  al espacio de Minkowski ( $q_0 \rightarrow i q_0$ ), la ecuación (2.51) queda

$$m + [\Sigma(0) - m] e^{\frac{q_0^2}{\Lambda^2}} = q_0, \quad (2.54)$$

que se representa en la figura 2.4. En ella vemos que, modificando el valor del parámetro  $\Sigma(0)$ , hacemos que la exponencial suba o baje intersectando o no a la recta. De esta forma, la ecuación (2.51) tendrá dos, una (caso crítico) o ninguna solución real. En este último caso, habrá dos soluciones complejas correspondientes al caso de un par de polos complejos en el propagador del quark. Esto, a su vez, corresponde a quarks aislados con una vida media finita, similar a lo que ocurre en otros modelos de confinamiento [30, 31].

Entonces, una adecuada elección del regulador no local y de los parámetros del modelo permite llevarnos a cierta forma de confinamiento de los quarks, haciendo que el propagador no tenga polos a energías reales. En el espacio euclídeo, esto equivale a que el propagador no tenga polos imaginarios puros.

La justificación final del factor de forma usado (y de un modelo en general) viene dada por su poder explicativo y predictivo de la realidad. En los trabajos realizados en  $SU(2)$  con reguladores gaussianos [10], las propiedades obtenidas de los mesones muestran un buen acuerdo con lo observado empíricamente.

Como QCD es asintóticamente libre, cuando la temperatura y el potencial químico aumentan, el acoplamiento efectivo entre los quarks disminuye. Varios autores han mostrado que en un cierto punto el sistema sufre una transición a una nueva fase en donde aparece el color y la simetría quiral es restaurada [4, 5, 11]. Para potencial químico cero y temperatura finita, se observa que

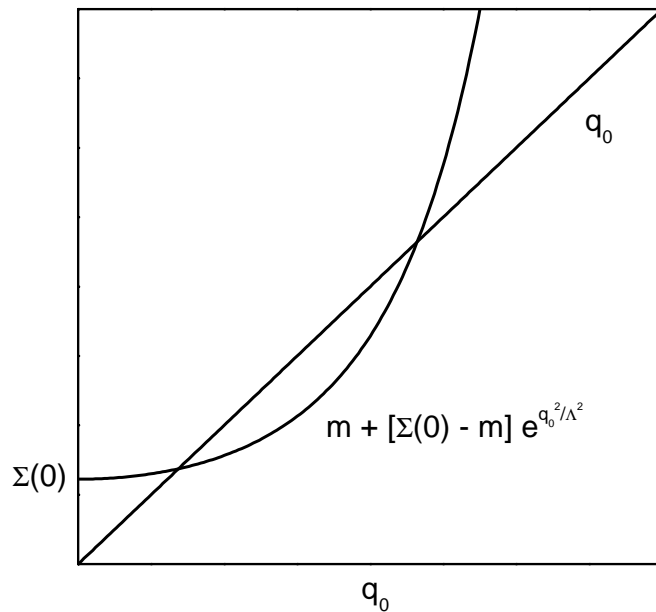


Figura 2.4: Solución gráfica de la ecuación (2.54). La intersección de las curvas representa la existencia de quarks aislados con masa.

esta transición es suave. Sin embargo, el hecho que esta transición para potencial químico finito y temperatura cero sea de primer orden o no, depende fundamentalmente de los parámetros del modelo y de las aproximaciones realizadas. Recientemente, se ha investigado esta transición en extensiones no locales del modelo NJL en  $SU(2)$  para temperatura y potencial químico finitos [12, 32]. Utilizando varios reguladores no locales, se mostró que la transición quiral es de primer orden para valores bajos de temperatura, pero a partir de cierto punto la transición es suave.

## Capítulo 3

# Modelo no local en $SU(3)$ a temperatura y potencial químico nulos

En este capítulo desarrollaremos el formalismo necesario para extender el modelo NJL no local para el caso de los tres sabores de quarks más livianos.

### 3.1. La acción efectiva

Nuestro punto de partida es la función de partición gran canónica a temperatura y potencial químico nulos

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E}, \quad (3.1)$$

en la cual  $S_E$  es la acción efectiva euclídea. Generalizando las expresiones (2.41) y (2.43) al caso no local, la acción  $S_E$  queda definida por

$$S_E = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x)[-i\cancel{\partial} + m]\psi(x) - \frac{G}{2}[j_a^S(x)j_a^S(x) + j_a^P(x)j_a^P(x)] - \frac{H}{4}A_{abc}[j_a^S(x)j_b^S(x)j_c^S(x) - 3j_a^S(x)j_b^P(x)j_c^P(x)] \right\}, \quad (3.2)$$

donde  $\psi$  es el vector de campos fermiónicos para los tres sabores más livianos,  $\cancel{\partial}$  es el operador euclídeo

$$\cancel{\partial} = \gamma_4 \frac{\partial}{\partial\tau} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}, \quad (3.3)$$

con  $\gamma_4 = i\gamma_0$ ,  $\tau = it$ ,  $m$  es la matriz de masas desnudas de los quarks,  $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ , y las  $A_{abc}$  son las constantes de estructura de  $SU(3)$  definidas en (2.44). De aquí en más, trabajaremos en el límite de simetría de isoespín, en el cual  $m_u = m_d$ . Las corrientes  $j_a^{S,P}(x)$  están dadas por

$$j_a^S(x) = \int d^4y d^4z r(y-x)r(x-z)\bar{\psi}(y)\lambda_a\psi(z), \quad (3.4)$$

$$j_a^P(x) = \int d^4y d^4z r(y-x)r(x-z)\bar{\psi}(y)i\gamma_5\lambda_a\psi(z). \quad (3.5)$$



El regulador no local  $r(x-y)$  es local en el espacio de momentos, es decir

$$r(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(x-y)p} r(p), \quad (3.6)$$

y por ser invariante de Lorentz  $r(p)$  solo puede ser función de  $p^2$ . Las matrices  $\lambda_a$ , con  $a = 0, \dots, 8$ , son las ocho matrices de Gell-Mann de  $3 \times 3$  que generan  $SU(3)$ , más  $\lambda_0 = \sqrt{2/3} I$ .

La función de partición (3.1) puede ser bosonizada, introduciendo los campos de mesones escalar  $\sigma_a(x)$  y pseudoescalar  $\pi_a(x)$ , junto con los campos auxiliares  $S_a(x)$  y  $P_a(x)$ , tales que

$$f(j_a^S(x), j_a^P(x)) = \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a f(S_a(x), P_a(x)) \times e^{\int d^4 x \{ \sigma_a(x) [S_a(x) - j_a^S(x)] + \pi_a(x) [P_a(x) - j_a^P(x)] \}}. \quad (3.7)$$

Por lo tanto, integrando sobre los campos fermiónicos obtenemos

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \det A \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a e^{\int d^4 x (\sigma_a S_a + \pi_a P_a)} \times e^{\int d^4 x [\frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c)]}, \quad (3.8)$$

donde el operador  $A$  es, en el espacio de momentos,

$$A(p, p') = (-\not{p} + m) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') + r(p) [\sigma_a(p - p') + i\gamma_5 \pi_a(p - p')] \lambda_a r(p'). \quad (3.9)$$

Si  $H = 0$ , el exponente en la segunda línea de (3.8) sería cuadrático y por lo tanto dicha integral podría resolverse en forma exacta. Como este no es el caso, utilizamos la aproximación de fase estacionaria (AFE). En esta aproximación

$$\int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a e^{\int d^4 x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c)]} \simeq e^{\int d^4 x [\sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \frac{G}{2} (\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3 \tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c)]}, \quad (3.10)$$

donde  $\tilde{S}_a(\sigma_b(x), \pi_c(x))$  y  $\tilde{P}_a(\sigma_b(x), \pi_c(x))$  son los valores que minimizan el integrando, es decir, satisfacen

$$\frac{\delta}{\delta S_a} \int d^4 x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c)] \Big|_{S_a, P_a = \tilde{S}_a, \tilde{P}_a} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\delta}{\delta P_a} \int d^4 x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c)] \Big|_{S_a, P_a = \tilde{S}_a, \tilde{P}_a} = 0. \quad (3.12)$$

Realizando estos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_a + G \tilde{S}_a + \frac{3H}{4} A_{abc} [\tilde{S}_b \tilde{S}_c - \tilde{P}_b \tilde{P}_c] &= 0, \\ \pi_a + G \tilde{P}_a - \frac{3H}{2} A_{abc} \tilde{S}_b \tilde{P}_c &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Entonces, aplicando AFE nos queda la acción efectiva bosonizada

$$S_E = -\ln \det A - \int d^4x [\sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \frac{G}{2}(\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a) + \frac{H}{4} A_{abc}(\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3\tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c)]. \quad (3.14)$$

Asumimos ahora que los campos  $\sigma_a$  tienen valores de campo medio  $\bar{\sigma}_a$  no nulos que son invariantes traslacionales, mientras que los campos pseudoescalares  $\pi_a$  no los tienen debido a razones de simetría. Es decir, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) &= \bar{\sigma}_a + \delta\sigma_a(x), \\ \pi_a(x) &= \delta\pi_a(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Podemos ahora expandir la acción efectiva hasta el segundo orden en  $(\delta\sigma_a, \delta\pi_a)$  alrededor de estos valores de expectación. El orden cero corresponde a la aproximación de campo medio (ACM), el término lineal desaparece debido a que  $\bar{\sigma}_a$  minimiza la acción efectiva, y consideraremos la expansión hasta el término cuadrático. La acción efectiva tendrá la forma

$$S_E \simeq S_E^{ACM} + S_E^{(2)}. \quad (3.16)$$

Analicemos primero el orden cero. En el espacio de momentos tenemos que

$$\sigma_a^{(0)}(p-p') = (2\pi)^4 \bar{\sigma}_a \delta^{(4)}(p-p'), \quad (3.17)$$

por lo tanto

$$A(p, p') = [-\not{p} + m + \lambda_a \bar{\sigma}_a r^2(p)] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p'). \quad (3.18)$$

Utilizando la identidad  $\ln \det A = \text{tr} \ln A$ , donde la traza es sobre los índices de Dirac, color y sabor, se obtiene una acción efectiva en ACM de la forma

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{ACM}}{V^{(4)}} &= -2N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln[p^2 + \Sigma^2(p)] \\ &\quad - \bar{\sigma}_a \bar{S}_a - \frac{G}{2} \bar{S}_a \bar{S}_a - \frac{H}{4} A_{abc} \bar{S}_a \bar{S}_b \bar{S}_c, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde ahora la traza es sólo sobre sabor,  $V^{(4)}$  es el volumen del espacio cuatridimensional,  $\Sigma(p) = m + \bar{\sigma}_a \lambda_a r^2(p)$ , y los valores de campo medio  $\bar{S}_a$  están dados por  $\bar{S}_a = \tilde{S}_a(\bar{\sigma}_b, 0)$ . Si minimizamos esta última expresión con respecto a  $\bar{\sigma}_a$  obtenemos

$$\bar{S}_a = -2N_c \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_a} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln[p^2 + \Sigma^2(p)], \quad (3.20)$$

que junto a la ecuación (3.13) en la ACM

$$\bar{\sigma}_a + G \bar{S}_a + \frac{3H}{4} A_{abc} \bar{S}_b \bar{S}_c = 0, \quad (3.21)$$

conforman las llamadas “ecuaciones del gap”.

Notemos que, debido a la conservación de la carga, solamente los  $\bar{\sigma}_{a=0,3,8}$  pueden ser distintos de cero. Más aún, en el límite de isoespín también se anula  $\bar{\sigma}_3$ . De aquí en adelante nos conviene cambiar de la base  $\{X_a\}$ , con  $a = 0, 3, 8$ ,

a una nueva base  $\{X_i\}$ , donde los índices son  $i = 1, 2, 3$  o equivalentemente  $i = u, d, s$ , tal que  $\lambda_0 X_0 + \lambda_3 X_3 + \lambda_8 X_8 = \text{diag}(X_u, X_d, X_s)$ , es decir,

$$\begin{aligned} X_u &= \sqrt{\frac{2}{3}} X_0 + X_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} X_8 \\ X_d &= \sqrt{\frac{2}{3}} X_0 - X_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} X_8 \\ X_s &= \sqrt{\frac{2}{3}} X_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} X_8. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En esta base, la acción efectiva de la ecuación (3.19) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{ACM}}{V^{(4)}} &= -2 N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln[p^2 + \Sigma^2(p)] \\ &\quad - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_i \bar{S}_i + \frac{G}{2} \bar{S}_i \bar{S}_i + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $\Sigma(p) = \text{diag}(\Sigma_u(p), \Sigma_d(p), \Sigma_s(p))$ , con  $\Sigma_i(p) = m_i + \bar{\sigma}_i r^2(p)$ . Se observa que en el límite de isoespín, como  $\bar{\sigma}_u = \bar{\sigma}_d$ , entonces  $\Sigma_u(p) = \Sigma_d(p)$ .

Minimizando la ecuación (3.20) en esta nueva base, se obtiene

$$\bar{S}_i = -8 N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma_i(p) r^2(p)}{p^2 + \Sigma_i^2(p)}, \quad (3.24)$$

que integra el conjunto de ecuaciones autoconsistentes del gap (3.21):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_u + G \bar{S}_u + \frac{H}{2} \bar{S}_d \bar{S}_s &= 0, \\ \bar{\sigma}_d + G \bar{S}_d + \frac{H}{2} \bar{S}_s \bar{S}_u &= 0, \\ \bar{\sigma}_s + G \bar{S}_s + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En el caso de isoespín simétrico, es decir  $m_u = m_d$ , estas ecuaciones se reducen a estas dos

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_u + G \bar{S}_u + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_s &= 0, \\ \bar{\sigma}_s + G \bar{S}_s + \frac{H}{2} \bar{S}_u^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Los condensados quirales están dados por los valores de expectación del vacío  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$  y  $\langle \bar{s}s \rangle$ . Si definimos campos no locales

$$q(x) = \int d^4 y r(x-y) \psi(y), \quad (3.27)$$

y derivamos la función de partición en ACM con respecto a la masa desnuda de cada quark  $q = u, s$ , se obtiene

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4 N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma_i(p) r^2(p)}{p^2 + \Sigma_i^2(p)}. \quad (3.28)$$

Por lo tanto las ecuaciones (3.26) pueden expresarse en la forma

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_u &= -2G \langle \bar{u}u \rangle - 2H \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{s}s \rangle, \\ \bar{\sigma}_s &= -2G \langle \bar{s}s \rangle - 2H \langle \bar{u}u \rangle^2.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Para calcular el término cuadrático de la acción efectiva en (3.16), primero expandimos el determinante fermiónico de (3.14) a segundo orden en las fluctuaciones de los mesones, y tras un arduo cálculo se obtiene esta expresión

$$(\ln \det A)^{(2)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [C_{ab}^+(q) \delta\sigma_a(q) \delta\sigma_b(-q) + C_{ab}^-(q) \delta\pi_a(q) \delta\pi_b(-q)], \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned}C_{ab}^\pm(q) &= -q^2 N_c \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{r^2(q^+)}{(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)} \lambda_a \frac{r^2(q^-)}{(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)} \lambda_b \right] \\ &+ 2N_c \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{r^2(q^+)r^2(q^-)}{(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)} \lambda_a \lambda_b \right] \\ &\mp N_c \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{r^2(q^+)}{(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)} (\Sigma(q^+) \lambda_a \pm \lambda_a \Sigma(q^-)) \times \right. \\ &\quad \left. \frac{r^2(q^-)}{(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)} (\Sigma(q^-) \lambda_b \pm \lambda_b \Sigma(q^+)) \right],\end{aligned}\quad (3.31)$$

y  $q^\pm = q' \pm q/2$ .

Introducimos una base más conveniente, definida por

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_a \phi_a)_{ij}, \quad (3.32)$$

donde  $\phi = \sigma, \pi$ , y los índices  $i, j$  corren desde 1 a 3. De este modo, tenemos por ejemplo para el caso pseudoescalar

$$\delta\pi_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}_{ij}. \quad (3.33)$$

Si reescribimos en esta base la parte cinética de la acción efectiva, descrita en las ecuaciones (3.30) y (3.31), y le agregamos el segundo orden de la expansión en las fluctuaciones  $\delta\phi_{ij}$  del término potencial de (3.14), nos queda

$$\begin{aligned}S_E^{(2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [G_{ij,kl}^+(p^2) \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) \\ &\quad + G_{ij,kl}^-(p^2) \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p)],\end{aligned}\quad (3.34)$$

donde hemos definido

$$G_{ij,kl}^\pm(p^2) = C_{ij}^\pm(p^2) \delta_{il} \delta_{jk} + ((r^\pm)^{-1})_{ij,kl}, \quad (3.35)$$

con

$$C_{ij}^{\pm}(p^2) = -8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{r^2(q^+) r^2(q^-) [(q^+ \cdot q^-) \mp \Sigma_i(q^+) \Sigma_j(q^-)]}{[(q^+)^2 + \Sigma_i^2(q^+)] [(q^-)^2 + \Sigma_j^2(q^-)]}, \quad (3.36)$$

siendo  $q^{\pm} = q \pm p/2$ , y

$$r_{ij,kl}^{\pm} = G \delta_{il} \delta_{jk} \pm \frac{H}{2} \epsilon_{ikn} \epsilon_{jln} \bar{S}_n. \quad (3.37)$$

En el apéndice A se muestran algunas dificultades relacionadas con el cálculo de las integrales (3.36) y se discuten los procedimientos utilizados para resolverlas numéricamente.

## 3.2. Masas y constantes de acoplamiento quark-mesón

De la acción cuadrática efectiva  $S_E^{(2)}$  de la ecuación (3.34) es posible obtener las masas de los mesones escalares y pseudoescalares y las constantes de acoplamiento quark-mesón. De aquí en adelante consideraremos sólo el caso de los mesones pseudoescalares. Las expresiones correspondientes al caso escalar son completamente equivalentes, sólo hay que reemplazar los índices “-” por “+”. En la base de los campos físicos (3.33), la contribución de los mesones pseudoescalares a  $S_E^{(2)}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} S_E^{(2)} \Big|_P = & \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ G_{\pi}(p^2) [\pi^0(p) \pi^0(-p) + 2 \pi^+(p) \pi^-(-p)] \right. \\ & + G_K(p^2) [2 K^0(p) \bar{K}^0(-p) + 2 K^+(p) K^-(-p)] \\ & \left. + G_{\eta}(p^2) \eta(p) \eta(-p) + G_{\eta'}(p^2) \eta'(p) \eta'(-p) \right\}. \quad (3.38) \end{aligned}$$

En esta expresión, los campos  $\eta$  y  $\eta'$  están relacionados con los estados  $\eta_0$  y  $\eta_8$  de  $U(3)_V$  mediante

$$\eta = \eta_8 \cos \theta - \eta_0 \sin \theta \quad (3.39)$$

$$\eta' = \eta_8 \sin \theta + \eta_0 \cos \theta, \quad (3.40)$$

donde el ángulo de mezcla  $\theta$  está definido de manera tal que no haya mezcla  $\eta - \eta'$  a nivel de la acción cuadrática. Las funciones  $G_P(p^2)$  introducidas en

(3.38) están dadas por

$$G_\pi(p^2) = \left(G + \frac{H}{2}\bar{S}_s\right)^{-1} + C_{uu}^-(p^2), \quad (3.41)$$

$$G_K(p^2) = \left(G + \frac{H}{2}\bar{S}_u\right)^{-1} + C_{us}^-(p^2), \quad (3.42)$$

$$G_\eta(p^2) = \frac{G_{88}^-(p^2) + G_{00}^-(p^2)}{2} - \sqrt{[G_{08}^-(p^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(p^2) - G_{00}^-(p^2)}{2}\right]^2}, \quad (3.43)$$

$$G_{\eta'}(p^2) = \frac{G_{88}^-(p^2) + G_{00}^-(p^2)}{2} + \sqrt{[G_{08}^-(p^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(p^2) - G_{00}^-(p^2)}{2}\right]^2}, \quad (3.44)$$

donde

$$G_{88}^-(p^2) = \frac{1}{3} \left[ \frac{6G - 4H\bar{S}_u - 2H\bar{S}_s}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(p^2) + 2C_{ss}^-(p^2) \right], \quad (3.45)$$

$$G_{00}^-(p^2) = \frac{1}{3} \left[ \frac{6G + 4H\bar{S}_u - H\bar{S}_s}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + 2C_{uu}^-(p^2) + C_{ss}^-(p^2) \right], \quad (3.46)$$

$$G_{08}^-(p^2) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ \frac{H(\bar{S}_s - \bar{S}_u)}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(p^2) - C_{ss}^-(p^2) \right]. \quad (3.47)$$

Las masas de los mesones se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$G_P(-m_P^2) = 0, \quad (3.48)$$

con  $P = \pi, K, \eta$  y  $\eta'$ , mientras que los ángulos de mezcla  $\eta$  y  $\eta'$ , que en general son distintos entre sí, están dados por

$$\tan 2\theta_{\eta,\eta'} = \frac{2G_{08}^-(p^2)}{G_{00}^-(p^2) - G_{88}^-(p^2)} \Big|_{p^2 = -m_{\eta,\eta'}^2}. \quad (3.49)$$

Se pueden definir campos de mesones normalizados  $\tilde{\phi}(p) = Z_\phi^{-1/2} \phi(p)$  de tal forma que la acción cuadrática efectiva tenga la forma canónica

$$S_E^{(2)} \Big|_\phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (p^2 + m_\phi^2) \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p). \quad (3.50)$$

Entonces, comparando con (3.38), cerca de los polos tendremos

$$(p^2 + m_\phi^2) Z_\phi^{-1} = G_\phi(p^2), \quad (3.51)$$

y de esta forma, las constantes  $Z_P$  que renormalizan las funciones de onda están dadas por

$$Z_P^{-1} = \frac{dG_P(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2 = -m_P^2}, \quad (3.52)$$

con  $P = \pi, K, \eta$  y  $\eta'$ . Finalmente, las constantes de acoplamiento quark-mesón  $G_{Pq}$  están dadas por los residuos de los propagadores en los polos correspondientes,

$$G_{Pq} = Z_P^{1/2}. \quad (3.53)$$

### 3.3. Constantes de decaimiento débil

Por definición, las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoescalares están dadas por los elementos de matriz de las corrientes axiales  $A_\mu^a(x)$  entre el vacío y los estados de cada mesón renormalizados, en los polos del propagador:

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \tilde{\phi}_b(p) \rangle = i f_{ab} p_\mu. \quad (3.54)$$

Para  $a, b = 1, \dots, 7$ , las constantes  $f_{ab}$  pueden escribirse como  $\delta_{ab} f_\phi$ , con  $\phi = \pi$  para  $a = 1, 2, 3$  y  $\phi = K$  para  $a = 4$  a  $7$ . Por el contrario, como sucede con la matriz de masas, las constantes de decaimiento están mezcladas en el sector  $a = 0, 8$ .

Para obtener la expresión de la corriente axial, hay que realizar transformaciones de gauge en la acción efectiva  $S_E$  introduciendo un conjunto de campos de gauge axiales  $A_\mu^a$ . Para una teoría local, este procedimiento puede hacerse simplemente reemplazando

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{i}{2} \gamma_5 \lambda_a \mathcal{A}_\mu^a(x). \quad (3.55)$$

De esta forma, esta acción efectiva de gauge es invariante ante transformaciones locales axiales. Sin embargo, como en este trabajo estamos utilizando campos no locales, tenemos que realizar un reemplazo adicional en el regulador  $r(x - y)$  [10, 33]:

$$r(x - y) \rightarrow \text{P} e^{\frac{i}{2} \int_x^y ds_\mu \gamma_5 \lambda_a \mathcal{A}_\mu^a(s)} r(x - y), \quad (3.56)$$

donde  $s$  representa un camino arbitrario que conecta  $x$  con  $y$ . En este trabajo utilizaremos el denominado “camino en línea recta”, lo que significa que

$$s_\mu = x_\mu + \alpha(y_\mu - x_\mu), \quad (3.57)$$

con  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Una vez obtenida la acción efectiva de gauge con estos reemplazos, la corriente axial se calcula derivando esta acción con respecto a  $\mathcal{A}_\mu^a(x)$ , evaluada en  $\mathcal{A}_\mu^a(x) = 0$ . Entonces, derivando las expresiones resultantes con respecto a los campos mesónicos renormalizados, uno puede finalmente identificar las correspondientes constantes de decaimiento débil de los mesones. Después de un largo y duro cálculo, encontramos que las constantes de decaimiento del pión y del kaón están dadas por

$$f_\pi = 4 f_{uu} (-m_\pi^2) Z_\pi^{1/2}, \quad (3.58)$$

$$f_K = 2 [f_{us} (-m_K^2) + f_{su} (-m_K^2)] Z_K^{1/2}, \quad (3.59)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{ij}(p^2) &= 2 N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot q_\alpha^+)}{p^2} \frac{r(q_\alpha^+) r(q_\alpha^-) \Sigma_j(q_\alpha^-)}{[(q_\alpha^+)^2 + \Sigma_i^2(q_\alpha^+)] [(q_\alpha^-)^2 + \Sigma_j^2(q_\alpha^-)]} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} \\ &+ 4 N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot q)}{p^2} \frac{dr(q)}{dq^2} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(q_\alpha^+)^2 + \Sigma_i^2(q_\alpha^+)} \\ &\times \left\{ r(q_\alpha^-) [\Sigma_i(q_\alpha^+) - m_i] \frac{(q_\alpha^+ \cdot q_\alpha^-) + \Sigma_i(q_\alpha^+) \Sigma_j(q_\alpha^-)}{(q_\alpha^-)^2 + \Sigma_j^2(q_\alpha^-)} \right. \\ &\left. + r(q_\alpha^+) \Sigma_i(q_\alpha^+) \right\}, \quad (3.60) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} q_{\alpha}^{+} &= q + (1 - \alpha) p, \\ q_{\alpha}^{-} &= q - \alpha p. \end{aligned} \quad (3.61)$$

En el caso del sistema  $\eta - \eta'$ , pueden definirse dos constantes de decaimiento para cada componente  $a = 0, 8$  de la corriente axial [34], que pueden escribirse en función de constantes  $f_{ab}$  y de los ángulos de mezcla  $\theta_{\eta, \eta'}$  definidos en (3.49) como

$$f_{\eta}^a = [f_{a8}(-m_{\eta}^2) \cos \theta_{\eta} - f_{a0}(-m_{\eta}^2) \sin \theta_{\eta}] Z_{\eta}^{1/2}, \quad (3.62)$$

$$f_{\eta'}^a = [f_{a8}(-m_{\eta'}^2) \sin \theta_{\eta'} + f_{a0}(-m_{\eta'}^2) \cos \theta_{\eta'}] Z_{\eta'}^{1/2}. \quad (3.63)$$

Finalmente, las constantes de decaimiento  $f_{ab}$  para  $a, b = 0, 8$  están relacionadas con las  $f_{ij}$  definidas en (3.60) por

$$f_{88}(p^2) = \frac{4}{3} [2 f_{ss}(p^2) + f_{uu}(p^2)], \quad (3.64)$$

$$f_{00}(p^2) = \frac{4}{3} [2 f_{uu}(p^2) + f_{ss}(p^2)], \quad (3.65)$$

$$f_{08}(p^2) = f_{80}(p^2) = \frac{4\sqrt{2}}{3} [f_{uu}(p^2) - f_{ss}(p^2)]. \quad (3.66)$$



## Capítulo 4

# Extensión del modelo a temperatura y potencial químico finitos

### 4.1. Formalismo de tiempo imaginario

En este capítulo veremos como extender el formalismo del modelo no local a temperatura  $T$  y potencial químico  $\mu$  finitos. De esta manera, podremos estudiar las predicciones del mismo para la transición de fases quiral.

En este trabajo utilizamos el formalismo de tiempo imaginario [35], que consiste en reemplazar la cuarta componente del momento euclídeo del quark por  $\omega_n + i\mu$ , donde  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  son las frecuencias discretas de Matsubara correspondientes a los modos fermiónicos. En lo que sigue asumiremos que solamente aquellas cantidades que contienen un  $q^2$  dependen de la temperatura y del potencial químico, es decir, consideraremos que los parámetros del modelo  $G$  y  $H$ , las masas desnudas y los reguladores no cambian con  $T$  o  $\mu$ .

Entonces, el formalismo de tiempo imaginario propone la siguiente sustitución en las ecuaciones del capítulo anterior:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q) &= \int \frac{dq_0}{2\pi} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} g(q_0, \vec{q}) \\ &\rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} g(\omega_n + i\mu, \vec{q}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Adoptamos como notación  $q = |\vec{q}|$ , de manera tal que  $\omega^2 = (\omega_n + i\mu)^2 + q^2$ .

## 4.2. Ecuaciones del gap

Si realizamos la sustitución (4.1) en las ecuaciones (3.26) del gap de  $SU(3)$  con isoespín simétrico, llegamos a

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_u + G\bar{S}_u + \frac{H}{2}\bar{S}_u\bar{S}_s &= 0, \\ \bar{\sigma}_s + G\bar{S}_s + \frac{H}{2}\bar{S}_u^2 &= 0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde ahora la ecuación (3.24) queda en la forma

$$\bar{S}_i = -8N_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma_i(\omega^2) r^2(\omega^2)}{\omega^2 + \Sigma_i^2(\omega^2)}.\tag{4.3}$$

Recordando que  $d^3q = 4\pi q^2 dq$ , obtenemos

$$\bar{S}_i = -\frac{4N_c T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq q^2 \frac{\Sigma_i(\omega^2) r^2(\omega^2)}{\omega^2 + \Sigma_i^2(\omega^2)}.\tag{4.4}$$

Si definimos

$$F(\omega) = \frac{\Sigma_i(-\omega^2) r^2(-\omega^2)}{-\omega^2 + \Sigma_i^2(-\omega^2)},\tag{4.5}$$

tal que

$$-\omega^2 = -(\omega_n + i\mu)^2 - q^2 = (i\omega_n - \mu)^2 - q^2,\tag{4.6}$$

entonces  $\bar{S}_i$  nos queda en la forma

$$\bar{S}_i = -\frac{4N_c}{\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^2 T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\sqrt{(i\omega_n - \mu)^2 - q^2}).\tag{4.7}$$

Redefiniendo  $\tilde{F}(i\omega_n) = F(\sqrt{(i\omega_n - \mu)^2 - q^2})$ , se puede expresar la suma sobre  $n$  en términos de una suma sobre los polos de  $\tilde{F}(z)$ , utilizando la igualdad demostrada en el apéndice D

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(i\omega_n) = \sum \text{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z)],\tag{4.8}$$

donde  $f(z)$  es la función auxiliar de Fermi dada por

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{z/T}}.\tag{4.9}$$

De esta forma resulta

$$\bar{S}_i = -\frac{4N_c}{\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^2 \sum \text{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z)].\tag{4.10}$$

Si conocemos los polos  $z_p$  de  $\tilde{F}(z)$  y asumimos que son todos polos simples, entonces podemos calcular los residuos

$$\begin{aligned}\text{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en } z = z_p] &= \lim_{z \rightarrow z_p} \tilde{F}(z) f(z) (z - z_p) \\ &= -\frac{G(\omega_p^2)}{2(z_p - \mu)(1 + e^{z_p/T})},\end{aligned}\tag{4.11}$$

con

$$G(\omega_p^2) = \frac{\Sigma_i(\omega_p^2) r^2(\omega_p^2)}{1 + 4 \bar{\sigma}_i \Sigma_i(\omega_p^2) r(\omega_p^2) \left. \frac{\partial r(\omega^2)}{\partial(\omega^2)} \right|_{\omega=\omega_p}}, \quad (4.12)$$

y  $\omega_p^2 = -(z_p - \mu)^2 + q^2$ , lo que nos da

$$\bar{S}_i = \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{polos}} \frac{G(\omega_p^2)}{(z_p - \mu)(1 + e^{z_p/T})}. \quad (4.13)$$

Los polos  $z_p$  de la función  $\tilde{F}(z)$  están estrechamente relacionados con los polos  $\omega_p$  del propagador del quark. En el apéndice C se describe detalladamente este cálculo, obteniendo que los polos de  $\tilde{F}(z)$  tienen la forma

$$z_p = \pm E + \mu \pm i \frac{\omega_r \omega_i}{E}, \quad (4.14)$$

donde  $\omega_p = \omega_r + i \omega_i$  son los polos de  $F(\omega)$  calculados en el apéndice B, asumiendo que  $\omega_r, \omega_i \geq 0$ , y además

$$E = \sqrt{\frac{q^2 - \omega_r^2 + \omega_i^2 + \sqrt{(q^2 - \omega_r^2 + \omega_i^2)^2 + 4\omega_r^2 \omega_i^2}}{2}}. \quad (4.15)$$

Los polos  $\omega_p$  de  $F(\omega)$  aparecen en multipletes, según dos casos bien definidos:

**Caso A:**  $\omega_r = 0$ , por lo tanto los polos del doblete son  $\omega_1 = i \omega_i$  y  $\omega_2 = -i \omega_i$ . Entonces

$$\bar{S}_i = \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{dobletes}} \left[ \frac{G(\omega_1^2)}{(z_1 - \mu)(1 + e^{z_1/T})} + \frac{G(\omega_2^2)}{(z_2 - \mu)(1 + e^{z_2/T})} \right], \quad (4.16)$$

con  $z_1 = E + \mu$  y  $z_2 = -E + \mu$ . Como  $\omega_1^2 = \omega_2^2$ , resulta

$$\bar{S}_i = \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{dobletes}} \frac{G(\omega_1^2)}{E} \left[ \frac{1}{1 + e^{\frac{E+\mu}{T}}} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{E-\mu}{T}}} \right], \quad (4.17)$$

que puede reescribirse en la forma

$$\bar{S}_i = \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{dobletes}} \frac{G(\omega_1^2)}{E} \left[ \frac{1}{1 + e^{\frac{E+\mu}{T}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{E-\mu}{T}}} - 1 \right]. \quad (4.18)$$

**Caso B:**  $\omega_r \neq 0$ , y los polos del cuádruple de  $F(\omega)$  y  $\tilde{F}(z)$  respectivamente, son

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_r + i \omega_i, & z_1 &= E + \mu - i \frac{\omega_r \omega_i}{E}, \\ \omega_2 &= \omega_r - i \omega_i, & z_2 &= E + \mu + i \frac{\omega_r \omega_i}{E}, \\ \omega_3 &= -\omega_r + i \omega_i, & z_3 &= -E + \mu - i \frac{\omega_r \omega_i}{E}, \\ \omega_4 &= -\omega_r - i \omega_i, & z_4 &= -E + \mu + i \frac{\omega_r \omega_i}{E}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Se observa que  $\omega_1^2 = \omega_4^2$  y  $\omega_2^2 = \omega_3^2 = (\omega_1^2)^*$ , y además

$$\begin{aligned} z_1 - \mu &= -(z_4 - \mu) = E - i \frac{\omega_r \omega_i}{E}, \\ z_2 - \mu &= -(z_3 - \mu) = z_1^* - \mu = E + i \frac{\omega_r \omega_i}{E}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

y como  $G$  resulta ser una función real de  $\omega^2$ , entonces  $G((\omega^2)^*) = G^*(\omega^2)$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{S}_i &= \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{cuadripl.}} \left[ \frac{G(\omega_1^2)}{z_1 - \mu} \left( \frac{1}{1 + e^{z_1/T}} - \frac{1}{1 + e^{\frac{-z_1 + 2\mu}{T}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{G^*(\omega_1^2)}{(z_1 - \mu)^*} \left( \frac{1}{1 + e^{z_1^*/T}} - \frac{1}{1 + e^{\frac{-z_1^* + 2\mu}{T}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si llamamos

$$C = z_1 - \mu = E - i \frac{\omega_r \omega_i}{E}, \quad (4.22)$$

entonces obtenemos

$$\bar{S}_i = \frac{4N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{cuadripl.}} \text{Re} \left[ \frac{G(\omega_1^2)}{C} \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{C+\mu}{T}}} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{C-\mu}{T}}} \right) \right], \quad (4.23)$$

que puede reescribirse en la forma

$$\bar{S}_i = \frac{4N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{cuadripl.}} \text{Re} \left[ \frac{G(\omega_1^2)}{C} \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{C+\mu}{T}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{C-\mu}{T}}} - 1 \right) \right], \quad (4.24)$$

Si combinamos los casos A y B en un sólo caso general, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{S}_i &= \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \times \\ &\quad \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \text{Re} \left[ \frac{G(\omega_1^2)}{C} \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{C+\mu}{T}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{C-\mu}{T}}} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_r = 0, \\ 1 & \text{si } \omega_r \neq 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Definiendo los números de ocupación generalizados  $n_\pm$  dados por

$$n_\pm = \frac{1}{1 + e^{\frac{C_\pm \mu}{T}}}, \quad (4.27)$$

entonces podemos escribir finalmente

$$\bar{S}_i = \frac{2N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \text{Re} \left[ G(\omega_1^2) \int_0^\infty dq q^2 \frac{n_+ + n_- - 1}{C} \right]. \quad (4.28)$$

Para evitar posibles divergencias en la integral, es conveniente aislar el término para  $T = \mu = 0$ . A temperatura y potencial químico nulos, los números de ocupación  $n_{\pm}$  tienden a cero, por lo tanto el término a separar es

$$\bar{S}_i(T = 0, \mu = 0) = -\frac{2N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \operatorname{Re} \left[ G(\omega_1^2) \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{C} \right]. \quad (4.29)$$

Entonces, la expresión (4.28) puede reescribirse de modo tal que todas las contribuciones dependientes de  $T$  y  $\mu$  se mantengan finitas (el integrando decae suficientemente rápido a cero cuando  $q \rightarrow \infty$ ), es decir,

$$\begin{aligned} \bar{S}_i &= \bar{S}_i(T = 0, \mu = 0) \\ &+ \frac{2N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \operatorname{Re} \left[ G(\omega_1^2) \int_0^{\infty} dq q^2 \frac{n_+ + n_-}{C} \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

y el término a  $T$  y  $\mu$  nulos se calcula a partir de la expresión (3.24), utilizando que  $d^4q = 2\pi^2 q^3 dq$ ,

$$\bar{S}_i(T = 0, \mu = 0) = -\frac{N_c}{\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^3 \frac{\Sigma_i(q) r^2(q)}{q^2 + \Sigma_i^2(q)}. \quad (4.31)$$

Entonces, la expresión (4.30) junto a (3.26) conforman la forma final de las ecuaciones del gap a temperatura y potencial químico finitos. Como vemos, la dependencia de estas cantidades está completamente fijada por la estructura de polos del propagador del quark.

### 4.3. Potencial termodinámico

En general, para ciertos rangos de temperatura y potencial químico, las ecuaciones del gap tienen más de una solución, es decir, existe más de un valor de la autoenergía donde el potencial termodinámico posee un mínimo local. Entonces, la solución física del problema estará en el mínimo absoluto del potencial. Por lo tanto, es útil encontrar una expresión del potencial termodinámico a temperatura y potencial químico finitos, para encontrar esta solución y especialmente para determinar donde se produce la transición de primer orden.

Desde el punto de vista de la mecánica estadística, en un ensamble gran canónico la función de partición en la aproximación de campo medio, a  $T$  y  $\mu$  finitas, está dada por

$$Z^{ACM}(T, \mu) = e^{-S_E^{ACM}(T, \mu)}, \quad (4.32)$$

donde la acción efectiva euclídea en la aproximación de campo medio  $S_E^{ACM}$  es la dada por la ecuación (3.23). Utilizando el formalismo de tiempo imaginario, y reemplazando el volumen cuadrimensional  $V^{(4)}$  por  $V/T$ , siendo  $V$  el volumen tridimensional del espacio coordenado, la ecuación (3.23) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{T}{V} S_E^{ACM}(T, \mu) &= -2N_c T \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} \ln \left[ \frac{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)}{T^2} \right] \\ &- \left[ \bar{\sigma}_u \bar{S}_u + \frac{\bar{\sigma}_s \bar{S}_s}{2} + \frac{G}{2} (\bar{S}_u^2 + \frac{\bar{S}_s^2}{2}) + \frac{H}{4} \bar{S}_u^2 \bar{S}_s \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

con  $\omega^2 = (\omega_n + i\mu)^2 + q^2$  y las frecuencias de Matsubara  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ . En la primer línea la traza es sobre sabor, y en la segunda línea consideramos el caso de isoespín simétrico.

El potencial termodinámico gran canónico está definido por

$$\Omega^{ACM}(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln Z^{ACM}(T, \mu) = \frac{T}{V} S_E^{ACM}(T, \mu) = -p(T, \mu). \quad (4.34)$$

Se puede demostrar que en general la integral de la ecuación (4.33) es divergente. Sin embargo, puede ser regularizada restándole el término correspondiente al potencial fermiónico libre, es decir, en ausencia de interacciones

$$\Omega_{(0)}^{ACM} = -2 N_c T \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\omega^2 + m^2}{T^2} \right], \quad (4.35)$$

y sumándole luego este mismo término pero en su forma regularizada. Así,

$$\Omega^{ACM} \rightarrow \Omega^{ACM} - \Omega_{(0)}^{ACM} + \Omega_{(r)}^{ACM}, \quad (4.36)$$

nos conduce a

$$\begin{aligned} \Omega^{ACM}(T, \mu) &= -2 N_c T \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)}{\omega^2 + m^2} \right] + \Omega_{(r)}^{ACM} \\ &\quad - \left[ \bar{\sigma}_u \bar{S}_u + \frac{\bar{\sigma}_s \bar{S}_s}{2} + \frac{G}{2} (\bar{S}_u^2 + \frac{\bar{S}_s^2}{2}) + \frac{H}{4} \bar{S}_u^2 \bar{S}_s \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para obtener el término regularizado  $\Omega_{(r)}^{ACM}$ , tomamos  $\Omega_{(0)}^{ACM}$  y utilizamos primero la siguiente identidad fácilmente demostrable

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{(\omega_n + i\mu)^2 + E_q^2}{T^2} \right] &= \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \ln \left( \frac{\omega_n^2 + (E_q + \mu)^2}{T^2} \right) + \ln \left( \frac{\omega_n^2 + (E_q - \mu)^2}{T^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde  $E_q^2 = q^2 + m^2$ . Pero cada término del lado derecho de esta identidad puedo escribirlo en la forma

$$\frac{\omega_n^2 + (E_q \pm \mu)^2}{T^2} = (2n + 1)^2 \pi^2 + \left( \frac{E_q \pm \mu}{T} \right)^2. \quad (4.39)$$

Usando luego una segunda identidad

$$\begin{aligned} \ln \left[ (2n + 1)^2 \pi^2 + \left( \frac{E_q \pm \mu}{T} \right)^2 \right] &= \\ \int_1^{(\frac{E_q \pm \mu}{T})^2} \frac{d(\theta^2)}{\theta^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} + \ln[1 + (2n + 1)^2 \pi^2], \end{aligned} \quad (4.40)$$

y la fórmula para la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^\theta} \right], \quad (4.41)$$

obtenemos esta expresión

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{(\omega_n + i\mu)^2 + E_q^2}{T^2} \right] = \frac{E_q}{T} + \ln(1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}}) + \ln(1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}}), \quad (4.42)$$

más términos que desechamos ya que no dependen de  $T$  ni de  $\mu$ . Entonces, el término regularizado del potencial termodinámico resulta

$$\Omega_{(r)}^{ACM} = -2 N_c \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ E_q + T [\ln(1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}}) + \ln(1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}})] \right\}. \quad (4.43)$$

Está claro que  $\int d^3 q E_q$  es divergente. Esta integral es la contribución del vacío, y no depende de  $T$  o  $\mu$ , por lo tanto podemos desear también este término para lograr la regularización. Entonces, la ecuación (4.37) nos queda

$$\begin{aligned} \Omega^{ACM}(T, \mu) &= -2 N_c T \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)}{\omega^2 + m^2} \right] \\ &\quad - 2 N_c T \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln[(1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}})(1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}})] \\ &\quad - \left[ \bar{\sigma}_u \bar{S}_u + \frac{\bar{\sigma}_s \bar{S}_s}{2} + \frac{G}{2} (\bar{S}_u^2 + \frac{\bar{S}_s^2}{2}) + \frac{H}{4} \bar{S}_u^2 \bar{S}_s \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Utilizando que  $d^3 q = 4\pi q^2 dq$ , y el hecho que para cualquier función que dependa de  $\omega^2$ , la suma sobre los  $n$  negativos es igual al conjugado de la suma sobre los  $n$  positivos, el potencial termodinámico gran canónico a temperatura y potencial químico finitos puede escribirse así

$$\begin{aligned} \Omega^{ACM}(T, \mu) &= -\frac{N_c T}{\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^2 \text{Tr} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} \left[ \ln \left( \frac{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)}{\omega^2 + m^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln[(1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}})(1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}})] \right\} \\ &\quad - \left[ \bar{\sigma}_u \bar{S}_u + \frac{\bar{\sigma}_s \bar{S}_s}{2} + \frac{G}{2} (\bar{S}_u^2 + \frac{\bar{S}_s^2}{2}) + \frac{H}{4} \bar{S}_u^2 \bar{S}_s \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

En el caso que la temperatura sea cero, la integral de la sumatoria en (4.45) es divergente. Para evitar esto, calculamos explícitamente la integral de (4.33) para  $T = 0$ , en cuyo caso  $\omega^2 = (q_0 + i\mu)^2 + q^2$ . Utilizando que  $d^4 q = 4\pi q^2 dq dq_0$  y regularizando a la manera de  $T$  y  $\mu$  finitos, nos queda

$$\begin{aligned} \Omega^{ACM}(0, \mu) &= -\frac{N_c}{2\pi^3} \int_0^{\infty} dq q^2 \text{Tr} \left\{ 2 \int_0^{\infty} dq_0 \ln \left( \frac{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)}{\omega^2 + m^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\pi \lim_{T \rightarrow 0} T \ln[(1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}})(1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}})] \right\} \\ &\quad - \left[ \bar{\sigma}_u \bar{S}_u + \frac{\bar{\sigma}_s \bar{S}_s}{2} + \frac{G}{2} (\bar{S}_u^2 + \frac{\bar{S}_s^2}{2}) + \frac{H}{4} \bar{S}_u^2 \bar{S}_s \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

El límite de la segunda línea de (4.46) da por resultado  $\mu - E_q$ , en el caso que  $E_q < \mu$ , y cero en cualquier otro caso. Por lo tanto, recordando que  $E_q^2 = q^2 + m^2$ ,

obtenemos la expresión final del potencial termodinámico para el caso  $T = 0$ ,

$$\begin{aligned}\Omega^{ACM}(0, \mu) = & -\frac{N_c}{\pi^3} \int_0^\infty dq_0 \int_0^\infty dq q^2 \text{Tr} \ln \left( \frac{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)}{\omega^2 + m^2} \right) \\ & -\frac{N_c}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu^2 - m^2}} dq q^2 \text{Tr}[(\mu - E_q) \theta(\mu - m)] \\ & - \left[ \bar{\sigma}_u \bar{S}_u + \frac{\bar{\sigma}_s \bar{S}_s}{2} + \frac{G}{2} (\bar{S}_u^2 + \frac{\bar{S}_s^2}{2}) + \frac{H}{4} \bar{S}_u^2 \bar{S}_s \right].\end{aligned}\quad (4.47)$$

#### 4.4. Condensado de quarks

Una vez que tenemos el potencial termodinámico, podemos fácilmente derivar las expresiones de otras cantidades de interés para estudiar y entender las características de la transición de fases quiral. Una de ellas es el condensado de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$ , que es el valor de expectación del vacío para cada sabor de quark.

A temperatura y potencial químico nulos, el condensado está definido por

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{\partial \Omega^{ACM}}{\partial m} = -4 N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(q)}{q^2 + \Sigma^2(q)}.\quad (4.48)$$

Para pasar esta expresión al caso de temperatura y potencial químico finitos, debemos aplicar el mismo formalismo de tiempo imaginario utilizado en las ecuaciones del gap. Siguiendo dichos pasos, introducimos primero  $T$  y  $\mu$ :

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{2 N_c T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dq q^2 \frac{\Sigma(\omega^2)}{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)},\quad (4.49)$$

donde  $\omega^2 = (\omega_n + i\mu)^2 + q^2$  y además  $\omega_n = (2n+1)\pi T$ . Si definimos la función

$$F(\omega) = \frac{\Sigma(-\omega^2)}{-\omega^2 + \Sigma^2(-\omega^2)},\quad (4.50)$$

entonces el condensado nos queda de la forma

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{2 N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\sqrt{(i\omega_n - \mu)^2 - q^2}).\quad (4.51)$$

Ahora definimos  $\tilde{F}(z) = F(\sqrt{(z - \mu)^2 - q^2})$ , y si conocemos los polos  $z_p$  de  $\tilde{F}(z)$ , con un procedimiento similar al realizado para  $\bar{S}_i$ , utilizando la identidad (4.8), se obtiene

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \sum_{\text{polos}} \frac{G(\omega_p^2)}{(z_p - \mu)(1 + e^{z_p/T})},\quad (4.52)$$

donde

$$G(\omega_p^2) = \frac{\Sigma(\omega_p^2)}{1 + 4\bar{\sigma} \Sigma(\omega_p^2) r(\omega_p^2) \left. \frac{\partial r(\omega^2)}{\partial(\omega^2)} \right|_{\omega=\omega_p}},\quad (4.53)$$



con  $\omega_p^2 = -(z_p - \mu)^2 + q^2$ . Analizando la estructura de los polos  $\omega_p$  de  $F(\omega)$  en multipletes, se obtiene la forma general del condensado

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \text{Re} \left[ G(\omega_p^2) \int_0^\infty dq q^2 \frac{n_+ + n_- - 1}{C} \right], \quad (4.54)$$

donde  $C$ ,  $\theta$  y  $n_\pm$  están dados por (4.22), (4.26) y (4.27), respectivamente.

Nuevamente, para evitar posibles divergencias, separo el caso  $T = \mu = 0$ , quedando

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle &= \langle \bar{q}q \rangle(T=0, \mu=0) \\ &+ \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \text{Re} \left[ G(\omega_p^2) \int_0^\infty dq q^2 \frac{n_+ + n_-}{C} \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde a su vez, ambos términos de la derecha están regularizados mediante la substracción del caso libre, es decir, con factor de forma nulo. Esto es,

$$\langle \bar{q}q \rangle(T=0, \mu=0) = -4 N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{\Sigma(q)}{q^2 + \Sigma^2(q)} - \frac{m}{q^2 - m^2} \right], \quad (4.56)$$

y para la parte a  $T$  y  $\mu$  finita de (4.55) debemos restarle un término correspondiente al caso libre, con polos  $\omega_p^2 = -m^2$ , es decir,

$$\langle \bar{q}q \rangle - \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) m \text{Re} \left[ \int_0^\infty dq q^2 \frac{n_+ + n_-}{C} \right]. \quad (4.57)$$

## 4.5. Densidad de quarks

Otra magnitud física de interés en este trabajo, es la densidad de quarks  $\rho_q$ . La densidad de quarks se define como el valor de expectación del vacío de la componente temporal de la corriente conservada asociada a la simetría  $U(1)_V$ , teniendo en cuenta que trabajamos con interacciones no locales. Podemos derivarla del potencial termodinámico de la siguiente manera

$$\rho_q = -\frac{\partial \Omega^{ACM}}{\partial \mu} = -4 i N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_4 + \Sigma(q) \partial_{q_4} \Sigma(q)}{q^2 + \Sigma^2(q)}. \quad (4.58)$$

El numerador del integrando puede escribirse de la forma

$$q_4 + \Sigma(q) \partial_{q_4} \Sigma(q) = q_4 [1 + 4 \bar{\sigma} \Sigma(q) r(q) \partial_{q^2} r(q)], \quad (4.59)$$

y aplicando el formalismo de tiempo imaginario, obtenemos

$$\rho_q = \frac{2 N_c T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dq q^2 \frac{(\mu - i \omega_n) [1 + 4 \bar{\sigma} \Sigma(\omega^2) r(\omega^2) \partial_{\omega^2} r(\omega^2)]}{\omega^2 + \Sigma^2(\omega^2)}. \quad (4.60)$$

Realizando el mismo procedimiento que con las ecuaciones del gap y el condensado de quarks, finalmente se llega a la expresión

$$\rho_q = \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \int_0^\infty dq q^2 \text{Re}[n_+ - n_- + 1], \quad (4.61)$$

donde  $\theta$  y  $n_{\pm}$  ya fueron definidas en las secciones anteriores. Nuevamente aislamos la contribución de temperatura y potencial químico nulos, para evitar divergencias. Si realizamos el cálculo de la densidad a  $T = \mu = 0$  a partir de la ecuación (4.58), obtendremos por resultado cero, es decir, la densidad se anula a  $T$  y  $\mu$  nulos. Entonces, la densidad de quarks a temperatura y potencial químico finitos está dada por

$$\rho_q = \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{\text{multipl.}} (1 + \theta) \int_0^{\infty} dq q^2 \text{Re}[n_+ - n_-]. \quad (4.62)$$

## 4.6. Susceptibilidad magnética

Por último, una magnitud más que nos interesa es la susceptibilidad magnética  $\chi$ , que está definida por

$$\chi = -\frac{\partial^2 \Omega^{ACM}}{\partial m^2}. \quad (4.63)$$

Como a su vez, el condensado  $\langle \bar{q}q \rangle$  está definido en (4.48) por

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{\partial \Omega^{ACM}}{\partial m}, \quad (4.64)$$

entonces, podemos agruparlos en

$$\chi = -\frac{\partial \langle \bar{q}q \rangle}{\partial m}. \quad (4.65)$$

Esto nos proporciona una expresión de la susceptibilidad, utilizando (4.56) para el caso de  $T$  y  $\mu$  nulos, y las ecuaciones (4.55) y (4.57) para el caso de  $T$  y  $\mu$  finitas.

La susceptibilidad magnética nos interesa para encontrar donde se produce la transición de segundo orden, y para ello buscamos el máximo de la susceptibilidad en función del potencial químico, es decir, buscamos el  $\mu$  tal que

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mu} = 0. \quad (4.66)$$

Por lo tanto, usando (4.65), nos interesa calcular el potencial químico para el cual

$$\frac{\partial^2 \langle \bar{q}q \rangle}{\partial \mu \partial m} = 0. \quad (4.67)$$

## Capítulo 5

# Resultados numéricos

### 5.1. Resultados para temperatura y potencial químico nulos

Aquí mostraremos y discutiremos los resultados numéricos obtenidos dentro del modelo no local descrito en los capítulos precedentes, para  $T = \mu = 0$ . Entre los resultados tendremos la masa dinámica de los quarks y los condensados, las masas de los mesones más livianos (pión, kaón y etas), sus constantes de decaimiento y los ángulos de mezcla, y las constantes de acoplamiento quark-mesón.

Los cálculos se llevaron a cabo utilizando dos reguladores diferentes, comúnmente usados en la literatura. Uno de ellos es el regulador gaussiano, dado por

$$r(p^2) = e^{-p^2/2\Lambda^2}, \quad (5.1)$$

y el otro es el regulador lorentziano, de la forma

$$r(p^2) = \frac{1}{1 + p^2/\Lambda^2}, \quad (5.2)$$

donde  $\Lambda$  es, en ambos casos, un parámetro libre del modelo, que hace las veces de *cut-off* covariante para el rango de momentos. Estos reguladores los hemos definido en el espacio de momentos euclídeo.

En general, el propagador del quark puede tener una estructura bastante complicada de polos y cortes en el plano complejo. Sin embargo, si bien los reguladores (5.1) y (5.2) tienen un conjunto arbitrario de polos, estos son numerables, tal como se describe detalladamente en el apéndice B. Los polos complejos aparecen en cuartetos, localizados en  $q_p = \pm s_r \pm i s_i$ , mientras que los polos imaginarios puros aparecen en dobletes en  $q_p = \pm i s_i$ . Claramente, el número de polos y su posición dependerá del tipo de regulador utilizado y de los parámetros elegidos. Por ejemplo, si elegimos una función escalón como en el modelo NJL standard, el propagador tendrá solo dos polos imaginarios puros en  $\pm i \Sigma$ , siendo  $\Sigma$  la masa dinámica del quark.

Para una interacción gaussiana se presentan tres situaciones diferentes. Para valores de  $\Sigma(0)$  menores que un cierto valor crítico  $\Sigma(0)_{crit}$ , aparecen dos pares de polos imaginarios puros simples y un conjunto infinito de cuartetos de polos

complejos simples. En  $\Sigma(0) = \Sigma(0)_{crit}$ , los dos pares de polos imaginarios puros simples se transforman en un doblete de polos dobles con  $s_r = 0$ . Mientras que para valores de  $\Sigma(0)$  mayores que  $\Sigma(0)_{crit}$ , solo se obtiene un conjunto infinito de cuartetos de polos complejos simples. Para las interacciones lorentzianas, existe también un valor crítico por encima del cual dejan de existir los polos imaginarios puros. Sin embargo, para esta familia de reguladores, el número total de polos es siempre finito.

Utilizando las ecuaciones (2.51) y (2.52), se obtienen las expresiones del valor crítico de la masa dinámica del quark para momento nulo  $\Sigma(0)_{crit}$  para el regulador gaussiano

$$\Sigma(0)_{crit}^{(G)} = m + \frac{1}{2} (\sqrt{m^2 + 2\Lambda^2} - m) e^{-(\sqrt{m^2 + 2\Lambda^2} + m)^2 / 4\Lambda^2}, \quad (5.3)$$

y para el regulador lorentziano

$$\Sigma(0)_{crit}^{(L)} = m + \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{4m^2 + 5\Lambda^2} + 2m}{5\Lambda} \right)^2 \right]^2 \left( \frac{\sqrt{4m^2 + 5\Lambda^2} - 3m}{5} \right), \quad (5.4)$$

que determinan el punto de separación entre la situación de quarks confinados y quarks libres. Llamaremos  $m_{crit}$  al valor de la masa desnuda del quark que origina, junto a los demás parámetros del modelo, una masa dinámica crítica  $\Sigma(0)_{crit}$ .

El modelo no local que estamos considerando incluye cinco parámetros libres: las masas desnudas de los quarks  $m_u$  y  $m_s$ , las constantes de acoplamiento  $G$  y  $H$ , y el *cut-off* covariante  $\Lambda$ . En nuestros cálculos fijamos un valor de  $m_u$ , determinándose los cuatro restantes parámetros de forma tal que el modelo reproduzca los valores experimentales de las masas  $m_\pi$  del pión y  $m_K$  del kaón, la constante de decaimiento  $f_\pi$  del pión, y alguna magnitud relacionada con el sistema  $\eta - \eta'$ : la masa  $m_{\eta'}$  de  $\eta'$  o el ángulo de mezcla  $\theta_\eta$  de  $\eta$ . En el caso del regulador gaussiano, encontramos que para valores de  $m_u$  por encima de  $m_{crit} \simeq 8,3$  MeV, los propagadores del quark  $u$  y  $d$  tienen solo polos complejos en el espacio de Minkowski, lo que puede interpretarse como una clase de confinamiento [10]. Por el contrario, para  $m_u \lesssim m_{crit}$  tienen por lo menos un doblete de polos imaginarios puros en el espacio euclídeo (polos reales en el espacio de Minkowski). En el caso del regulador lorentziano, esto mismo sucede para  $m_{crit} \simeq 3,9$  MeV.

Los resultados numéricos obtenidos se muestran en los cuadros 5.1 y 5.2. En ambos cuadros los parámetros del modelo fueron ajustados para reproducir los valores empíricos de la masa del pión  $m_\pi = 139$  MeV, la masa del kaón  $m_K = 495$  MeV, y la constante de decaimiento del pión  $f_\pi = 93,3$  MeV. En el cuadro 5.1 los parámetros fueron ajustados además para reproducir el valor empírico de la masa  $m_{\eta'} = 958$  MeV, mientras que en el cuadro 5.2 los parámetros fueron determinados requiriendo un ángulo de mezcla  $\theta_\eta = -10^\circ$ . En los cuadros se presentan los resultados numéricos correspondientes a los reguladores gaussiano y lorentziano, considerando en cada caso valores de la masa  $m_u$  por encima y por debajo de  $m_{crit}$ . También se incluyen, en caso de que estén disponibles, los valores empíricos de las magnitudes listadas.

Como fue establecido en el capítulo 3, las masas de los mesones fueron obtenidas resolviendo las ecuaciones

$$G_P(-m_P^2) = 0, \quad (5.5)$$

Magnitud	Gaussiana		Lorentziana		Empíricos
$m_u$ [MeV]	8,5	7,5	4,0	3,5	(3,4-7,4)
$m_s$ [MeV]	223	199	112	100	(108-209)
$\Lambda$ [MeV]	709	768	1013	1110	
$G\Lambda^2$	10,99	10,43	14,68	14,05	
$-H\Lambda^5$	295,3	305,1	743,4	821,0	
$-\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ [MeV]	211	220	275	288	
$-\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ [MeV]	186	204	297	314	
$\Sigma_u(0)$ [MeV]	313	295	300	281	
$\Sigma_s(0)$ [MeV]	649	607	562	518	
$m_\pi$ [MeV]	139*	139*	139*	139*	139
$m_K$ [MeV]	495*	495*	495*	495*	495
$m_\eta$ [MeV]	517	522	543	545	547
$m_{\eta'}$ [MeV]	958*	958*	958*	958*	958
$\theta_\eta$ [grados]	4,65	5,32	7,69	8,00	-(10-20)
$\theta_{\eta'}$ [grados]	-50,1		-48,4		
$G_{\pi q}$	3,28	3,09	3,13	2,94	
$G_{Kq}$	3,47	3,21	3,05	2,80	
$G_{\eta q}$	3,07	2,83	2,74	2,49	
$G_{\eta' q}$	1,62		1,36		
$f_\pi$ [MeV]	93,3*	93,3*	93,3*	93,3*	93,3
$f_K/f_\pi$	1,29	1,29	1,25	1,25	1,22
$f_\eta^8/f_\pi$	1,29	1,30	1,29	1,28	(1,17-1,22)
$f_\eta^0/f_\pi$	0,05	0,02	-0,05	-0,05	(0,11-0,37)
$f_{\eta'}^8/f_\pi$	-0,32		-0,26		-(0,42-0,46)
$f_{\eta'}^0/f_\pi$	1,27		1,63		(0,98-1,16)

Cuadro 5.1: Resultados numéricos para las masas efectivas de los quarks, sus condensados, las masas de los mesones pseudoescalares, sus constantes de decaimiento, los ángulos de mezcla del sistema  $\eta - \eta'$  y las constantes de acoplamiento quark-mesón. Se tomó como dato la masa del quark liviano  $m_u$ , y los parámetros  $m_s$ ,  $\Lambda$ ,  $G$  y  $H$  se eligieron de forma tal que reproduzcan los valores empíricos de las masas del pión, del kaón y de  $\eta'$ , y la constante de decaimiento del pión (marcados con \*).

Magnitud	Gaussiana		Lorentziana		Empíricos
$m_u$ [MeV]	8,5	7,5	4,0	3,5	(3,4-7,4)
$m_s$ [MeV]	223	200	109	98	(108-209)
$\Lambda$ [MeV]	709	768	1013	1110	
$G\Lambda^2$	12,79	12,33	18,13	17,67	
$-H\Lambda^5$	216,6	215,4	467,4	487,5	
$-\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ [MeV]	211	220	275	288	
$-\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ [MeV]	191	210	314	334	
$\Sigma_u(0)$ [MeV]	313	295	300	281	
$\Sigma_s(0)$ [MeV]	698	661	652	614	
$m_\pi$ [MeV]	139*	139*	139*	139*	139
$m_K$ [MeV]	495*	495*	495*	495*	495
$m_\eta$ [MeV]	463	467	482	484	547
$m_{\eta'}$ [MeV]	754	741	721	704	958
$\theta_\eta$ [grados]	-10*	-10*	-10*	-10*	-(10-20)
$\theta_{\eta'}$ [grados]	-46,5		-45,7		
$G_{\pi q}$	3,28	3,09	3,13	2,94	
$G_{Kq}$	3,65	3,41	3,37	3,13	
$G_{\eta q}$	2,86	2,66	2,61	2,40	
$G_{\eta' q}$	2,88		2,74		
$f_\pi$ [MeV]	93,3*	93,3*	93,3*	93,3*	93,3
$f_K/f_\pi$	1,31	1,32	1,30	1,31	1,22
$f_\eta^8/f_\pi$	1,13	1,13	1,13	1,12	(1,17-1,22)
$f_\eta^0/f_\pi$	0,32	0,30	0,30	0,29	(0,11-0,37)
$f_{\eta'}^8/f_\pi$	-0,78		-0,81		-(0,42-0,46)
$f_{\eta'}^0/f_\pi$	1,11		1,14		(0,98-1,16)

Cuadro 5.2: Similar al cuadro 5.1, pero ahora los parámetros ajustan al ángulo de mezcla de  $\eta$ , en vez de la masa de  $\eta'$ .

para  $P = \pi, K, \eta$  y  $\eta'$ . Para realizar el correspondiente cálculo numérico, hay que lidiar con las funciones  $C_{ij}(p^2)$  evaluadas en el momento euclídeo  $p^2 = -m_P^2$ . Estas funciones, definidas en (3.36), incluyen integrales que necesitan ser tratadas con sumo cuidado cuando la masa del mesón excede un cierto valor  $m_P > 2s_i$ , donde  $s_i$  es la parte imaginaria, en el espacio euclídeo, del primer polo del propagador. En la práctica, esto sólo sucede en el caso del mesón  $\eta'$ , y físicamente esto corresponde a que la masa del mesón se encuentra más allá de un pseudoumbra de decaimiento en un estado quark-antiquark. Un análisis detallado de este asunto se encuentra en el apéndice A. En particular, se observa que para  $m_u > m_{crit}$ , es decir, en el caso que el propagador no tenga polos imaginarios puros, estas integrales pueden ser regularizadas de forma tal que sus partes imaginarias se anulan, y consecuentemente el ancho de  $\eta'$  correspondiente a este decaimiento sin sentido físico es cero. Por el contrario, para  $m_u < m_{crit}$  el ancho es en general distinto de cero, y la presencia de una parte imaginaria implica que la condición  $G_{\eta'}(-m_{\eta'}^2) = 0$  no puede ser satisfecha. De todos modos, es posible aún definir la masa de  $\eta'$  buscando el mínimo de  $|G_{\eta'}(-p_0^2)|$ . Esta situación se muestra en la figura 5.1, donde se grafica el valor absoluto de las funciones  $G_P(-p_0^2)$  en el caso del regulador gaussiano, con  $m_u = 7,5$  MeV y  $m_u = 8,5$  MeV (panel superior e inferior, respectivamente). Las curvas corresponden a los conjuntos de parámetros del cuadro 5.1, elegidos para obtener el valor empírico  $m_{\eta'} = 958$  MeV. Para  $m_u = 8,5$  MeV ( $m_u > m_{crit}$ , panel inferior), el pseudoumbra  $\bar{u}u$  es alcanzado cerca de 1 GeV, por encima de la masa de  $\eta'$ , y entonces la integral está bien definida y  $G_{\eta'}(-m_{\eta'}^2) = 0$ . Esto mismo sucede para los conjuntos de parámetros con  $m_u = 8,5$  MeV y  $m_u = 4,0$  MeV del cuadro 5.2, correspondientes a reguladores gaussiano y lorentziano, respectivamente. Por otro lado, para  $m_u = 7,5$  MeV ( $m_u < m_{crit}$ , panel superior), el pseudoumbra  $\bar{u}u$  se alcanza cerca de los 750 MeV, bien por debajo de la masa de  $\eta'$ . Como dijimos, en este caso se puede definir  $m_{\eta'}$  buscando el mínimo de la función  $|G_{\eta'}(-p_0^2)|$ , que esté representada por la curva de puntos y guiones. Aunque diferente de cero, este ancho no físico de  $\eta'$  es relativamente pequeño, y el mínimo, que cae en  $p_0 = 958$  MeV, está cerca del eje horizontal en la escala elegida de  $\text{GeV}^2$ . Por lo tanto, no esperamos que los resultados estén afectados por efectos de confinamiento no contemplados en el modelo. De cualquier modo, creemos que para  $m_u < m_{crit}$  los valores de los parámetros físicos relacionados con el decaimiento de  $\eta'$  no son confiables, y por lo tanto no han sido incluidos en los cuadros. Una situación parecida se presenta para los conjuntos de parámetros con  $m_u = 7,5$  MeV en el cuadro 5.2, y aquellos con  $m_u = 3,5$  MeV en los cuadros 5.1 y 5.2 (estos últimos correspondientes a un regulador lorentziano). Finalmente, para el conjunto de parámetros con  $m_u = 4,0$  MeV en el cuadro 5.1, a pesar que  $m_u > m_{crit}$  (sin polos imaginarios puros) el pseudoumbra  $\bar{u}u$  se encuentra por debajo de la masa de  $\eta'$ . En este caso, para evaluar las integrales  $C_{ij}$  seguimos el procedimiento de regularización descrito en el apéndice A, en el cual las partes imaginarias de estas integrales se anulan. El mismo procedimiento se aplica al cálculo de las integrales  $f_{ij}$  definidas en (3.60), utilizadas para obtener las constantes de decaimiento de los mesones. Como sucede con las masas, se regularizan estas integrales cuando  $m_P > 2s_i$ , hecho que se da solamente para la  $\eta'$ .

Examinando los cuadros 5.1 y 5.2 puede verse que, para los valores elegidos de  $m_u$ , los resultados para los condensados  $\langle \bar{u}u \rangle$  y  $\langle \bar{s}s \rangle$ , y para las masas dinámicas de los quarks  $\Sigma_u(0)$  y  $\Sigma_s(0)$ , son similares a los valores obtenidos

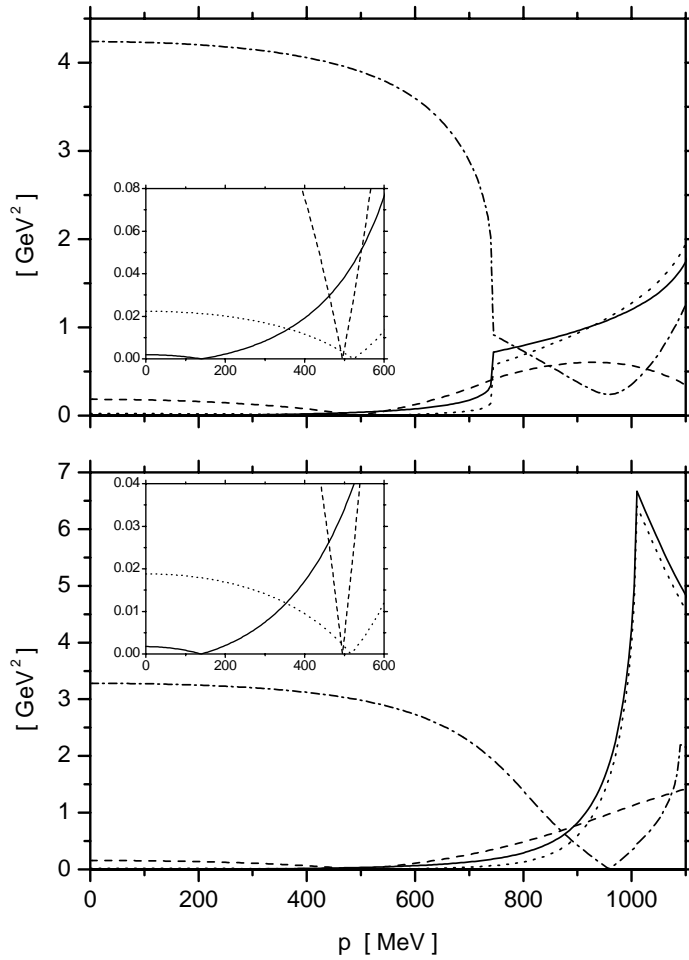


Figura 5.1: Valores absolutos de las inversas de los propagadores de los mesones, como funciones del momento. La línea de trazo continuo corresponde a  $G_\pi$ , la línea de guiones a  $10 G_K$ , la línea de puntos a  $G_\eta$  y la línea de puntos y guiones a  $10 G_{\eta'}$ . El panel superior corresponde a  $m_u = 7,5$  MeV y el inferior a  $m_u = 8,5$  MeV. En ambos casos, las ventanas insertadas muestran un detalle de la región de bajos momentos, donde se dan los ceros para el pión, el kaón y  $\eta$ .



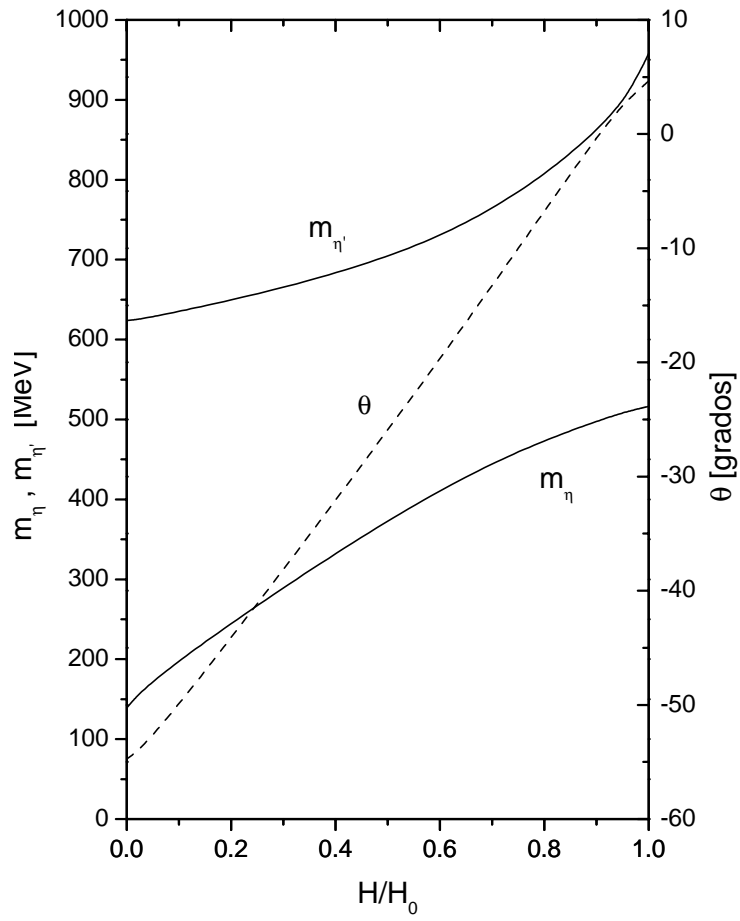


Figura 5.2: Dependencia funcional de las masas de  $\eta$  y  $\eta'$  y del ángulo de mezcla  $\theta_\eta$ , con respecto a  $H/H_0$ , donde  $H_0$  es el valor de  $H$  que ajusta a  $m_{\eta'} = 958$  MeV.

en la mayoría de los modelos efectivos [4, 5, 11, 36]. La diferencia más notoria entre los resultados correspondientes a ambos reguladores se encuentra en los valores de las masas desnudas de los quarks y los condensados. Para el regulador gaussiano, los parámetros  $m_u$  y  $m_s$  se encuentran cerca de 8 MeV y 200 MeV respectivamente, mientras que para el regulador lorentziano, los valores son de aproximadamente 4 MeV y 100 MeV. Por el contrario, los condensados de quarks son mayores en el caso del regulador lorentziano. De todas formas, los resultados para ambos reguladores están dentro de los rangos fenomenológicamente permitidos.

Los valores obtenidos para las constantes de decaimiento del kaón y de  $\eta$  son también fenomenológicamente aceptables. En particular, el valor obtenido para el cociente  $f_K/f_\pi$  es significativamente mejor que el obtenido en el modelo NJL standard, donde las constantes de decaimiento del kaón y de  $\eta$  son aproximadamente iguales [4, 5, 11], en contraste con la evidencia experimental. Por otro lado, la parte más débil del modelo parece estar conectada con el sector  $\eta-\eta'$ . Los resultados de los cuadros 5.1 y 5.2 muestran que si los parámetros del modelo son ajustados para reproducir las masas empíricas de  $\eta$  y  $\eta'$ , entonces se obtiene un ángulo de mezcla  $\theta_\eta$  positivo de unos pocos grados, lejos de la mayoría de los análisis fenomenológicos [37] y de los cálculos en el modelo NJL standard, que sugieren un valor de  $\theta_\eta$  entre  $-10^\circ$  y  $-20^\circ$ . De hecho, un ángulo de mezcla de  $-10^\circ$  puede obtenerse en nuestro trabajo básicamente bajando el valor de  $|H|$ , pero a costa de obtener valores demasiado bajos de  $m_\eta$  y  $m_{\eta'}$ , como se muestra en el cuadro 5.2. Esta situación se ilustra en la figura 5.2, donde se grafican los valores de las masas de  $\eta$  y  $\eta'$  junto al ángulo de mezcla  $\theta_\eta$ , como funciones del parámetro  $H$ .

Cabe mencionar que los valores elegidos de  $m_u$  no pueden estar muy lejos de los valores considerados en los cuadros 5.1 y 5.2. Para valores más altos de  $m_u$  se obtienen valores demasiado bajos de los condensados, mientras que para valores más bajos de  $m_u$ , la masa de  $\eta'$  se coloca muy lejos del pseudumbrales  $\bar{u}u$ . Esto se traduce en un ancho grande de  $\eta'$ , sin sentido físico, teniendo que considerar efectos de confinamiento.

Finalmente, aunque el modelo parece tener dificultades para reproducir los ángulos de mezcla del sector  $\eta-\eta'$ , sus constantes de decaimiento están en razonable acuerdo con los experimentos. Esto puede ser mejorado incluyendo nuevos ingredientes en el modelo, tales como la presencia de interacciones vectoriales y axiales.

## 5.2. Resultados para temperatura y potencial químico finitos. Diagrama de fases quiral

Habiendo introducido en el capítulo 4 el formalismo necesario para trabajar a temperatura y potencial químico finitos, mostraremos los resultados numéricos obtenidos utilizando el regulador gaussiano, definido en (5.1). Dada la experiencia obtenida en ausencia de grados de libertad de extrañeza [12], es de esperar que los resultados para el regulador lorentziano (5.2) sean cualitativamente similares. Consideramos dos conjuntos de parámetros, uno con  $m_u = 8,5$  MeV por encima de  $m_{crit}$ , que llamaremos set A, y el otro con  $m_u = 7,5$  MeV, por debajo de ella, que llamaremos set B. Ambos conjuntos reproducen numéri-

camente los valores empíricos de las masas del pión, del kaón, de  $\eta'$ , y de la constante de decaimiento del pión, y están detallados en el cuadro 5.1. El set A corresponde al caso de polos complejos simples del propagador, que se traduce en una situación de confinamiento de los quarks, y por lo tanto podemos llamarlo set confinante. El set B corresponde al caso de polos imaginarios puros del propagador, en el espacio euclídeo, es decir las partículas pueden existir en forma aislada, y podemos llamarlo set no confinante.

El comportamiento de las masas dinámicas a momento nulo  $\Sigma_u(0)$  y  $\Sigma_s(0)$  como función de la temperatura y del potencial químico puede obtenerse resolviendo las ecuaciones del gap (3.26), (4.30) y (4.31) a  $T$  y  $\mu$  finitas. Para obtener el condensado de quarks  $\langle \bar{u}u \rangle$  y  $\langle \bar{s}s \rangle$  para  $T$  y  $\mu$  finitas se resuelve las ecuaciones (4.55), (4.56) y (4.57), y la densidad de quarks  $\rho_u$  y  $\rho_s$  se obtienen a partir de la ecuación (4.62). En las figuras 5.3, 5.4 y 5.5 se muestran los resultados numéricos obtenidos para las masas dinámicas, los condensados y las densidades, respectivamente, como función del potencial químico  $\mu$ , para algunos valores fijos de temperatura  $T$ . El valor de  $\rho_q$  está dado con respecto a la densidad de materia nuclear,  $\rho_0 \simeq 1,3 \cdot 10^6 \text{ MeV}^3$ . Los paneles de la izquierda corresponden al set A, mientras que los de la derecha corresponden al set B. Para ambos conjuntos de parámetros se observa la existencia de algún tipo de transición de fase en cierto valor del potencial químico, el cual depende de la temperatura. La masa de los quarks *up* y *down*  $\Sigma_u(0)$  presenta una discontinuidad en un cierto valor crítico de  $\mu$  para bajas temperaturas, pero si se incrementa la temperatura se obtiene una curva continua y siempre decreciente. En el caso de la masa del *strange*  $\Sigma_s(0)$ , presenta este mismo comportamiento para valores críticos de  $\mu$  bastante mayores, pero sufre un efecto de “arrastre” en el  $\mu$  donde se produce la transición del quark *u* y *d*. Esto mismo se observa en las gráficas del condensado y la densidad de los tres quarks, y es debido a la presencia del término de 't Hooft que introduce la mezcla de sabores.

Para obtener estos resultados utilizando las expresiones antes mencionadas, en las sumas sobre los polos del propagador se incluyeron sólo los primeros polos más cercanos al origen del plano de momentos. Para el rango de  $T$  y  $\mu$  utilizado en los cálculos, se verificó que la convergencia es tan rápida que alcanza tomar solamente el primer polo para obtener casi el 100% del valor total obtenido con varios polos más. Por lo tanto, el comportamiento de las magnitudes físicas relevantes en la zona de transición de fase está básicamente dominado por el primer conjunto de polos del propagador, ya sea un doblete o un cuarteto según el caso.

Se observa que a  $T = 0$  hay una transición de fase de primer orden para ambos conjuntos de parámetros, caracterizada por una discontinuidad en la gráfica. Si la temperatura aumenta, el valor del potencial químico en el cual se produce esta transición disminuye. Finalmente, por encima de un cierto valor de temperatura la transición de primer orden desaparece, dando lugar a una transición suave. Este fenómeno se representa claramente en la figura 5.6, donde la línea continua muestra la temperatura crítica en que se produce la transición de primer orden en función del potencial químico, y la línea de puntos muestra donde se produce la transición de segundo orden. El punto en el cual la transición de primer orden deja de existir se suele denominar “punto final”. En nuestros cálculos este punto se localiza en  $(T_F, \mu_F) = (62 \text{ MeV}, 196 \text{ MeV})$  para el set A, y en  $(T_F, \mu_F) = (58 \text{ MeV}, 203 \text{ MeV})$  para el set B. Estos valores son bastante similares para ambos conjuntos de parámetros, similares también a los

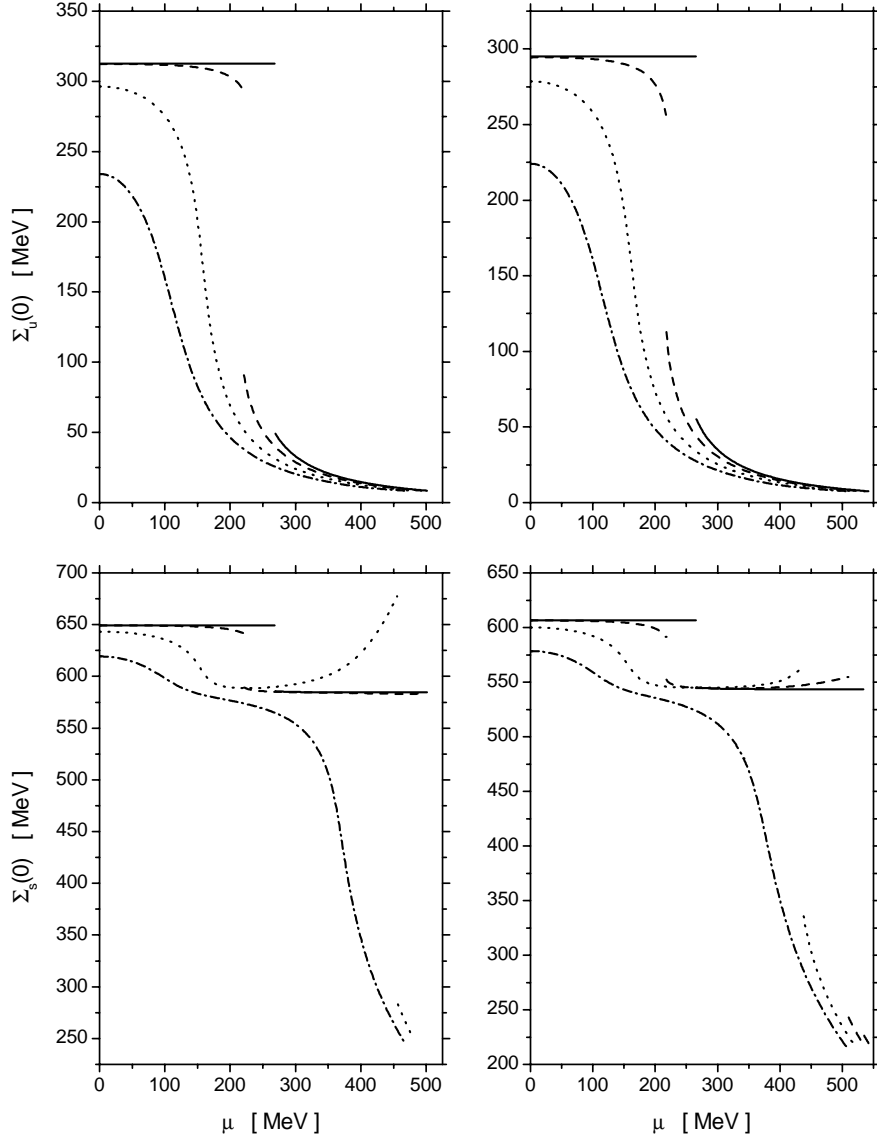


Figura 5.3: Comportamiento de la masa dinámica a momento nulo del quark *up* y *down* (gráficos superiores) y del quark *strange* (gráficos inferiores) con el potencial químico, para cuatro valores representativos de la temperatura. Las líneas continuas corresponden a  $T = 0$  MeV, las líneas de guiones a  $T = 50$  MeV, las líneas de puntos a  $T = 80$  MeV, y las líneas de puntos y guiones a  $T = 100$  MeV. Los paneles de la izquierda muestran los resultados para el set A, mientras que los de la derecha para el set B.

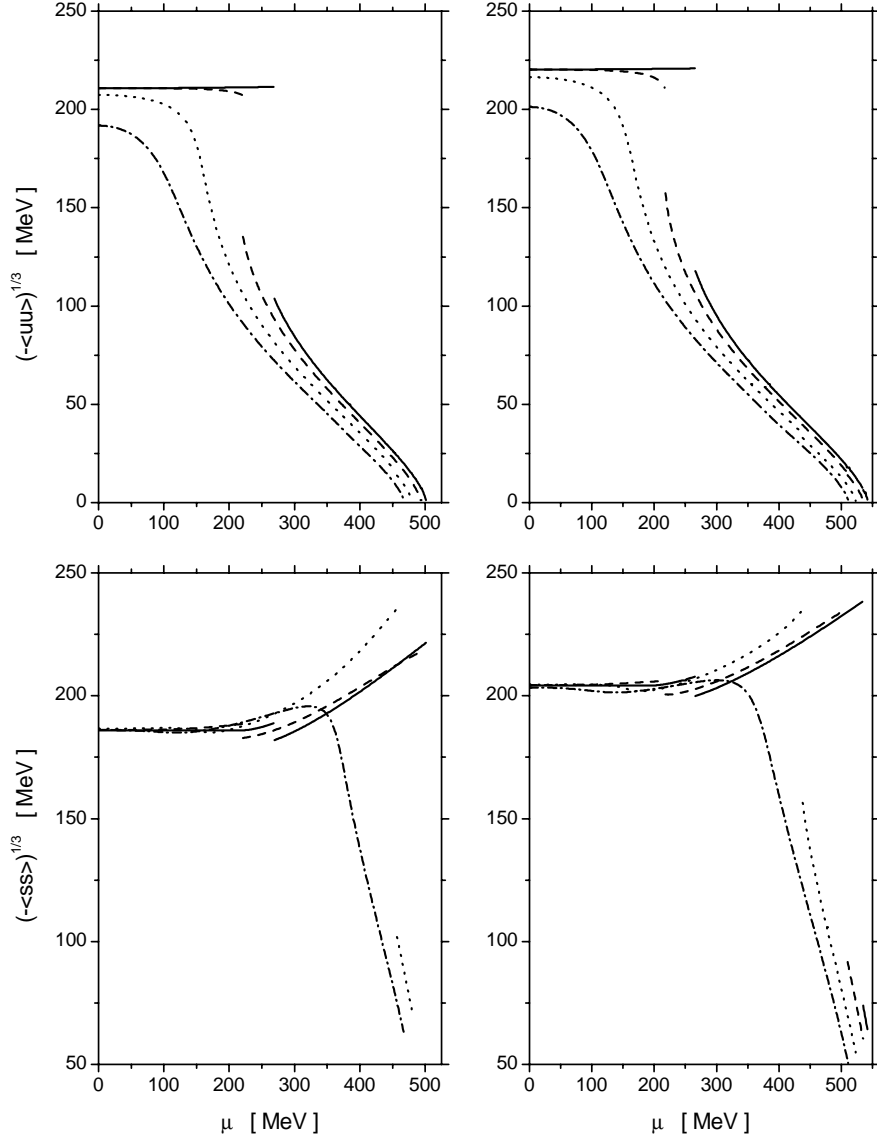


Figura 5.4: Comportamiento del condensado del quark *up* y *down* (gráficos superiores) y del quark *strange* (gráficos inferiores) con el potencial químico, para cuatro valores representativos de la temperatura. Las líneas continuas corresponden a  $T = 0$  MeV, las líneas de guiones a  $T = 50$  MeV, las líneas de puntos a  $T = 80$  MeV, y las líneas de puntos y guiones a  $T = 100$  MeV. Los paneles de la izquierda muestran los resultados para el set A, mientras que los de la derecha para el set B.

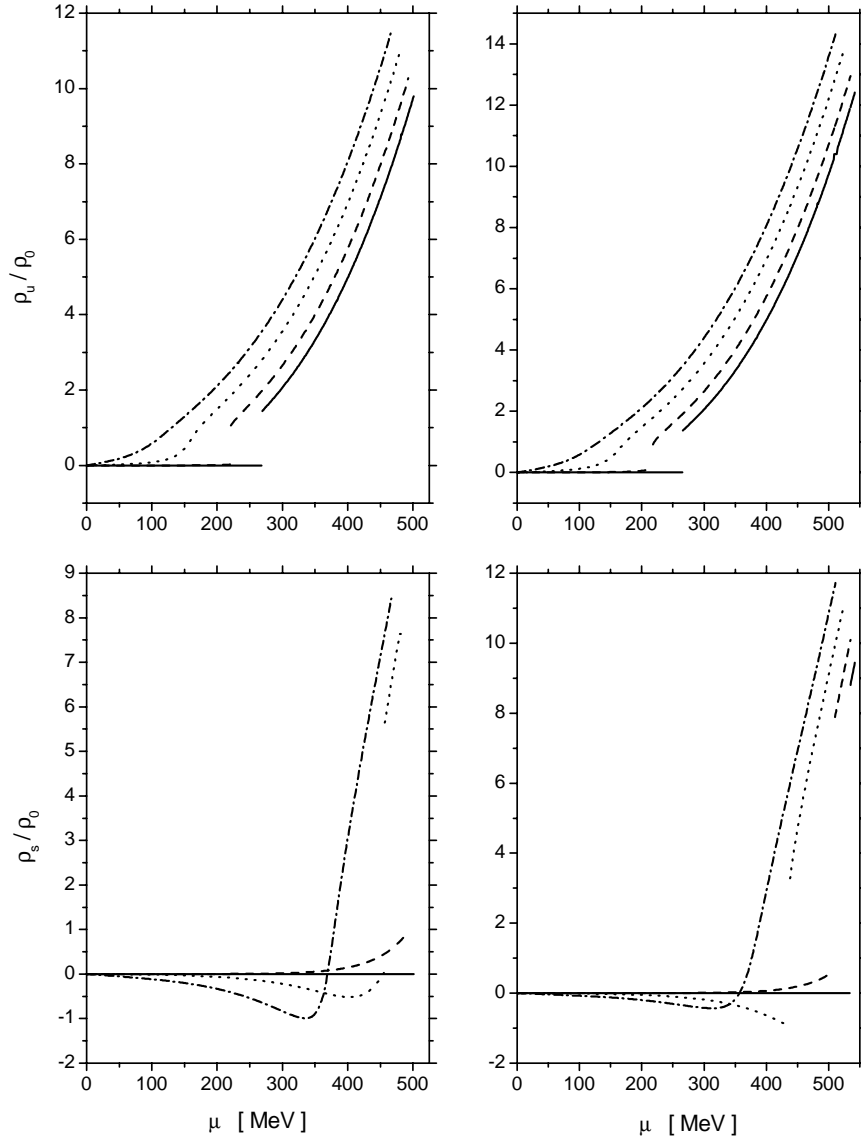


Figura 5.5: Comportamiento de la densidad del quark *up* y *down* (gráficos superiores) y del quark *strange* (gráficos inferiores) con el potencial químico, para cuatro valores representativos de la temperatura. Las líneas continuas corresponden a  $T = 0$  MeV, las líneas de guiones a  $T = 50$  MeV, las líneas de puntos a  $T = 80$  MeV, y las líneas de puntos y guiones a  $T = 100$  MeV. Los paneles de la izquierda muestran los resultados para el set A, mientras que los de la derecha para el set B. Los valores están dados con respecto a la densidad de materia nuclear  $\rho_0$ .

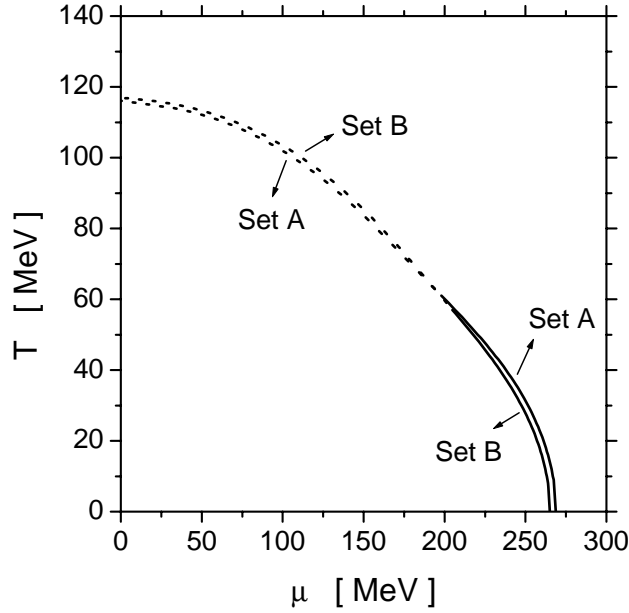


Figura 5.6: Temperaturas críticas en función del potencial químico. La línea continua corresponde a la región donde ocurre la transición de fase de primer orden, mientras que la línea punteada corresponde a la región de transición de fase de segundo orden.

obtenidos para  $SU(2)$  [12], y un poco menores a los valores encontrados en otros trabajos [38, 39]. El valor obtenido para la temperatura crítica a  $\mu = 0$  es de  $T_c = 116$  MeV para el set A, y de  $T_c = 117$  MeV para el set B, ambos por debajo del valor que predicen las simulaciones de QCD en red [40], que sugieren  $T_c \simeq 140 - 190$  MeV. También es interesante notar que el modelo NJL en su versión local predice valores de  $T_c$  apenas mayores, del orden  $T_c \simeq 120 - 150$  MeV. Esto se debe a la presencia del regulador en nuestras ecuaciones, que causa una caída mucho más rápida en los integrandos con la temperatura, que entra en las expresiones a través de las frecuencias de Matsubara. Una corrección al modelo sería permitir una dependencia de los parámetros con la temperatura y el potencial químico. Finalmente, el valor obtenido de  $\mu$  crítico para  $T = 0$  es de  $\mu_c = 269$  MeV para el set A, y de  $\mu_c = 265$  MeV para el set B.

En general, para temperaturas por debajo del punto final hay un rango de valores de  $\mu$  donde existen dos o tres soluciones de las ecuaciones del gap, es decir, hay dos o tres valores de la autoenergía donde el potencial termodinámico tiene un mínimo local. En estos casos, el punto de equilibrio corresponde al mínimo absoluto. En temperaturas cercanas al punto final, estos mínimos locales se aproximan unos a otros y el potencial termodinámico entre ellos es aproximadamente constante. Para temperaturas por encima del punto final, existe un sólo mínimo y por lo tanto la transición de fase es suave. El potencial termodinámico  $\Omega$  es calculado con las expresiones (4.45) y (4.47). Por encima del punto final, para encontrar el potencial químico donde se produce la transición

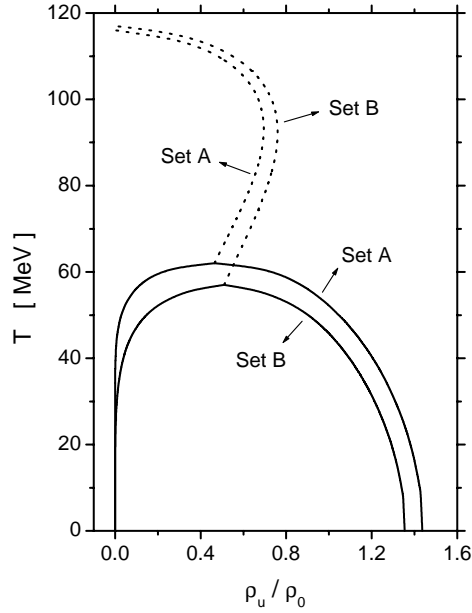


Figura 5.7: Temperaturas críticas en función de la densidad relativa de quarks para el set A y B. El diagrama corresponde al quark *up* y *down*. Las intersecciones de las curvas indican los puntos finales, y las líneas punteadas indican la transición de fase de segundo orden.

de fase de segundo orden, para una dada temperatura, se busca el máximo de la susceptibilidad magnética mediante la ecuación (4.67).

En la figura 5.7 se muestra el comportamiento de las temperaturas críticas con la densidad de quarks *up* y *down*, es decir, el diagrama de fases  $T$ - $\rho$  para el set confinante y no confinante. Para el rango de valores considerado, la densidad de quark *strange* es prácticamente nula. Las intersecciones de las líneas continuas y punteadas indican el punto final para cada conjunto de parámetros. Estos corresponden a  $\rho_u^f/\rho_0 = 0,46$  para el set A, y  $\rho_u^f/\rho_0 = 0,52$  para el set B. El área debajo de cada curva es una región donde ambas fases son permitidas. Esta zona de fase mixta puede ser interpretada como una región donde gotas conteniendo quarks “corrientes” coexisten con un gas de quarks “constituyentes”. Las líneas punteadas corresponden a la transición de fase de segundo orden.

Todos estos resultados fueron obtenidos utilizando el conjunto de parámetros que ajustan, entre otras cosas, a la masa de  $\eta'$ . Realizamos los mismos cálculos con el otro conjunto de parámetros, que fitea el ángulo de mezcla de  $\eta$ , y obtuvimos resultados muy semejantes, sin variaciones en el diagrama de fases.



## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo se estudió las propiedades hadrónicas y del vacío utilizando un modelo quiral de quarks de tres sabores con interacciones no locales y separables en el espacio de momentos. El modelo incorpora la interacción de ruptura de la simetría  $U(1)_A$ , debida a la anomalía axial. Se consideró los casos en que el propagador de los quarks tiene polos a energías reales en el espacio de Minkowski, como así también el caso en que aparecen sólo polos complejos, lo cual es interpretado como una realización de confinamiento de los quarks. Primeramente se estudió el modelo a temperatura y densidad nulas. Se obtuvieron las masas de los mesones pseudoescalares y sus constantes de decaimiento mediante dos diferentes reguladores no locales, uno gaussiano y otro lorentziano. En particular, el resultado obtenido para el cociente  $f_K/f_\pi$  resulta ser significativamente mejor que el obtenido en el modelo NJL standard, donde las constantes de decaimiento del pión y del kaón resultan ser aproximadamente iguales, en contraste con la evidencia experimental. Por otro lado, la mayor debilidad del modelo resulta estar conectada con el sector  $\eta - \eta'$ , donde encontramos dificultades para obtener simultáneamente buenos valores de las masas y de los parámetros de decaimiento. De todos modos, aunque el modelo parece tener problemas para reproducir los ángulos de mezcla de  $\eta$  y  $\eta'$ , las constantes de decaimiento se encuentran en razonable acuerdo con los valores experimentales. Esta situación puede ser mejorada incluyendo nuevos ingredientes en el modelo, como la presencia de interacciones vectoriales y axiales.

En la extensión del modelo a temperatura y potencial químico finitos, se ha asumido que los parámetros del modelo no dependen de  $T$  y  $\mu$ . Encontramos que, pese a que los propagadores fermiónicos tienen en general un gran número de polos en el plano complejo, el primer polo del propagador es el que juega un papel de central importancia en la determinación de las transiciones de fase. Utilizando un regulador gaussiano, encontramos un diagrama de fases similar para el caso de un conjunto de parámetros confinante, y otro no confinante. En particular, se obtuvo que para tres sabores de quarks la transición es de primer orden para valores bajos de la temperatura, y la transición se vuelve suave o de segundo orden al superar un cierto “punto final”. Nuestros resultados para la posición de este punto son muy similares para ambos sets, cercanos a  $(T_F, \mu_F) \simeq (60 \text{ MeV}, 200 \text{ MeV})$ , semejantes a los obtenidos en ausencia de grados de libertad de extrañeza [12], pero ligeramente menores que los valores de las referencias [38, 39]. Además, nuestro modelo predice una temperatura crítica

$T_c$  a  $\mu = 0$  de alrededor de 116 MeV, algo menor que los valores obtenidos en las recientes simulaciones de QCD en red. También se verificó que el diagrama de fases no cambia si se utilizan los parámetros que ajustan a  $m_{\eta'}$  o los que ajustan a  $\theta_\eta$ .

En un futuro, sería interesante poder calcular las propiedades de los mesones a temperatura y potencial químico finitos. Por otro lado, trabajos recientes sugieren que la estructura de fases de QCD puede ser mucho más rica que lo que anteriormente se pensaba [41]. En particular, ha sido propuesto que a bajas temperaturas y altas densidades puede existir un condensado de pares de Cooper que rompe espontáneamente la simetría de color y da lugar a la llamada “superconductividad del color”. En este sentido, sería interesante agregar interacciones en el canal quark-quark para estudiar esta posibilidad.

## Apéndice A

# Cálculo de las integrales de lazo para mesones

En este apéndice describimos algunos detalles relativos al cálculo de las integrales  $C_{ij}(p^2)$  definidas en (3.36). En el modelo quiral no local analizado en este trabajo, todos los cuadrimomentos están definidos en el espacio euclídeo. Sin embargo, para determinar las masas de los mesones, el momento externo  $p$  en las integrales tiene que extenderse al espacio de Minkowski. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos elegir  $p = (i p_0, \vec{0})$ , y usar la invariancia rotacional del momento espacial para escribir las integrales en la forma

$$C_{ij}(-p_0^2) = \int dq_3 dq_4 q_3^2 \frac{F_{ij}(q_3, q_4, p_0)}{[(q^+)^2 + \Sigma_i^2(q^+)][(q^-)^2 + \Sigma_j^2(q^-)]}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $q_3 = |\vec{q}|$ . La forma explícita de  $F_{ij}(q_3, q_4, p_0)$ , que depende del mesón que estemos considerando, puede obtenerse fácilmente comparando las ecuaciones (A.1) y (3.36). En principio, la integración en (A.1) tiene que ser realizada sobre el semiplano  $q_3 \in [0, \infty)$ ,  $q_4 \in (-\infty, \infty)$ . Para valores suficientemente pequeños de  $p_0$ , el denominador no se anula en ningún punto de la región de integración. Sin embargo, cuando  $p_0$  aumenta, puede suceder que alguno de los polos del integrando “pinche” la región de integración, haciendo la integral divergente. En ese caso, hay que encontrar una manera de redefinir la integral para obtener un resultado finito. En la práctica, necesitamos extender el cálculo de las integrales  $C_{ij}(-p_0^2)$  para valores relativamente grandes de  $p_0$ , cuando tratamos de determinar las masas de  $\eta$  y  $\eta'$ . Para estas partículas, hay que trabajar con integrales en las cuales  $i = j$ , por lo que nos restringiremos a este caso y eliminaremos los índices  $i, j$  de ahora en más.

Comencemos analizando los ceros del denominador en el integrando de la ecuación (A.1). Este denominador puede escribirse como  $D = D^+ D^-$ , donde

$$D^\pm = (q^\pm)^2 + \Sigma^2(q^\pm). \quad (\text{A.2})$$

Se observa que los ceros de  $D$  están estrechamente relacionados con los polos del propagador del quark

$$S(q) = \frac{1}{-\not{q} + \Sigma(q)}. \quad (\text{A.3})$$

De aquí en más asumiremos que el regulador es tal que el propagador tiene un conjunto numerable de polos en el plano complejo  $q$ , y que no hay cortes. No es difícil ver que estos polos aparecen en multipletes que pueden ser caracterizados por dos números reales  $(s_r^\nu, s_i^\nu)$ , con  $s_r^\nu \geq 0$ ,  $s_i^\nu > 0$ . El índice  $\nu$  es un número natural que ha sido introducido para enumerar los multipletes, con la convención que  $\nu$  aumenta cuando aumenta  $s_i^\nu$ . Es conveniente distinguir entre dos situaciones diferentes:

- a) hay algunos polos imaginarios puros, es decir, hay uno o más  $\nu$  para el cual  $s_r^\nu = 0$ ;
- b) no existen polos imaginarios puros, es decir,  $s_r^\nu > 0$  para todo  $\nu$ .

Puede demostrarse que los polos imaginarios puros aparecen como dobletes localizados en el momento euclídeo  $(\sqrt{q^2})^\nu = \pm i s_i^\nu$ , mientras que los polos complejos aparecen en cuartetos localizados en  $(\sqrt{q^2})^\nu = s_r^\nu \pm i s_i^\nu$  y  $(\sqrt{q^2})^\nu = -s_r^\nu \pm i s_i^\nu$ . Cuando nos referimos a polos complejos, estamos indicando que la parte real y la parte imaginaria son distintas de cero. Claramente, el número y la posición de los polos depende de la forma específica del regulador. Para la interacción gaussiana, pueden darse tres situaciones diferentes. Para valores de  $\Sigma(0)$  por debajo de un cierto valor crítico  $\Sigma(0)_{crit}$ , aparecen dos pares de polos imaginarios puros simples y un conjunto infinito de cuartetos de polos complejos simples. Es posible mostrar que, en este caso, uno de los dobletes imaginarios puros es el multiplete que tiene la parte imaginaria más chica ( $\nu = 1$ , según nuestra convención). Para  $\Sigma(0) = \Sigma(0)_{crit}$ , los dos pares de polos imaginarios puros simples se transforman en un doblete de polos dobles con  $s_r = 0$ , mientras que para  $\Sigma(0) > \Sigma(0)_{crit}$  sólo se obtiene un conjunto infinito de cuartetos de polos complejos simples. En el caso de la interacción lorentziana, hay también un valor crítico por encima del cual dejan de existir polos imaginarios puros de bajo momento. Sin embargo, para esta familia de reguladores el número total de polos es siempre finito.

Como mencionamos, para un momento externo  $p_0$  suficientemente pequeño, el integrando de (A.1) no diverge en toda la región de integración. Cuando  $p_0$  aumenta, el primer conjunto de polos que encontrará es el que tiene el menor valor de  $s_i$ , que llamamos  $(\sqrt{q^2})^{\nu=1}$ . En el cálculo de las propiedades de los mesones mencionadas en el capítulo 3, trabajamos con momentos externos relativamente bajos, por lo tanto el efecto de polos altos nunca es observado. Entonces, para simplificar la discusión, consideraremos de aquí en más sólo el primer multiplete, desechando el índice  $\nu$ . La extensión a los casos en que otros conjuntos de polos comienzan a ser relevantes será comentada brevemente al final de este apéndice.

El denominador  $D$  se anula cuando  $D^+ = 0$  y/o  $D^- = 0$ , es decir, cuando

$$(q^+)^2 = q_3^2 + q_4^2 - \frac{p_0^2}{4} + i q_4 p_0 = s_r^2 - s_i^2 \pm 2 i s_r s_i \quad (\text{A.4})$$

y/o

$$(q^-)^2 = q_3^2 + q_4^2 - \frac{p_0^2}{4} - i q_4 p_0 = s_r^2 - s_i^2 \pm 2 i s_r s_i. \quad (\text{A.5})$$

Resolviendo estas ecuaciones para  $q_4$  se obtiene en general ocho soluciones dife-

rentes. Cuatro de ellas están dadas por

$$q_4^{(3,1)} = -\frac{s_r s_i}{\gamma(q_3, s_r, s_i)} + i \left( \pm \gamma(q_3, s_r, s_i) - \frac{p_0}{2} \right), \quad (\text{A.6})$$

$$q_4^{(4,2)} = -\frac{s_r s_i}{\gamma(q_3, s_r, s_i)} + i \left( \pm \gamma(q_3, s_r, s_i) + \frac{p_0}{2} \right), \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\gamma(q_3, s_r, s_i) = \sqrt{\frac{q_3^2 + s_i^2 - s_r^2 + \sqrt{q_3^4 + 2q_3^2(s_i^2 - s_r^2) + (s_i^2 + s_r^2)^2}}{2}}, \quad (\text{A.8})$$

y las otras cuatro soluciones son

$$q_4^{(i)'} = -\text{Re}(q_4^{(i)}) + i \text{Im}(q_4^{(i)}), \quad (\text{A.9})$$

con  $i = 1, \dots, 4$ . En las ecuaciones (A.6) y (A.7),  $q_4^{(3,1)}$  corresponden a los ceros de  $D^+$  y  $q_4^{(4,2)}$  a los de  $D^-$ , mientras que una correspondencia similar se aplica a  $q_4^{(i)'}$ . Para polos imaginarios puros se tiene que  $s_r = 0$ , y quedan sólo cuatro soluciones independientes.

Si  $p_0$  es relativamente pequeño, la distribución de los polos en el plano complejo  $q_4$  está representada en la figura A.1. La parte izquierda de la figura corresponde al caso (a), en el cual los polos del primer multiplete son imaginarios puros, mientras que la parte derecha corresponde al caso (b), en que los polos son complejos. En ambas figuras los puntos indican los ceros de  $D^+$  y los cuadrados los ceros de  $D^-$ . Se observa que para valores pequeños de  $p_0$  la mitad de los polos están ubicados debajo del eje real ( $q_4^{(1)}$  para el caso (a) y  $q_4^{(1)}$  y  $q_4^{(1)'}$  para el caso (b)), mientras que la otra mitad se encuentra por encima de él ( $q_4^{(3)}$  para el caso (a) y  $q_4^{(3)}$  y  $q_4^{(3)'}$  para el caso (b)). Algo similar sucede para los polos de  $D^-$ . Pero si  $p_0$  aumenta, los polos se mueven en la dirección indicada por las flechas. Para un cierto valor de  $p_0$ , los polos  $q_4^{(2)}$  y  $q_4^{(3)}$  se encuentran en el eje real  $q_4$  (obviamente lo mismo sucede con  $q_4^{(2)'}$  y  $q_4^{(3)'}$  para el caso (b)), “pinchando” la región de integración de la integral sobre  $(q_3, q_4)$  en la ecuación (A.1). Este sitio se denomina “punto de pinchadura” en el plano  $(q_3, q_4)$ , que denotamos con  $(q_3^p, q_4^p)$ , y está dado por la solución de  $\text{Im}[q_4^{(2)}] = \text{Im}[q_4^{(3)}] = 0$ :

$$(q_3^p, q_4^p) = \left( \frac{\sqrt{(p_0^2 - 4s_i^2)(p_0^2 + 4s_r^2)}}{2p_0}, \pm \frac{2s_r s_i}{p_0} \right). \quad (\text{A.10})$$

Se observa que para  $p_0 < 2s_i$  no hay punto de pinchadura (en realidad toma un valor complejo de  $q_3$ , fuera de la región de integración), mientras que para  $p_0 \geq 2s_i$  aparecen uno o dos puntos de pinchadura, dependiendo de si  $s_r = 0$  (caso (a)) o  $s_r \neq 0$  (caso (b)). Por lo tanto, para  $p_0 > 2s_i$  la integral en (A.1) está mal definida.

Para encontrar un procedimiento de regularización apropiado, analicemos una situación sencilla en que el problema puede ser resuelto en el espacio de Minkowski a través de la receta usual de las “ $i\epsilon$ ” ???. Consideremos la integral de lazo que aparece en el modelo NJL usual con *cut-off* de momento espacial

$$I_2(-p_0^2) = 2i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int^{\Lambda_3} \frac{d^4 q_M}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q_M^+)^2 - m^2 + i\epsilon][(q_M^-)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \quad (\text{A.11})$$

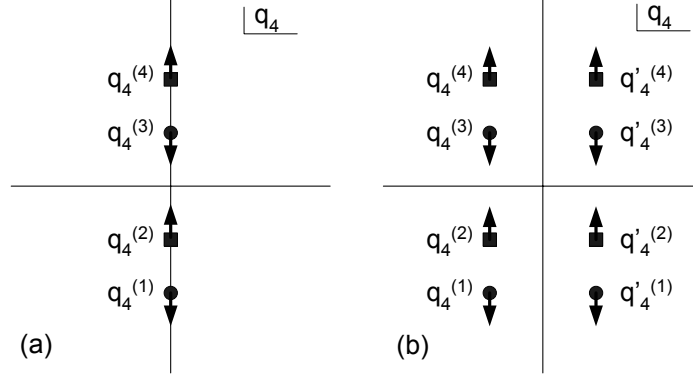


Figura A.1: Distribución esquemática en el plano complejo  $q_4$  de los polos correspondientes al conjunto con  $s_i$  más bajo, para: a)  $\Sigma(0) < \Sigma(0)_{crit}$ ; b)  $\Sigma(0) > \Sigma(0)_{crit}$ . En ambos casos los puntos indican los polos de  $D^+$  y los cuadrados los polos de  $D^-$ . Estas distribuciones corresponden a un valor de  $p_0 > 2s_i$ . Las flechas indican la dirección de movimiento de los polos cuando  $p_0$  aumenta.

donde agregamos el subíndice  $M$  para denotar que aquí el momento está definido en el espacio de Minkowski. Para valores de  $p_0$  suficientemente pequeños, aún en el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , la integral es convergente y no se necesita ninguna regularización. Entonces se puede realizar simplemente la rotación de Wick  $p_4 = ip_0$  y tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$  antes de realizar la integración. Por este camino se obtiene

$$I_2(p_4^2) = -2 \int^{\Lambda_3} \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q_E^+)^2 + m^2][(q_E^-)^2 + m^2]}, \quad (\text{A.12})$$

que es una integral del tipo dado en (A.1). Se observa que los polos de los propagadores son tales que esta situación pertenece al caso (a), con  $s_i = m$ . Para  $p_0 > 2m$ , la mencionada transformación del espacio de Minkowski al euclídeo no puede hacerse, ya que algunos polos pasan por el contorno de integración. La cuestión es si el resultado de la integral minkowskiana (A.11) bien definida puede ser recuperado partiendo de la integral euclídea (A.12), que está mal definida para  $p_0 > 2m$  debido a la presencia de un punto de pinchadura en  $(q_3^p, q_4^p) = (\sqrt{p_0^2/4 - m^2}, 0)$ . No es difícil probar que la respuesta es afirmativa, siempre que el contorno de integración  $q_4$  y las posiciones de los polos sean convenientemente modificados. El procedimiento requiere que se introduzcan dos pequeños parámetros,  $\epsilon$  y  $\delta$ , y se tomen los límites  $\delta \rightarrow 0^+$ ,  $\epsilon \rightarrow 0^+$  al final del cálculo. El parámetro  $\epsilon$  es usado para saltar los polos de  $D^+$  y  $D^-$ , mientras que  $\delta$  es usado para dividir el intervalo de integración  $q_3$  en tres subintervalos: la primera región corresponde a  $q_3 > q_3^p + \delta$ , la segunda a  $q_3^p - \delta < q_3 < q_3^p + \delta$  y la tercera a  $q_3 < q_3^p - \delta$ . Para cada región  $q_3$  definimos un contorno de integración  $q_4$  diferente, como se muestra en la figura A.2 (en la segunda región, a la derecha de la figura, se introduce además una constante arbitraria  $\kappa > 1$ ). En la primera y tercera región, el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$  puede tomarse antes de realizar la integración. Estas dos regiones  $q_3$  dan la contribución total de la parte real del resultado.

Por ejemplo, como es bien conocido en la formulación minkowskiana de las “ $i\epsilon$ ”, cambiar el signo de  $\epsilon$  no afecta a la parte real del resultado, pero cambia el signo de la parte imaginaria.

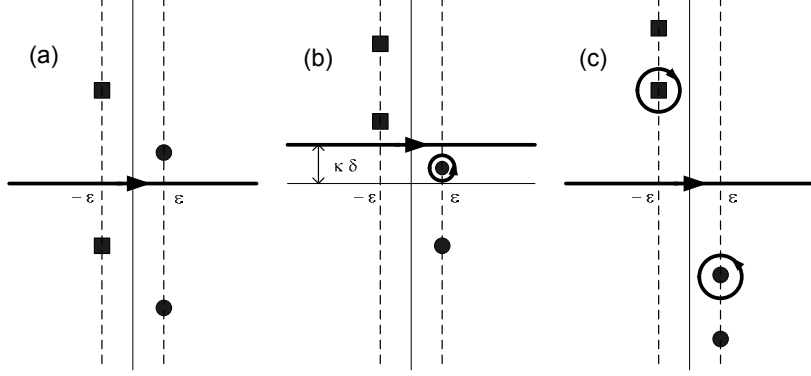


Figura A.2: Caminos de integración en el plano complejo  $q_4$  para: a)  $q_3 > \sqrt{p_0^2/4 - m^2} + \delta$ ; b)  $\sqrt{p_0^2/4 - m^2} - \delta < q_3 < \sqrt{p_0^2/4 - m^2} + \delta$ ; c)  $q_3 < \sqrt{p_0^2/4 - m^2} - \delta$ . La constante  $\kappa$  es un número real arbitrario que satisface  $\kappa > 1$ .

La receta descrita puede ser ahora aplicada para regularizar cualquier integral de la forma dada en (A.1), en la cual  $p_0 > 2s_i$ . Consideremos primero el caso (a), para el cual el conjunto de polos más bajos tiene  $s_r = 0$  y el punto de pinchadura está localizado en  $(q_3^p, q_4^p) = (\sqrt{p_0^2/4 - s_i^2}, 0)$ . Si definimos  $C^{(a)}(-p_0^2)$  a la integral de la forma dada en (A.1) en la que contribuye un sólo conjunto de polos imaginarios puros, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ C^{(a)}(-p_0^2) \right] &= \\ & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left\{ R^{(a)}(-p_0^2, \delta) \right. \\ & \quad + \int_0^{q_3^p - \delta} dq_3 \int_{-\infty}^{\infty} dq_4 \frac{q_3^2 F(q_3, q_4, p_0)}{[(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)] [(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)]} \\ & \quad \left. + \int_{q_3^p + \delta}^{\infty} dq_3 \int_{-\infty}^{\infty} dq_4 \frac{q_3^2 F(q_3, q_4, p_0)}{[(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)] [(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)]} \right\} \quad (\text{A.13}) \\ \text{Im} \left[ C^{(a)}(-p_0^2) \right] &= -\frac{\pi^2}{2p_0} \frac{q_3^p F(q_3^p, 0, p_0)}{\left[ 1 + \frac{\partial \Sigma^2(q)}{\partial q^2} \Big|_{q^2 = -s_i^2} \right]^2}. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Aquí  $R^{(a)}(-p_0^2, \delta)$  es la denominada “contribución del residuo”, responsable de la cancelación de las divergencias que aparecen en la integral en (A.13) en el

límite  $\delta \rightarrow 0^+$ . Su expresión explícita es

$$\begin{aligned}
R^{(a)}(-p_0^2, \delta) = & \\
& - \pi \int_0^{q_3^p - \delta} \frac{dq_3}{\sqrt{q_3^2 + s_i^2}} \left[ \frac{q_3^2 F(q_3, q_4, p_0)}{\left[1 + \frac{\partial \Sigma^2(q^-)}{\partial (q^-)^2}\right] [(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)]} \Bigg|_{q_4=q_4^{(2)}} \right. \\
& \left. - \frac{q_3^2 F(q_3, q_4, p_0)}{\left[1 + \frac{\partial \Sigma^2(q^+)}{\partial (q^+)^2}\right] [(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)]} \Bigg|_{q_4=q_4^{(3)}} \right]. \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

Para el caso (b) tenemos que extender el análisis anterior a la situación en que los polos son complejos en el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . En este caso hay una ambigüedad en cómo extender la receta de las “ $i\epsilon$ ” al espacio de Minkowski. Seguiremos la sugerencia hecha en la referencia [43], en la cual signos opuestos de  $\epsilon$  son usados para cada polo y su conjugado hermitico (ambos definidos en el espacio de Minkowski). En el espacio euclídeo, esto corresponde a elegir signos opuestos de  $\epsilon$  para los conjuntos  $p_4^{(i)}$  y  $p_4^{(i)'}$ . No es difícil ver que con esta receta las contribuciones de la parte imaginaria de la integral provenientes de ambos conjuntos de polos se cancelan mutuamente. De esta manera, si definimos  $C^{(b)}(-p_0^2)$  a la integral del tipo dado en (A.1) en la cual contribuye sólo un conjunto de polos complejos, se obtiene

$$\text{Im} \left[ C^{(b)}(-p_0^2) \right] = 0. \quad (\text{A.16})$$

Para la parte real se obtiene una expresión similar a la ecuación (A.13), reemplazando  $R^{(a)}(-p_0^2, \delta)$  por  $R^{(b)}(-p_0^2, \delta)$ , con

$$\begin{aligned}
R^{(b)}(-p_0^2, \delta) = & \\
& - 2\pi \int_0^{q_3^p - \delta} dq_3 \text{Im} \left[ \frac{q_3^2 F(q_3, q_4, p_0)}{\left[1 + \frac{\partial \Sigma^2(q^-)}{\partial (q^-)^2}\right] [(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)](q_4 - i \frac{p_0}{2})} \Bigg|_{q_4=q_4^{(2)}} \right. \\
& \left. - \frac{q_3^2 F(q_3, q_4, p_0)}{\left[1 + \frac{\partial \Sigma^2(q^+)}{\partial (q^+)^2}\right] [(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)](q_4 + i \frac{p_0}{2})} \Bigg|_{q_4=q_4^{(3)}} \right]. \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Este mismo procedimiento se ha utilizado para resolver numéricamente las integrales  $f_{ij}$  definidas en (3.60), que presentan el mismo denominador que las  $C_{ij}$  y por consiguiente la misma estructura de polos y puntos de pinchadura. Los pasos a seguir son exactamente los mismos, simplemente redefiniendo la función  $F(q_3, q_4, p_0)$ .

En principio, la extensión del presente análisis al caso en que más conjuntos de polos son tenidos en cuenta, es bastante directa. Sin embargo, hay que tener cierto cuidado si se tiene más de un conjunto de polos imaginarios puros, ya que en ese caso pueden aparecer polos dobles para  $p_0 > s_i^1 + s_i^2$ .

El método para tratar divergencias presentado en este apéndice puede ser extendido a casos más complicados, como por ejemplo los que se encuentran en los cálculos del tipo Schwinger-Dyson [36, 44]. Finalmente, aunque nuestra receta tiene algunas similitudes con la utilizada en la referencia [10], el proceso



de regularización no es exactamente el mismo. En la integral sobre  $(q_3, q_4)$  que aparece en (A.13), la región excluida alrededor del punto de pinchadura es una franja de tamaño infinito en la dirección  $q_4$  y de tamaño  $2\delta$  en la dirección  $q_3$ , en contraposición con la región circular de radio  $\delta$  utilizada en la referencia [10]. Esto lleva a algunas diferencias menores en los valores numéricos de las integrales regularizadas.

## Apéndice B

# Cálculo de los polos del propagador del quark

En este apéndice se realiza un estudio general de la posición de los polos del propagador. Esto es necesario para el cálculo de las integrales  $C_{ij}(p^2)$  cuyo procedimiento de regularización se describe en el apéndice A, y para extender el formalismo utilizado en este modelo al caso de temperatura y densidad finitas, descrito en el capítulo 4. En ambos casos, se intenta buscar los ceros de la expresión

$$q^2 + \Sigma^2(q^2) = 0, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\Sigma(q^2)$  es la masa dinámica del quark definida por

$$\Sigma(q^2) = m + \bar{\sigma} r^2(q^2), \quad (\text{B.2})$$

siendo  $r(q^2)$  el regulador no local del modelo. Si adimensionalizamos la ecuación (B.1), nos queda

$$\omega^2 + [\gamma + (\beta - \gamma) r^2(\omega^2)]^2 = 0, \quad (\text{B.3})$$

con  $\omega = q/\Lambda$ ,  $\gamma = m/\Lambda$  y  $\beta = (m + \bar{\sigma})/\Lambda$ . Si consideramos el límite quiral, es decir,  $\gamma = 0$ , entonces obtenemos

$$\omega^2 + \beta^2 r^4(\omega^2) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Como las masas desnudas de los quarks que intervienen en este modelo son relativamente pequeñas, podemos concentrarnos en buscar los ceros  $\omega_p = \omega_r + i\omega_i$  en el límite quiral, y luego obtener los correspondientes ceros de la ecuación (B.3) en el límite no quiral mediante algún método iterativo, tomando como valor inicial cada uno de los  $\omega_p$ . Analizaremos por separado los casos en que utilizemos un regulador no local gaussiano o lorentziano.

### B.1. Interacción gaussiana

Utilizando un regulador gaussiano de la forma

$$r(\omega^2) = e^{-\omega^2/2}, \quad (\text{B.5})$$

la ecuación (B.4) nos queda

$$\omega^2 + \beta^2 e^{-2\omega^2} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Si pasamos a coordenadas polares, es decir reemplazamos  $\omega = \rho e^{i\phi}$ , y luego igualamos la parte real y la parte imaginaria de la ecuación anterior, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\tan 2\phi = -\tan(2\rho^2 \sin 2\phi), \quad (\text{B.7})$$

$$\beta^2 = -\frac{\cos 2\phi}{\cos(2\rho^2 \sin 2\phi)} \rho^2 e^{2\rho^2 \cos 2\phi}. \quad (\text{B.8})$$

La ecuación (B.7) tiene soluciones triviales para  $\phi = n\pi/2$ , con  $n$  un número entero, es decir,  $\omega_r = 0$ . En este caso, la ecuación (B.8) queda

$$\beta^2 = -\cos(n\pi) \rho^2 e^{2\rho^2 \cos n\pi}. \quad (\text{B.9})$$

Como  $\beta$  y  $\rho$  son reales, no hay solución al problema si  $n$  es impar, sólo es posible el caso  $n$  par, lo que nos lleva a buscar las soluciones de

$$\beta = \rho e^{-\rho^2}. \quad (\text{B.10})$$

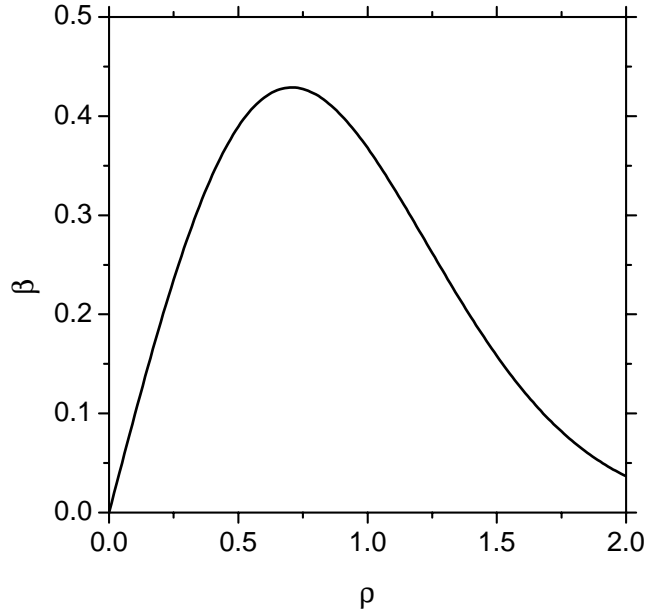


Figura B.1: Gráfica de la función  $\beta(\rho)$  definida en la ecuación (B.10) para un regulador gaussiano.

En la figura B.1 se muestra la forma de la función  $\beta(\rho)$  expresada en (B.10). Esta función tiene un máximo  $\beta_c = 1/\sqrt{2e}$  en  $\rho_0 = 1/\sqrt{2}$ . Entonces, para valores de  $\beta < \beta_c$  tenemos dos soluciones con  $\omega_r = 0$ , cada una de las cuales tiene asociada una solución extra ya que  $\phi$  puede ser  $\pi/2$  o  $3\pi/2$ .

Si asumimos que  $\phi \neq n\pi/2$ , buscamos otras soluciones de la ecuación (B.7), obteniendo

$$\rho^2 = \frac{(m+1)\pi - 2\phi}{2 \sin 2\phi}. \quad (\text{B.11})$$

Si reemplazamos en la ecuación (B.8) nos queda

$$\beta^2 = (-1)^m \frac{(m+1)\pi - 2\phi}{2 \sin 2\phi} e^{[(m+1)\pi - 2\phi] \cot 2\phi}. \quad (\text{B.12})$$

Por lo tanto, para  $\phi \neq n\pi/2$  las soluciones vienen en cuatripletas  $\pm\omega_r \pm i\omega_i$ , donde  $\omega_r, \omega_i > 0$ . Entonces, sólo necesitamos identificar las soluciones con  $0 < \phi < \pi/2$ . En este rango,

$$\frac{(m+1)\pi - 2\phi}{2 \sin 2\phi} > 0, \quad (\text{B.13})$$

para todo  $m$  entero tal que  $m \geq 0$ . Como  $\beta$  es real, entonces  $\beta^2 > 0$  y por consiguiente  $m$  no puede ser impar. Finalmente, tengo solución para  $m$  par y  $0 < \phi < \pi/2$ , de la forma

$$\beta = \sqrt{\frac{(m+1)\pi - 2\phi}{2 \sin 2\phi}} e^{\frac{1}{2}[(m+1)\pi - 2\phi] \cot 2\phi}. \quad (\text{B.14})$$

Resumiendo, si nos concentramos en el primer cuadrante, para  $\beta < \beta_c$  tenemos dos polos imaginarios puros para el caso trivial  $\phi = n\pi/2$ , más un conjunto infinito de polos complejos del caso  $\phi \neq n\pi/2$ . Para  $\beta = \beta_c$ , tendremos un sólo polo imaginario puro en lugar de los dos del caso anterior, más los polos complejos. Y para  $\beta > \beta_c$ , no hay polos imaginarios puros, sino solamente polos complejos.

## B.2. Interacción lorentziana

Si utilizamos un regulador lorentziano de la forma

$$r(\omega^2) = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad (\text{B.15})$$

la ecuación (B.4) nos queda

$$\omega^2 + \frac{\beta^2}{(1 + \omega^2)^4} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Realizamos un cambio de variable  $\omega = i\alpha^2$  y obtenemos

$$\beta^2 = (\alpha - \alpha^5)^4. \quad (\text{B.17})$$

Nuevamente pasamos a coordenadas polares:  $\omega = r e^{i\theta}$  y  $\alpha = \rho e^{i\phi}$ , obteniendo un sistema de dos ecuaciones, según dos casos posibles. Para el caso (a) tenemos

$$\rho \cos \phi - \rho^5 \cos 5\phi = \pm \sqrt{\beta}, \quad (\text{B.18})$$

$$\rho \sin \phi - \rho^5 \sin 5\phi = 0, \quad (\text{B.19})$$

y para el caso (b)

$$\rho \sin \phi - \rho^5 \sin 5\phi = \mp \sqrt{\beta}, \quad (\text{B.20})$$

$$\rho \cos \phi - \rho^5 \cos 5\phi = 0. \quad (\text{B.21})$$

Estas ecuaciones tienen soluciones triviales  $\phi = k\pi$  para el caso (a) y  $\phi = (2k+1)\pi/2$  para el caso (b), junto a  $\rho(1-\rho^4) = \pm\sqrt{\beta}$ . Podemos agrupar ambos casos en la solución trivial

$$\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (\text{B.22})$$

$$\beta = r(1-r^2)^2. \quad (\text{B.23})$$

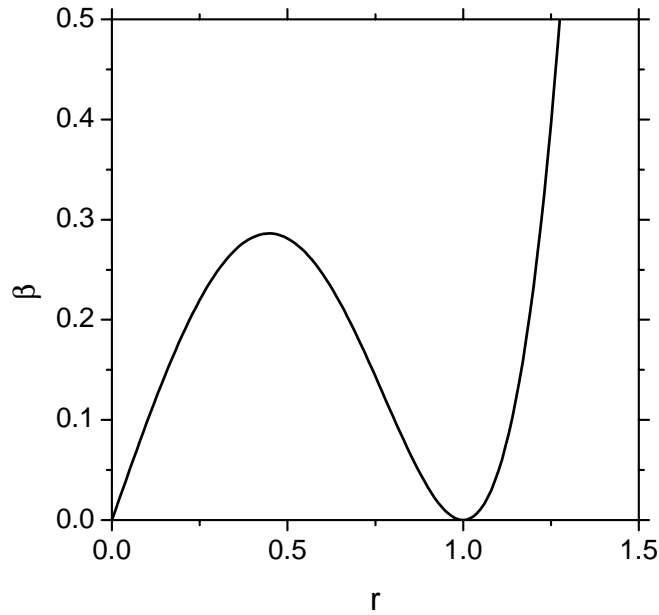


Figura B.2: Gráfica de la función  $\beta(r)$  definida en la ecuación (B.23) para un regulador lorentziano.

En la figura B.2 se muestra la forma de la función  $\beta(r)$  definida en (B.23). Esta función tiene un máximo  $\beta_c = 16/25\sqrt{5}$  en  $r_0 = 1/\sqrt{5}$  y un mínimo  $\beta_1 = 0$  en  $r_1 = 1$ . Entonces, para valores de  $\beta < \beta_c$  obtenemos tres soluciones con  $\omega_r = 0$ , cada una de las cuales tiene asociada una solución extra ya que, nuevamente,  $\phi$  puede ser  $\pi/2$  o  $3\pi/2$ . Dos de estas soluciones tienen módulo menor que 1, es decir, el polo imaginario puro se encuentra a una distancia al origen menor que el valor del *cut-off*, mientras que la otra solución se encuentra más lejos. Para  $\beta = \beta_c$  obtengo dos soluciones, y para  $\beta > \beta_c$  obtengo sólo la solución lejana.

Buscamos ahora soluciones no triviales, analizando cada caso por separado. Para el caso (a), despejando  $\rho$  de la ecuación (B.19) y reemplazando en (B.18) se obtiene

$$\beta^2 = \frac{\sin \phi \sin^4 4\phi}{\sin^5 5\phi}, \quad (\text{B.24})$$

que tiene una solución para  $\beta < \beta_c$ , y dos soluciones para  $\beta > \beta_c$ . Haciendo lo mismo para el caso (b), es decir, despejando  $\rho$  de la ecuación (B.21) y reemplazando en (B.20), se obtiene

$$\beta^2 = \frac{\cos \phi \sin^4 4\phi}{\cos^5 5\phi}. \quad (\text{B.25})$$

Ambos casos pueden agruparse en la solución general en el primer cuadrante

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\phi & \text{si } 0 < \phi < \frac{\pi}{4}, \\ 2\phi - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

y además

$$r = \sqrt{\frac{\sin \phi}{\sin 5\phi}}, \quad (\text{B.27})$$

con  $\phi$  solución de la ecuación (B.24). Esto significa que, para  $\beta \leq \beta_c$  aparece un polo complejo con  $2\pi/5 < \phi < \pi/2$  (junto a los otros tres polos del cuádruple), y para  $\beta > \beta_c$  aparece un segundo polo complejo, además del anterior, con  $0 < \phi < \pi/5$ .

## Apéndice C

# Relación entre los polos del propagador y de $\tilde{F}(z)$

Sean  $\omega_p = \omega_r + i\omega_i$  los polos de  $F(\omega)$  definida en (4.5), y sean  $z_p = z_r + iz_i$  los polos de  $\tilde{F}(z)$  definida tal que

$$\tilde{F}(z) = F(\sqrt{(z - \mu)^2 - q^2}) = F(i\omega). \quad (\text{C.1})$$

Por lo tanto, ambos polos estarán relacionados de la forma

$$\omega^2 = -(z - \mu)^2 + q^2, \quad (\text{C.2})$$

que es equivalente al sistema de dos ecuaciones

$$\omega_r^2 - \omega_i^2 = -(z_r - \mu)^2 + z_i^2 + q^2, \quad (\text{C.3})$$

$$\omega_r \omega_i = -(z_r - \mu) z_i. \quad (\text{C.4})$$

Recordemos que si  $\omega_p$  es un polo de  $F(\omega)$ , también lo son  $-\omega_p$ ,  $\omega_p^*$  y  $-\omega_p^*$ . Por lo tanto nos concentramos en  $\omega_r, \omega_i > 0$ . Si llamamos  $E = z_r - \mu$ , obtenemos utilizando la ecuación (C.4) las expresiones para  $z_p$

$$z_r = E + \mu, \quad (\text{C.5})$$

$$z_i = -\frac{\omega_r \omega_i}{E}. \quad (\text{C.6})$$

Reemplazando en la ecuación (C.3), queda

$$E^4 - (q^2 - \omega_r^2 + \omega_i^2) E^2 - \omega_r^2 \omega_i^2 = 0, \quad (\text{C.7})$$

de donde se obtiene

$$E^2 = \frac{q^2 - \omega_r^2 + \omega_i^2 + \sqrt{(q^2 - \omega_r^2 + \omega_i^2)^2 + 4\omega_r^2 \omega_i^2}}{2}. \quad (\text{C.8})$$

Descartamos la solución con signo negativo pues conduce a  $E^2 < 0$ , lo cual no es posible pues definimos  $E$  real. Si además elegimos  $E$  positivo, a través de la

definición (4.15) del capítulo 4, entonces el multiplete  $z_p$  está relacionado con el multiplete  $\omega_p$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega_r + i\omega_i, & z_1 &= E + \mu - i\frac{\omega_r\omega_i}{E}, \\
\omega_2 &= \omega_r - i\omega_i, & z_2 &= E + \mu + i\frac{\omega_r\omega_i}{E}, \\
\omega_3 &= -\omega_r + i\omega_i, & z_3 &= -E + \mu - i\frac{\omega_r\omega_i}{E}, \\
\omega_4 &= -\omega_r - i\omega_i, & z_4 &= -E + \mu + i\frac{\omega_r\omega_i}{E}.
\end{aligned}
\tag{C.9}$$



## Apéndice D

# Sumatoria sobre las frecuencias de Matsubara

En este apéndice deseamos evaluar una sumatoria infinita del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(i\omega_n), \quad (\text{D.1})$$

donde  $\tilde{F}(i\omega_n) = F(\sqrt{(i\omega_n - \mu)^2 - q^2})$  y la función  $F(\omega)$  está definida en (4.5), y  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  son las frecuencias discretas de Matsubara. Para ello definimos una función auxiliar de Fermi  $f(z)$  dada por

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{z/T}}, \quad (\text{D.2})$$

que tiene polos a lo largo del eje imaginario, dados por  $i\omega_n = i(2n + 1)\pi T$ , con  $n$  un número entero. Construimos la función  $\tilde{F}(z)f(z)$ , cuya estructura de polos consiste en los  $i\omega_n$  (los polos de la función de Fermi), más los polos propios de la función  $F(z)$ .

Si definimos un contorno  $C_1$  en el plano complejo tal que incluya todos los polos de la función  $\tilde{F}(z)f(z)$ , y otro contorno  $C_2$  tal que incluya los polos de  $f(z)$  pero deje afuera los polos de  $\tilde{F}(z)$ , podemos calcular la integral

$$\begin{aligned} & \oint_{C_1} dz \tilde{F}(z) f(z) \\ &= 2\pi i \sum \text{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z) f(z) \text{ dentro de } C_1] \\ &= 2\pi i \sum \text{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z) f(z) \text{ dentro de } C_2] \\ &\quad + 2\pi i \sum \text{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z) f(z) \text{ fuera de } C_2]. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Si hacemos tender  $C_1 \rightarrow \infty$  y suponemos que el integrando no diverge, entonces la integral debe valer cero. Por otro lado, cuando calculamos los residuos dentro de  $C_2$  en los polos de  $f(z)$ , es decir en  $z = i\omega_n$ , es posible sacar la función  $\tilde{F}(z)$  afuera. Entonces queda

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi i \sum \tilde{F}(i\omega_n) \text{res}[f(z), \text{ en } z = i\omega_n] \\ &\quad + 2\pi i \sum \text{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z)]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Calculamos los residuos del primer término

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}[f(z), \text{ en } z = i\omega_n] &= \lim_{z \rightarrow i\omega_n} f(z) (z - i\omega_n) \\
 &= \lim_{z \rightarrow i\omega_n} \frac{z - i\omega_n}{1 + e^{z/T}} \\
 &= \lim_{z \rightarrow i\omega_n} \frac{T}{e^{z/T}} = -T, \tag{D.5}
 \end{aligned}$$

y reemplazando en (D.4) obtenemos

$$0 = -2\pi iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(i\omega_n) + 2\pi i \sum \operatorname{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z)], \tag{D.6}$$

que nos lleva a la identidad

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(i\omega_n) = \sum \operatorname{res}[\tilde{F}(z) f(z), \text{ en polos de } \tilde{F}(z)], \tag{D.7}$$

que coincide con la expresión (4.8) del capítulo 4 que queríamos demostrar.

# Bibliografía

- [1] F. J. Ynduráin, *The theory of quark and gluon interactions* (Springer-Verlag, Heilderberg, 1999).
- [2] F. Karsch, Springer Lect. Notes Phys. **583**, 209 (2002).
- [3] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [4] U. Vogl y W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
- [5] S. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).
- [6] G. Ripka, *Quarks bound by chiral fields* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [7] T. Schafer y E. V. Schuryak, Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998).
- [8] E. Ruiz Arriola y L. L. Salcedo, Phys. Lett. B **450**, 225 (1999).
- [9] G. Ripka, Nucl. Phys. A **683**, 463 (2001); R. S. Plant y M. C. Birse, Nucl. Phys. A **703**, 717 (2002).
- [10] R. D. Bowler y M. C. Birse, Nucl. Phys. A **582**, 655 (1995); R. S. Plant y M. C. Birse, Nucl. Phys. A **628**, 607 (1998).
- [11] T. Hatsuda y T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, 221 (1994).
- [12] I. General, D. Gómez Dumm y N. N. Scoccola, Phys. Lett. B **506**, 267 (2001); D. Gómez Dumm y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **65**, 074021 (2002).
- [13] T. D. Lee, *Particle physics and introduction to field theory* (Harwood Ac. Press, Switzerland, 1981).
- [14] M. Gell-Mann, R. Oakes y B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
- [15] T. Hatsuda y T. Kunihiro, Progr. Theor. Phys. **74**, 765 (1985).
- [16] V. Bernard, Phys. Rev. D **34**, 1601 (1986).
- [17] T. Kunihiro y T. Hatsuda, Phys. Lett. B **206**, 385 (1988); **210**, 278(E) (1988); T. Hatsuda y T. Kunihiro, Z. Phys. C **51**, 49 (1991).
- [18] V. Bernard, R. L. Jaffe y U. G. Meissner, Phys. Lett. B **198**, 92 (1987); Nucl. Phys. B **308**, 753 (1988).

- [19] H. Reinhardt y R. Alkofer, Phys. Lett. B **207**, 482 (1988).
- [20] M. Takizawa, K. Tsushima, Y. Kohyama y K. Kubodera, Nucl. Phys. A **507**, 611 (1990).
- [21] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl y W. Weise, Nucl. Phys. A **516**, 429 (1990).
- [22] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976); Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976).
- [23] E. V. Shuryak, *The QCD vacuum, hadrons and superdense matter* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [24] B. W. Lee, *Chiral dynamics* (Gordon and Breach, New York, 1972).
- [25] S. Gottlieb *et al.*, Nucl. Phys. A **498**, 435c (1989).
- [26] J. B. Kogut, F. K. Sinclair y K. C. Wang, Phys. Lett. **263**, 101 (1991).
- [27] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino y E. Witten, *Current algebra and anomalies* (Princeton University Press, Princeton, 1985).
- [28] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz y Y. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
- [29] D. I. Dyakonov y V. Y. Petrov, Sov. Phys. JETP **62**, 204 (1985); Sov. Phys. JETP **62**, 431 (1985); Nucl. Phys. B **245**, 259 (1985); Nucl. Phys. B **272**, 457 (1986); D. I. Dyakonov, V. Y. Petrov y P. V. Pobylytsa, Nucl. Phys. B **306**, 809 (1988).
- [30] F. T. Hawes, C. D. Roberts y A. G. Williams, Phys. Rev. D **49**, 4683 (1994).
- [31] M. Stingl, Phys. Rev. D **34**, 3863 (1986); **36**, 651(E) (1987).
- [32] D. Blaschke, G. Bureau, Y. L. Kalinovsky, P. Maris y P. C. Tandy, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2267 (2001); B. Szczerbinska y W. Broniowski, Acta Phys. Pol. B **31**, 835 (2000).
- [33] J. W. Bos, J. H. Koch y H. W. L. Naus, Phys. Rev. C **44**, 485 (1991).
- [34] Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [35] J. I. Kapusta, *Finite-temperature field theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).
- [36] C. D. Roberts y A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994); C. D. Roberts y S. M. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, S1 (2000).
- [37] T. Feldmann, P. Kroll y B. Stech, Phys. Rev. D **58**, 114006 (1998); Phys. Lett. B **449**, 339 (1999).
- [38] J. Berges y K. Rajagopal, Nucl. Phys. B **538**, 215 (1999).
- [39] M. A. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov y J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. D **58**, 096007 (1998).
- [40] F. Karsch, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **83**, 14 (2000); A. Ali Khan *et al.*, Phys. Rev. D **63**, 034502 (2001).

- [41] M. Alford, K. Rajagopal y F. Wilczek, *Phys. Lett. B* **422**, 247 (1998); R. Rapp, T. Schäfer, E. Shuryak y M. Velkovsky, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 53 (1998).
- [42] C. Itzykson y J.-B. Zuber, *Quantum field theory* (Mc Graw Hill, Singapore, 1985).
- [43] R. E. Cutkosky, P. V. Landschoff, D. I. Olive y J. C. Polkinghorne, *Nucl. Phys. B* **12** 281 (1969).
- [44] M. S. Bhagwat, M. A. Pichowsky y P. C. Tandy, *Phys. Rev. D* **67**, 054019 (2003).