

DECAIMIENTOS DÉBILES NO LEPTÓNICOS EN EL
MODELO DE SKYRME

Andrea Judith García

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Junio 2001

TEMA: Decaimientos débiles no leptónicos en el modelo de Skyrme.

PALABRAS CLAVES: Decaimientos no leptónicos, hiperones, modelo de solitones topológicos.

ALUMNO: Andrea Judith García

L.U. N° = 425/90

LUGAR DE TRABAJO: Laboratorio Tandar, Departamento de Física

Centro Atómico Constituyentes

Comisión Nacional de Energía Atómica

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Norberto N. Scoccola

FECHA DE INICIACIÓN: Abril 2000

FECHA DE FINALIZACIÓN: Junio 2001

FECHA DE EXÁMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Director

Profesor de tesis de Licenciatura

Resumen

En el presente trabajo se han estudiado los decaimientos débiles no leptónicos de hiperones mediante el modelo de Skyrme de bariones. En este modelo se considera a los bariones como solitones topológicos quirales. Para describir las interacciones débiles se ha utilizado un lagrangiano quiral efectivo elegido de manera de reproducir las amplitudes experimentales correspondientes a los decaimientos kaónicos en 2π y 3π . Los resultados obtenidos muestran que si bien el modelo permite reproducir en forma adecuada las amplitudes de decaimiento experimentales de la onda S, existen serias dificultades en la onda P. Dichas amplitudes no concuerdan con las experimentales a pesar de haberse tenido en cuenta tanto las contribuciones de contacto como las de tipo polo.

ÍNDICE

<i>1-Introducción</i>	<i>1</i>
<i>2-Modelo de Skyrme</i>	<i>13</i>
<i>2.1- Surgimiento del modelo y su relación con QCD</i>	<i>13</i>
<i>2.2- El modelo de Skyrme para dos sabores</i>	<i>16</i>
<i>2.3- Simetrías y corrientes</i>	<i>18</i>
<i>2.4- Solitón topológico</i>	<i>20</i>
<i>2.5 -El Hedgehog</i>	<i>21</i>
<i>2.6- Cuantificación del solitón para dos sabores</i>	<i>23</i>
<i>2.7- Predicciones del modelo de dos sabores</i>	<i>27</i>
<i>2.7.1- Masas del nucleón y de la partícula Delta</i>	<i>27</i>
<i>2.7.2- Propiedades electromagnéticas</i>	<i>27</i>
<i>2.7.3- Acoplamiento axial</i>	<i>29</i>
<i>2.8 -Extensión del modelo a tres sabores</i>	<i>31</i>
<i>3-Decaimientos débiles no leptónicos de hiperones</i>	<i>39</i>
<i>3.1-El lagrangiano débil efectivo</i>	<i>39</i>
<i>3.2-Decaimientos no leptónicos en el modelo de Skyrme</i>	<i>42</i>
<i>3.3- Cálculo de la amplitud de la onda S</i>	<i>43</i>
<i>3.4- Cálculo de la amplitud de la onda P</i>	<i>46</i>
<i>3.4.1-Contribuciones de contacto</i>	<i>47</i>
<i>3.4.2-Contribuciones tipo polo</i>	<i>48</i>
<i>3.5-Contribución de las componentes no octetes</i>	<i>50</i>

<i>4-Resultados obtenidos</i>	53
<i>5-Conclusiones</i>	63
<i>Apéndice: Acción de Wess-Zumino y número de colores</i>	65
<i>Referencias</i>	69

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a mi director Norberto Scoccola por la excelente predisposición durante todo el tiempo de trabajo, tanto a la hora de contestar mis preguntas y solucionar mis problemas, como en el momento de aconsejarme en la bibliografía.

Agradezco a mis padres por su constante aliento y por haberme dado la posibilidad de estudiar.

Por último agradezco a Cristian, mi novio, quien además de haber estado a mi lado en todo momento alentándome, dedicó gran parte de su tiempo ayudándome con sus conocimientos sobre computación y programación.

1-INTRODUCCIÓN

Para comprender las dificultades asociadas con el estudio de los decaimientos débiles no leptónicos de los bariones con extrañeza, es conveniente comenzar con un breve resumen de la historia de las interacciones débiles.

El primer decaimiento débil conocido fue el de la partícula que hoy denominamos neutrón, $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}$. Éste fue descubierto por Henri Becquerel en 1896 cuando al poner en contacto cristales de uranio con una película fotográfica observó que ésta se manchaba.

En los años siguientes Becquerel, Kaufman y Rutherford mostraron que no sólo el uranio emite rayos cargados eléctricamente (radiación β) sino que otros materiales también. Estos rayos corresponden a electrones moviéndose con velocidades cercanas a la de la luz.

A partir de 1910, una vez que se estableció el concepto de estructura atómica como un núcleo y una nube electrónica moviéndose a su alrededor, se supuso que los electrones emitidos se encontraban en el núcleo antes de decaer. Sin embargo esto resultaba difícil de comprender ya que según el modelo atómico de Bohr los electrones debían moverse en órbitas fuera del núcleo. Al descubrirse el neutrón en 1932 resultó evidente que el electrón es creado en el instante en que el neutrón se transforma en protón, y de esta manera este problema quedó solucionado.

El siguiente problema surgió al analizar el espectro de energías producido por los electrones emitidos en el decaimiento β . Al ser éste un espectro continuo, mientras que tanto la energía inicial como la final del núcleo estaban bien definidas, no parecía ser posible que la energía fuese conservada en el proceso de decaimiento. La solución fue

hallada en 1930 por Pauli quien propuso la existencia de una nueva partícula que debía ser emitida junto con el electrón en el decaimiento neutrónico. Esta nueva partícula, que hoy conocemos como neutrino, se caracteriza por tener una masa pequeña y por no tener carga eléctrica. Además debido a que el protón, el electrón y el neutrón tienen espín $\frac{1}{2}$, la conservación de momento angular implica que el neutrino debe tener el mismo valor de espín. Al tener en cuenta la partícula propuesta por Pauli es posible entender la existencia de un espectro continuo de electrones, ya que la energía liberada en el decaimiento (al transformarse el neutrón en protón) se distribuye estadísticamente entre el neutrino y el electrón.

Finalmente en 1934 Fermi extendió la idea de Pauli a una teoría cuantitativa del decaimiento β , postulando que este proceso se podía explicar mediante un Hamiltoniano compuesto por la suma de los Hamiltonianos libres de cada una de las partículas intervinientes más un término de interacción. Siguiendo el ejemplo de electrodinámica cuántica (QED), Fermi propuso que el término de interacción fuera de la forma corriente-corriente. Dado que los neutrinos son no masivos y los electrones tienen masa pequeña en comparación con la energía cinética del decaimiento β , esta teoría debe ser formulada en forma relativista.

En general, hay dos tipos de transiciones permitidas, las llamadas de Fermi y las de Gamow-Teller. La diferencia entre ambas es que en las transiciones de Gamow-Teller el espín nuclear del núcleo que decae puede cambiar mientras que en las transiciones de Fermi no. Según las propiedades de transformación de los operadores de dos cuerpos involucrados en la interacción de cuatro cuerpos efectiva ésta puede contener producto de operadores

escalares (S) o vectoriales (V) para las primeras y tensoriales (T) o vectoriales axial (A) para las segundas.

Como ambas transiciones son observadas en la naturaleza, el Hamiltoniano de Fermi debe contener alguna combinación de estos acoplamientos (S-V y T-A). Sin embargo si ocurriesen simultáneamente acoplamientos S y V o si fuese T y A, el espectro de electrones mostraría oscilaciones. Como esto no es lo que se observa, sólo los acoplamientos S y T ó S y A ó V y T ó V y A deben ser tenidos en cuenta.

A partir de 1938 se fueron conociendo otras partículas que presentan decaimientos débiles. Algunos ejemplos de estos otros procesos posibles son:

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu/\bar{\nu}$$

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu/\bar{\nu}$$

$$K^{\pm} \rightarrow \pi^0 + \pi^{\pm}$$

$$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$$

Una consecuencia importante del estudio del decaimiento del kaón en dos piones o en tres piones fue la observación de que en éstos podía no conservarse la paridad. Esto llevó a analizar más experimentos llegándose a la conclusión de que no sólo en estos casos no se conserva la paridad sino que es una característica general de los decaimientos débiles [1,2]. Con el fin de incorporar esta violación de paridad en el Hamiltoniano de interacción, se hace uso de los operadores de proyección. Empíricamente también se observó que los acoplamientos que contribuyen son V y A, y de pedir invariancia de Lorentz se obtiene que el Hamiltoniano requiere que los términos de nucleones contengan una combinación de dichos acoplamientos, denotado como V-A. En suma luego de una serie de análisis experimentales extensivos se concluyó que los decaimientos β pueden ser descriptos

correctamente si el operador de dos cuerpos de nucleones del Hamiltoniano de interacción

H_{int} tiene la forma

$$\bar{u}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma_5) u_n \quad \text{con} \quad \frac{C_A}{C_V} = -1.255 \pm 0.006$$

donde C_A y C_V son las constantes de acoplamiento axial y vectorial respectivamente.

En consecuencia, la expresión completa de H_{int} es

$$H_{\text{int}}(n, p, e, \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x \left(\bar{u}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma_5) u_n \right) \times \left(\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_\nu \right)$$

El factor $1/\sqrt{2}$, que podría ser absorbido en la constante G , aparece por razones históricas mientras que C_V puede ser combinada junto con G en una sola constante ($G_\beta = G C_V$), llamada constante de Fermi del decaimiento β nuclear.

La extensión del operador de dos cuerpos leptónico al caso en que se incluyen las tres familias de leptones resulta simplemente

$$\begin{aligned} J_\alpha^{(L)}(x) &= \bar{u}_e(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(x) + \bar{u}_\mu(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}(x) + \bar{u}_\tau(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\tau}(x) \\ &= J_\alpha^{(e)}(x) + J_\alpha^{(\mu)}(x) + J_\alpha^{(\tau)}(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto el Hamiltoniano para procesos débiles puramente leptónicos está dado por:

$$H_{\text{int}}^{(L)} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x \left(J_\alpha^{(L)}(x) \right)^\dagger J_\alpha^{(L)}(x).$$

Como vemos $H_{\text{int}}^{(L)}$ es cuadrático en las corrientes, es decir, cada tipo de leptón interactúa con sí mismo y con cada uno de los demás. Así los procesos posibles que describe son, entre otros, la dispersión neutrino-electrón, el decaimiento del muón y la producción de muones en la dispersión muón-neutrino-electrón. Por otra parte, no están permitidos procesos en los cuales interactúen partículas sin intercambio de carga, es decir, una

interacción sin conversión de partículas. Esto sí ocurre en la interacción electromagnética, en la cual la carga no cambia por lo que es llamada de carga neutral. Por el contrario, aquellos procesos en los que la carga del leptón cambia en una unidad se la llama interacción de corrientes cargadas. En consecuencia se observó que la Teoría de Fermi basada en el acoplamiento corriente-corriente tipo QED tiene sus limitaciones ya que no predice procesos con corrientes neutras. Por otra parte al estudiar procesos de dispersión a altas energías que requieren ir a órdenes más altos en teoría de perturbaciones, aparecen divergencias que no pueden ser renormalizadas.

El primer problema se puede solucionar incluyendo un término de interacción para las corrientes neutras, de manera de obtener acuerdo con la evidencia experimental. Respecto al segundo problema, proponiendo una partícula mediadora (bosón) en la interacción, se puede obtener una constante de acoplamiento efectiva de Fermi que dependa de la transferencia de momento de manera de eliminar las divergencias. Sin embargo como en la Teoría de Fermi el acoplamiento es de carácter vectorial (o axial), el bosón mediador W debe ser descrito por un campo vectorial, es decir, debe tener espín 1 como el fotón en QED. Sin embargo si se utiliza el propagador de espín 1 para una partícula con masa la teoría resulta no renormalizable. Por otra parte, para obtener la teoría de Fermi en el límite de transferencia de momentos pequeños estos bosones deben ser masivos.

La forma en que se logró compatibilizar estos requerimientos fué mediante el mecanismo de Higgs-Kibble. La idea consiste en comenzar con bosones W sin masa acoplados a un campo ϕ de espín 0 (campo de Higgs), mediante la interacción $g^2 \phi^2 W_\mu^2$.

Asumiendo que el campo escalar es constante $\left(\phi_0 = \frac{M_w}{g}\right)$ en todo el espacio se obtiene un término que juega el rol de masa $M_w^2 W_\mu^2(x)$. Recordando los procesos en los que intervienen corrientes neutras, en estos casos se requiere para describirlos un bosón neutral Z^0 sin masa, de propiedades similares al fotón. Utilizando estos conceptos, Weinberg, Glashow y Salam reformularon la Teoría de Fermi como una teoría de campos cuánticos que intercambian bosones vectoriales masivos, mediadores en las interacciones débiles, e incorporaron en forma unificada las corrientes cargadas y neutras.

En las discusiones precedentes se ha considerado la situación de interacciones en las que sólo intervienen leptones. Si se desea describir decaimientos en los cuales participan hadrones se debe tener en cuenta la estructura interna de estos últimos. Como es bien sabido actualmente se considera que, a diferencia de los leptones, los hadrones no son partículas elementales sino que están compuestas por quarks [3], que son fermiones de espín $\frac{1}{2}$. Si bien la interacción débil de los quarks se puede describir de forma completamente semejante a la de los leptones, para calcular la amplitud total de un proceso con hadrones es necesario conocer de qué manera el sistema de quarks se comporta dentro del hadrón. Como veremos luego, esto trae aparejadas importantes dificultades debido a la complejidad de las interacciones entre los quarks. Teniendo esto en cuenta, es que resulta conveniente clasificar los decaimientos débiles en leptónicos, semileptónicos y no leptónicos.

Los decaimientos leptónicos son aquellos en los que como sólo intervienen leptones es posible utilizar los conocimientos actuales de las interacciones electrodébiles para estudiarlos teóricamente obteniéndose muy buena concordancia con los datos experimentales.

En los decaimientos semileptónicos intervienen leptones y hadrones y en los llamados hadrónicos intervienen sólo hadrones. Para evaluar teóricamente las amplitudes involucradas en estos decaimientos es preciso no solo tener una buena descripción de las interacciones electrodébiles sino también de las interacciones fuertes. Es justamente en procesos puramente hadrónicos en los que estamos interesados en esta tesis.

En general, los hadrones son partículas que interactúan fuertemente y se encuentran subdivididos en dos tipos: los bariones, que tienen número bariónico $B \pm 1$ y son fermiones con espín semientero ($1/2, 3/2, \dots$) y los mesones, que tienen espín entero y número bariónico 0.

Los hadrones más livianos se hallan en un arreglo de multipletes. Los más importantes son el octete y el decuplete de bariones, y los nonetes de mesones de espín 0 y de espín 1. Para describir tales multipletes es necesario agregar números cuánticos que son característicos pues se conservan en las interacciones fuertes, ellos son el isoespín (T) y la extrañeza (S) (o equivalentemente la hipercarga $Y = B + S$). Para cada multiplete bariónico existe un multiplete de antipartículas que se obtiene por reflexión del anterior. Estos multipletes corresponden a las representaciones irreducibles del grupo de $SU(3)$. Gell-Mann y Zweig postularon la existencia de partículas correspondientes a las representaciones fundamentales de dicho grupo (tripleto-antitripleto) y las llamaron quarks, con cargas

$$q_u = \frac{2}{3}e \quad , \quad q_d = q_s = -\frac{1}{3}e .$$

A partir de ello observaron que los bariones debían estar compuestos por tres quarks y los mesones por un par quark-antiquark. Si bien los quarks no han sido observados como

partículas libres, su existencia dentro de los hadrones permite entender el espectro de masa hadrónica e interpretar la dispersión elástica electrón-nucleón a altas energías.

Al incluir el concepto de subestructura hadrónica, el problema en los cálculos de amplitudes de decaimiento en procesos no leptónicos surge al intentar describir el vértice hadrónico, ya que si bien se conoce como interactúa el quark con el bosón mediador no se sabe cómo describir la interacción del bosón mediador con una estructura hadrónica utilizando la cromodinámica cuántica (QCD).

QCD es la teoría que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones. Se trata de una teoría de gauge no abeliana en $SU(N_c)$, donde N_c es el número de colores (en el mundo real $N_c = 3$). Esta teoría es asintóticamente libre lo que significa que en contraste a QED su constante de acoplamiento decrece a altas energías. Por el contrario, a bajas energías crece y por lo tanto no es posible tratar a los quarks como casi libres. Intuitivamente esto da lugar al confinamiento de quarks y gluones dentro de los hadrones. Las teorías de campos renormalizables que cuentan con estas propiedades son no abelianas. En QED el acoplamiento decrece a grandes distancias como resultado de un apantallamiento de carga debido a la presencia de pares virtuales de electrón-positrón. Extendiendo este razonamiento a QCD se puede pensar como un efecto de anti-apantallamiento debido a la naturaleza no abeliana de las interacciones gluónicas.

Por lo dicho anteriormente, a bajas energías la descripción de QCD en base a quarks y grados de libertad gluónicas no resulta apropiada. En este límite de energías los grados de libertad relevantes están dados por las partículas más livianas de la teoría, las cuales son, desde el punto de vista de las interacciones fuertes, los mesones pseudoescalares.

A partir del teorema de Goldstone es posible entender que un quiebre espontáneo de simetría en el lagrangiano de QCD, trae como consecuencia la existencia de partículas sin

masa llamadas “partículas de Goldstone”. Tal quiebre de simetría se produce cuando la simetría del lagrangiano no es compartida por la simetría del vacío. Es decir que existe un operador de campo cuyo valor de expectación en el vacío es distinto de cero y el vacío es degenerado bajo algún grupo de simetría. En esta situación el teorema de Goldstone asegura que deben existir partículas de masa nula en el espectro de estados. Aunque empíricamente no hay partículas de masa cero, se cree que como los mesones pseudoescalares tienen una masa muy pequeña, éstos corresponden a los bosones de Goldstone de QCD.

La cantidad de bosones de Goldstone se puede conocer utilizando teoría de grupos; por ejemplo, si el lagrangiano es invariante frente a ciertas transformaciones, esto implica la existencia de un grupo de simetría G . Si el vacío es un estado degenerado se debe elegir un estado en particular y por lo tanto éste ya no comparte la simetría del lagrangiano.

Supongamos que el vacío es invariante bajo un subgrupo de G , llamado H , en consecuencia, los bosones de Goldstone tienen el orden de G/H . Si no existiera un quiebre espontáneo de simetría, existiría un sólo estado de vacío y entonces $G = H$ con lo cual no habría bosones de Goldstone. Por otra parte si no existiese un subgrupo H que deje invariante el vacío, entonces el número de bosones es igual al orden de G .

Volviendo al objetivo de este trabajo los decaimientos no leptónicos de hiperones son de la forma $B \rightarrow B' \pi$, donde B y B' tienen espín $\frac{1}{2}$. La conservación del momento angular implica que sólo puede producirse este tipo de proceso si se trata de una transición en que el impulso angular relativo entre las partículas salientes es cero (onda S) ó uno (onda P). Gracias a la información experimental es posible determinar ambas amplitudes de decaimiento en forma separada para los distintos procesos posibles.

Dichos decaimientos son siete, a saber, $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$, $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$, $\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$, $\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0$, $\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-$, $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0\pi^-$, $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0\pi^0$. Suponiendo la validez de la simetría de isoespín sólo cuatro de ellos resultan independientes.

Aunque hace más de treinta años que estos procesos están siendo estudiados aún hoy en día siguen siendo de interés, ya que si bien se han logrado buenos resultados al explicar cada onda por separado [4], todavía no se ha encontrado un modelo que pueda explicar las amplitudes de decaimiento en las ondas S y P simultáneamente.

En el caso de la onda S, las predicciones dadas por el modelo de quarks usando factores de realce de QCD son muy buenas. Sin embargo este modelo tiene problemas para reproducir al mismo tiempo la onda P, problema que parece ser común en otros modelos como teoría de perturbaciones quirales de bariones pesados [5], regla de las sumas de QCD [6], etc.

Usualmente para tratar de analizar estos decaimientos se utiliza la aproximación del pión débil. En este límite el decaimiento $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ de la onda S es nulo y la amplitud de la transición de onda S es proporcional al elemento de matriz del hamiltoniano débil barión – barión. Además la amplitud de transición de la onda P tiene contribuciones de polos bariónicos. Los cálculos que utilizan teoría de perturbaciones quirales como el usado por Barasoy y Holstein, tiene el problema que para poder ajustar razonablemente los datos debieron incluir numerosas resonancias y parámetros [5]. Otro modelo es el de reglas de suma de QCD en el cual se encuentra buena concordancia con los datos experimentales en la onda S pero en la P encuentran un orden menos en magnitud [6].

En la presente tesis utilizaremos el modelo llamado de solitones quirales topológicos [7] para estudiar estos decaimientos. Dentro del contexto de estos modelos y con el fin de

mejorar los resultados se sugirió la idea de sumar a los términos polos de la onda P, contribuciones provenientes de términos de contacto [8]. En el tiempo en que fue hecha esta sugerencia, la versión de tres sabores del modelo estaba en un estadio bastante rudimentario ya que, por ejemplo, no se tenían buenas predicciones del espectro de hiperones [9,10], y los resultados obtenidos para la onda S eran muy pequeños [8,11]. Estos cálculos fueron hechos con la aproximación perturbativa al modelo de Skyrme de tres sabores. En tal aproximación se introducen coordenadas colectivas para cuantificar el solitón, y el término del quiebre de simetría se trata a primer orden en la teoría de perturbaciones. El problema es que con esta aproximación se obtiene un espectro de hiperones muy pobre. Además la constante de decaimiento de los piones (f_π) fue ajustada a la mitad de su valor empírico para obtener las masas bariónicas del orden de las observadas experimentalmente. En este contexto los resultados obtenidos para los valores absolutos de las amplitudes de decaimiento débiles resultaron mucho menores que los experimentales.

Al refinar el modelo diagonalizando el término de quiebre de simetría en forma exacta, según la propuesta de Yabu y Ando [12], se obtienen resultados mucho mejores para el espectro de hiperones, como así también buenas predicciones para diferentes propiedades bariónicas [13]. En consecuencia se usará en este trabajo dicha aproximación. Para describir las interacciones débiles del campo quiral se utilizará un lagrangiano efectivo quiral [14], en el cual las constantes de acoplamiento a bajas energías son fijadas de manera de reproducir correctamente los decaimientos kaónicos a 2π y 3π .

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma: en el capítulo 2, se explica en forma detallada el modelo de solitones quirales topológicos: su surgimiento

histórico, sus predicciones comparadas con los datos experimentales y su extensión a tres sabores. En el capítulo 3 se describe cómo calcular las amplitudes de decaimiento, detallando separadamente la onda S y la onda P. En el capítulo 4 se presentan los resultados numéricos obtenidos en comparación con los experimentales. En el capítulo 5 se presentan las conclusiones.

Finalmente en el Apéndice se explican algunos detalles del cálculo.

2- MODELO DE SKYRME

2.1-Surgimiento del modelo y su relación con QCD

Como fue mencionado en la introducción, QCD describe las interacciones fuertes entre quarks mediante una teoría de gauge no abeliana. Esto implica que sus generadores no conmutan entre sí, dando como resultado ecuaciones de movimiento no lineales para el campo vectorial (campo de gluones).

La densidad lagrangiana de QCD en $SU(N_c)$ está dada por

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - igT^a V_\mu^a)\psi - \bar{\psi}m\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (1)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$F_{\mu\nu} = D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu$$

$$V_\mu = T^a V_\mu^a$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igV_\mu$$

donde V_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) son los campos gluónicos y g es la constante de acoplamiento de la interacción fuerte. ψ representa los campos de los quarks que son vectores columnas tanto en el espacio de color como el de sabor. m es una matriz en el espacio de sabor, dada por la masa de los diferentes tipos de quarks, mientras que T^a son los generadores de $SU(N_c)$.

La no linealidad de $F_{\mu\nu}$ implica que el lagrangiano contiene términos de tercer y cuarto orden en los campos V_μ y sus derivadas. El campo de gauge V_μ no tiene masa, ya que términos cuadráticos en V_μ romperían la invariancia de gauge.

En principio se podría pensar en utilizar teoría de perturbaciones con el lagrangiano (1) a fin de derivar los diagramas de Feynman correspondientes usando la constante de acoplamiento g como parámetro perturbativo.

Sin embargo del análisis de la constante de acoplamiento en función de la energía se observa que los métodos perturbativos en QCD sólo tienen sentido en las zonas de alta transferencia de momento. A bajas energías QCD presenta la propiedad de confinamiento, que es netamente no perturbativa. En dicho régimen no resulta apropiado utilizar el lagrangiano (1) pues los grados de libertad relevantes son dados por las partículas más livianas en la teoría, es decir, por los mesones pseudoescalares.

Si se considera el lagrangiano de QCD para los quarks más livianos de sabor u, d, s , entonces ψ es una columna de tres sabores y para cada sabor contiene tres componentes de color. Tomando las masas de los tres quarks iguales, el lagrangiano es invariante bajo transformaciones globales vectoriales en el espacio de sabor, es decir que tiene simetría $SU(3)_V$. Tal simetría se pone de manifiesto en los multipletes de $SU(3)$ observados en el espectro hadrónico. Si además se consideran dichos quarks como no masivos, entonces aparece una invariancia frente a transformaciones globales axiales en el espacio de sabor $SU(3)_A$. El conjunto completo de simetrías $SU(3)_V \times SU(3)_A$ conforman el grupo de simetría quirial. Esta simetría está espontáneamente quebrada, ya que experimentalmente no se observan partículas con igual número cuántico y paridad opuesta. La consecuencia de tal quiebre de simetría en $SU(3)$ está dada por la aparición del octete pseudoescalar de los bosones de Goldstone, π, k y η los cuales “idealmente” son no masivos.

El lagrangiano además tiene otras dos simetrías: una frente a una transformación global $e^{i\theta}$ que da lugar a la conservación del número bariónico y otra relacionada con la

transformación axial global $e^{i\gamma_5\theta}$, conocida como simetría $U(1)_A$. Sin embargo esta simetría se rompe debido a una anomalía. Es decir, si bien la corriente axial $U(1)_A$ se conserva a nivel clásico no lo hace cuando se cuantifica la teoría. Por lo tanto no son necesarios nueve bosones de Goldstone sino los ocho nombrados con anterioridad.

Estas ideas basadas en el quiebre de simetría son exactamente válidas en el caso del límite de quarks sin masa. Como los quarks u y d tienen masas pequeñas (≈ 10 Mev) en comparación con la escala característica de QCD ($\Lambda_{QCD} \approx 200$ Mev), se espera que la simetría quiral sea válida en muy buena aproximación para $SU(2)_f$. En cambio para el caso de $SU(3)_f$ es de esperar que existan ciertos apartamientos ya que la masa del quark strange ($m_s \approx 175$ Mev) no es despreciable frente a Λ_{QCD} .

Aunque QCD presenta las dificultades comentadas anteriormente, ciertas propiedades importantes pueden obtenerse utilizando el límite de N_c grande. La idea de utilizar el número de colores N_c como parámetro de expansión de QCD fue desarrollada por t'Hooft [15] y luego aplicada a bariones por Witten [16]. Esta idea supone que cualquier observable puede escribirse como una serie de potencias de $1/N_c$ y de esta forma obtener, por ejemplo, el espectro de energías con sus estados excitados.

Como ya fue mencionado, para altas energías la constante de acoplamiento es pequeña y entonces se la puede utilizar como parámetro perturbativo para calcular la amplitud de dispersión. Sin embargo para la estructura hadrónica de bajas energías la constante de acoplamiento no es un parámetro de expansión relevante. t'Hooft notó que en este caso se puede usar al parámetro $1/N_c$ como buen candidato para ello, y mostró que para N_c grande QCD se comporta como una teoría de mesones débilmente interactuantes. Asumiendo que g^2 es del orden de $1/N_c$, la función de correlación de un operador singlete de color es

dominado por diagramas planares (diagramas cuyas líneas pueden ser dibujadas en un plano sin cruzarse unas con otras), ya que las contribuciones de los diagramas no planares son del orden de N_c^2 veces más pequeñas y en consecuencia despreciables para N_c grande.

En base a lo anterior, Witten mostró que en el límite de N_c grande QCD se reduce a una teoría efectiva de campos mesónicos débilmente interactuantes, y argumentó que los bariones emergen de estos acoplamientos débiles de mesones.

Un barión puede ser pensado como un estado ligado de N_c quarks interactuando mediante el intercambio de gluones. Si M_B denota el estado de energía fundamental, se encuentra que $M_B = O(N_c)$. Esta proporcionalidad de la masa bariónica con la inversa de la constante de acoplamiento, es característica de una solución tipo solitón [17], y enfatiza un efecto no perturbativo. Esto llevó a reconsiderar el modelo de solitones topológicos propuesto por Skyrme a principios de los años sesenta.

2.2-El modelo de Skyrme para dos sabores

El punto de partida para este modelo es el llamado modelo σ no lineal cuyos campos corresponden sólo a los mesones más livianos (piones), y en el cual la simetría quiral (requerida por QCD) es implementada adoptando la representación no lineal del campo de piones $\vec{\pi}(x)$. Dicha representación se realiza en términos del campo quiral

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)}{f_\pi}\right) \quad (2)$$

donde $\vec{\tau}$ es un isovector cuyas componentes son las matrices de Pauli y f_π es la constante de decaimiento del pión obtenida a partir del decaimiento $\pi \rightarrow \mu + \nu$. Las transformaciones

quirales son parametrizadas por matrices constantes L y R . Por lo tanto el lagrangiano efectivo debe ser invariante ante transformaciones de la forma

$$U(x) \rightarrow L U(x) R^+ \quad (3)$$

La configuración en el vacío $\vec{\pi} = 0$ ($U = I$), es invariante para el caso particular en que $L = R^+$, lo cual refleja el quiebre espontáneo de simetría quiral.

La densidad lagrangiana del modelo σ no lineal en términos de $U(x)$ es la siguiente

$$\mathcal{L}_{\sigma nl} = \frac{f_\pi^2}{4} Tr \left[\partial_\mu U \left(\partial^\mu U \right)^+ \right] \quad (4)$$

Este lagrangiano resultó ser muy exitoso para obtener predicciones relacionadas con propiedades de los piones. Sin embargo Skyrme notó que $\mathcal{L}_{\sigma nl}$ no da lugar a una solución estable tipo solitón de tamaño finito (para mayor detalle ver sección 2.4). Por lo tanto consideró la posibilidad de incorporar un término adicional de orden cuarto en derivadas espaciales pero sólo cuadrático en temporales (lo cual será útil a la hora de cuantificar el modelo). La expresión de este término, llamado usualmente “término de Skyrme”, es

$$\mathcal{L}_{SK} = \frac{1}{32e^2} Tr \left[\left[U^+ \partial_\mu U, U^+ \partial_\nu U \right]^2 \right] \quad (5)$$

donde e es una constante adimensional cuyo valor es ajustado como se verá más adelante.

La energía asociada a este nuevo término cuártico produce una solución estable de tamaño finito para el modelo de Skyrme definido por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\sigma nl} + \mathcal{L}_{SK} \quad (6)$$

Definiendo $\ell_\mu = U^+ \partial_\mu U$ y reemplazando en (6) obtenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{4} Tr \left[\ell_\mu \ell^\mu \right] + \frac{1}{32e^2} Tr \left[\left[\ell_\mu, \ell_\nu \right]^2 \right] \quad (7)$$

2.3-Simetrías y corrientes

La acción derivada de (7) tiene varias simetrías, clasificadas en externas, como invariancia de traslación o de Lorentz , e internas como la invariancia quiral.

De la invariancia quiral se obtienen la corriente vectorial (V^μ) y la corriente axial (A^μ). Estas cantidades juegan roles importantes en la interpretación de las propiedades físicas del solitón.

Para obtener las expresiones correspondientes se definen transformaciones locales infinitesimales izquierda (g_L) y derecha (g_R)

$$U \rightarrow g_L U, \quad g_L = (I + Q_L) \quad (8)$$

$$U \rightarrow U g_R^+, \quad g_R = (I + Q_R) \quad (9)$$

de donde resulta $\delta_R \ell_\mu = i \partial_\mu Q_R$ y $\delta_L \ell_\mu = U^+ i (\partial_\mu Q_L) U$.

Las corrientes conservadas asociadas a la transformación global $SU(2)_L \times SU(2)_R$ se hallan mediante la construcción de Noether

$$J_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_Q}{\partial (\partial_\mu Q)} \quad (10)$$

Reemplazando las transformaciones (8) y (9) en (7) se obtiene respectivamente

$$J_{\mu L}^a = \frac{-i}{8} Tr \left[4 f_\pi^2 \ell_\mu + \frac{1}{e^2} [[\ell_\nu, \ell_\mu], \ell^\nu] \right] \quad (11)$$

$$J_{\mu R}^a = \frac{i}{8} Tr \left[4 f_\pi^2 r_\mu + \frac{1}{e^2} [r^\nu, [r_\mu, r_\nu]] \right] \quad (12)$$

donde $r_\mu = U \partial_\mu U^+$.

Por lo tanto las corrientes conservadas vectorial y axial resultan

$$V_\mu^a = \frac{1}{2}(J_\mu^L + J_\mu^R) \quad (13)$$

$$A_\mu^a = \frac{1}{2}(J_\mu^L - J_\mu^R) \quad (14)$$

La corriente vectorial está relacionada con la transformación de isoespín, por lo que $T^a = \int d^3x V_0^a$ donde T^a es el operador de isoespín usual mientras que la corriente axial está relacionada con una transformación puramente quirral $U \rightarrow BUB$.

La construcción de Noether muestra que cuando el lagrangiano es invariante bajo una transformación global (lo cual corresponde a una Q constante) la corriente asociada se conserva.

Para tener en cuenta el hecho de que en verdad el pión no tiene masa nula es necesario agregar un término a la densidad lagrangiana (6) de la forma

$$\mathcal{L}_{SB} = \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{4} \text{Tr} [U + U^\dagger - 2] \quad (15)$$

En este caso la densidad lagrangiana queda compuesta por tres términos, a saber

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{onl}} + \mathcal{L}_{SK} + \mathcal{L}_{SB} \quad (16)$$

Es fácil verificar que este lagrangiano es invariante bajo transformaciones de isoespín (por lo cual se conserva la corriente vectorial V_μ^a) pero no es exactamente invariante frente a transformaciones quirales ya que $\partial_\mu A_\mu^a = m_\pi^2 f_\pi^2 \pi_a$, donde π_a es el campo piónico; en consecuencia se dice que la corriente axial es “parcialmente” conservada.

2.4-Solitón topológico

Para campos estáticos la función U en la ecuación (2) es un mapeo de R^3 a la variedad del grupo $SU(2)$. Para que la energía asociada con una configuración de campo de este tipo sea finita, ésta debe ser constante (la misma en todas direcciones) cuando $r \rightarrow \infty$. En consecuencia el mapeo se define sobre una 3 esfera (S^3) en lugar de R^3 .

Los mapeos $S^3 \rightarrow SU(2)$ pueden ser no triviales y se caracterizan por un número de vueltas $\Pi_3(SU(2)) = Z$. Una configuración de campo con número de vueltas diferente de cero es topológicamente estable. Este número conservado da lugar a una corriente topológica dada por

$$B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Tr[(U^+ \partial_\nu U)(U^+ \partial_\alpha U)(U^+ \partial_\beta U)], \quad (17)$$

que también es conservada. Esta ley de conservación no depende de las ecuaciones de movimiento.

La integral espacial de la componente temporal B^0 define el número de vueltas. Skyrme conjeturó que los solitones son nucleones y que la densidad topológica B^0 puede ser identificada con la densidad bariónica.

Para determinar la estabilidad de una solución tipo solitón topológico, se puede estudiar cómo escalan los distintos términos del lagrangiano ante la transformación $\vec{x} \rightarrow \frac{\vec{x}}{\lambda}$.

Se obtiene que la masa de la configuración estática dada por $M = - \int d^3x \mathcal{L}$ transforma según $M = \lambda M_{\sigma\pi l} + \frac{1}{\lambda} M_{SK} + \lambda^3 M_{SB}$, donde $M_{\sigma\pi l}$, M_{SK} y M_{SB} son definidas positivas y no dependen del parámetro λ .

Si el segundo término en el \mathcal{L} no estuviese presente el solitón podría tener tamaño nulo, por lo que resulta que efectivamente \mathcal{L}_{SK} lo estabiliza.

2.5-El Hedgehog

El solitón debe satisfacer las ecuaciones de campo con $U(r = \infty) = 1$ de manera que el campo piónico decaiga a grandes distancias y la masa resulte finita.

Además si se requiere que el solitón describa al nucleón, cuyo número bariónico es 1, debe corresponder a un mapeo con número de vueltas igual a 1.

El ansatz propuesto por Skyrme es

$$U_o(\vec{x}) = \exp [i \vec{\tau} \cdot \vec{r} f(r)] \quad (18)$$

La forma de esta configuración se indica en la figura 1

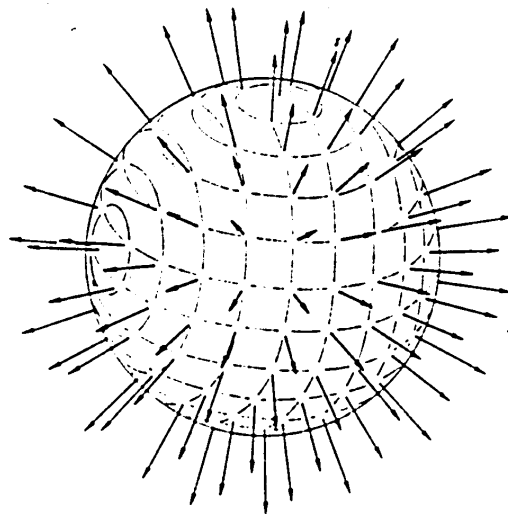


Figura 1: Configuración hedgehog. Las flechas indican la dirección del campo piónico en diferentes puntos de coordenadas espaciales.

Insertando (18) en (16) se obtiene la siguiente funcional para la energía estática $E[f(r)]$

$$E[f] = 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \left\{ \frac{f_{\pi}^2}{2} \left(f'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right) + \frac{s^2}{2e^2 r^2} \left(2f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) + f_{\pi}^2 m_{\pi}^2 (1-c) \right\} \quad (19)$$

donde $f' = f'(r)$, $s = \text{sen}(f(r))$ y $c = \text{cos}(f(r))$.

Para hallar la forma de la función del ángulo quiral $f(r)$, se minimiza $E(f)$ respecto de $f(r)$ obteniéndose la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{f_{\pi}^2 e^2 r^2}{2} \left[\frac{2f'}{r} + f'' - \frac{2sc}{r^2} - m_{\pi}^2 s \right] + f'' s^2 + sc f'^2 - \frac{s^3 c}{r^2} = 0 \quad (20)$$

Esta ecuación es suplementada con las condiciones de contorno $f(0) = \pi$ y $f(\infty) = 0$. El procedimiento para determinar las mismas es el siguiente. De acuerdo al requerimiento de energía finita U , debe ser constante para $r \rightarrow \infty$, luego $f(\infty)$ debe ser un múltiplo entero de π , que usualmente se elige igual a 0. Como el origen $r = 0$ debe ser mapeado en un solo punto sobre S^3 se requiere que $f(0) = n\pi$ con n entero. Si se elige $f(0) = 0$ el cubrimiento de S^3 se contrae a un punto $U = 1$. Pero si $f(0) = \pi$ se obtiene un cubrimiento no contraible que envuelve completamente S^3 una sola vez.

Si insertamos estas ideas geométricas en la expresión del número de vueltas resulta

$$B = \frac{2}{\pi} \int_{f(0)}^{f(\infty)} \text{sen}^2 f \, df = n \quad (21)$$

con las condiciones de contorno $f(0) = n\pi$ y $f(\infty) = 0$.

Para las configuraciones con energía finita tanto la densidad de energía como la densidad de número bariónico están necesariamente localizadas en una porción finita del

espacio. Es importante notar cualquiera sea la dependencia temporal del ángulo quirral $f(r)$, las condiciones de contorno dadas anteriormente deben ser obedecidas con n fijo.

De esta forma si las configuraciones estables satisfacen las condiciones de contorno con $n \neq 0$, entonces se pueden encontrar objetos con las características esenciales de las partículas: son espacialmente localizadas y su corriente bariónica obedece la ecuación de continuidad $\partial^\mu B_\mu = 0$.

2.6-Cuantificación del solitón para dos sabores

Es fácil ver que la solución (18) satisface

$$(\vec{J} + \vec{T})U_o = 0. \quad (22)$$

Donde los operadores de momento angular y de isoespín son respectivamente

$$\vec{J} = -i\hat{x} \times \nabla \text{ y } \vec{T} = \left[\frac{\vec{\tau}}{2}, \right].$$

Es decir, la configuración esféricamente simétrica no tiene espín ni isoespín bien definidos mientras que los nucleones sí. Por lo tanto los nucleones deben aparecer como estados cuantificados.

Para cuantificar al solitón se deben tener en cuenta soluciones dependientes del tiempo, con el fin de construir momentos canónicos y constantes de movimiento no nulos.

En general no es fácil hallar soluciones dependientes del tiempo en teorías de campos no lineales, por tal motivo es necesario realizar ciertas aproximaciones como por ejemplo linealizar alrededor de una configuración estable $U_o^{SU(2)}$, es decir $U = U_o + \delta U(r, t)$ lo cual da lugar a pequeñas oscilaciones. Sin embargo, debido a las simetrías del modelo, existen ciertos modos que no tienen amplitudes pequeñas, como por ejemplo el movimiento

traslacional de U_0 , o el de rotación de isoespín. En consecuencia para describir a los bariones se utilizará la aproximación de coordenadas colectivas para tener en cuenta esos modos llamados usualmente “modos cero”. De particular importancia son los modos de rotación, ya que ellos conectan momento angular (J) con isoespín (T).

Rotando el hedgehog estático (18) a través de una transformación de isoespín dependiente del tiempo se obtiene

$$U(\vec{r}, t) = A(t)U_0(\vec{r})A^+(t) \quad (23)$$

con $A(t) \in SU(2)$. Esta rotación es la misma que produce una rotación espacial, pues debido a la ecuación (22) rotaciones de isoespín y espaciales son equivalentes.

Al incluir la rotación global, la contribución tipo potencial del lagrangiano permanece sin modificaciones mientras que la parte cinética da lugar a términos adicionales debido a las derivadas temporales. Tales términos representan la energía de rotación del skyrmión rotante. En consecuencia resulta conveniente definir tres velocidades angulares Ω_i mediante

$$A^+(t) \frac{\partial A(t)}{\partial t} = \frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\Omega} \quad (24)$$

Entonces, asumiendo que el lagrangiano contiene sólo términos cuadráticos en las derivadas temporales, la energía rotacional es de la forma

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \Omega_i \Omega_j \quad \text{con} \quad \Theta_{ij} = \Theta \delta_{ij} \quad (25)$$

donde Θ es el momento de inercia del solitón rotante, cuya expresión para el modelo descrito por el lagrangiano (16) es

$$\Theta = \frac{8\pi}{3} f_\pi^2 \int dr r^2 s^2 \left(1 + \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \left(f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) \quad (26)$$

Parametrizando localmente

$$A(t) = a_0 + i\vec{r}\vec{a} \quad (27)$$

con la restricción $a_0^2 + a^2 = 1$ (28)

y reemplazando (24), (25) en (16) se obtiene

$$L = -M + 2\Theta \sum_{n=0}^3 (\dot{a}_n)^2 \quad (29)$$

Dado que el momento conjugado a a_n es $P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n} = 4\Theta \dot{a}_n$ (30)

el hamiltoniano queda de la forma

$$H = \sum_{n=0}^3 P_n \dot{a}_n - L = M + \frac{1}{8\Theta} (P_n)^2 \quad (31)$$

Utilizando la cuantificación canónica se identifica $P_n = -i \frac{\partial}{\partial a_n}$ (32)

por lo que se obtiene $H = M - \frac{1}{8\Theta} \sum_{n=0}^3 \left(\frac{\partial}{\partial a_n} \right)^2$ (33)

La restricción (28) implica que el operador $\sum_{n=0}^3 \left(\frac{\partial}{\partial a_n} \right)^2$ corresponde al laplaciano sobre una

3-esfera de radio 1, cuyos autoestados son una generalización de los armónicos esféricos.

Los operadores de espín (J) e isoespín (T) en el espacio de coordenadas colectivas pueden ser obtenidos a partir del teorema de Noether:

$$J_K = \frac{i}{2} \left(a_K \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_K} - \varepsilon_{Klm} a_l \frac{\partial}{\partial a_m} \right) \quad (34)$$

$$T_K = \frac{i}{2} \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_K} - a_K \frac{\partial}{\partial a_0} - \varepsilon_{Klm} a_l \frac{\partial}{\partial a_m} \right)$$

con $\hat{j}^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \left(\frac{-\partial^2}{\partial a_n^2} \right)$ (35)

Como $J^2 = T^2$ a partir de (33) se obtiene

$$\langle T = J | H | T = J \rangle = M + \frac{J(J+1)}{2\Theta} \quad (36)$$

donde M es la masa del solitón dada en la ecuación (19) y Θ es el momento de inercia del solitón rotante (26).

Para cada estado de isoespín T hay $2T + 1$ estados posibles y para cada estado de espín J hay $2J + 1$ estados posibles con lo cual la degeneración está dada por $(2J + 1)^2$ estados.

Todos los estados están permitidos, ya que U es invariante frente al cambio de A por $-A$. Por lo tanto se obtienen las funciones de onda cuánticas

$$\psi(A) = \psi(-A) \quad (37)$$

ó

$$\psi(-A) = -\psi(A) \quad (38)$$

Con la cuantización (37) los solitones describen bosones (función simétrica), mientras que con (38) describen fermiones. A nivel del modelo de dos sabores ambas cuantificaciones son posibles. Sin embargo, para tres sabores y $N_c = 3$ sólo la cuantificación fermiónica está permitida (ver Apéndice).

Los estados se definen completamente mediante los números cuánticos $J=T, J_3, T_3$. En particular los nucleones corresponden a $J = T = 1/2$, y las deltas a $J = T = 3/2$. Los estados con $T > 5/2$ se cree que provienen de la extensión $N_c \rightarrow \infty$, y no tienen correspondencia física.

Dentro de la aproximación de coordenadas colectivas la forma explícita de las corrientes vectoriales y axiales resulta

$$V_0^a = -s^2 \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] \Omega_b (\delta_{bc} - \hat{r}_b \hat{r}_c) D_{ac} \quad (39)$$

$$V_i^a = \frac{s^2}{r^2} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] \epsilon_{cnb} \hat{r}_n D_{ac} \quad (40)$$

$$A_0^a = \left\{ \frac{sc}{r} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] (\delta_{ic} - \hat{r}_i \hat{r}_c) + f' \left(f_\pi^2 + \frac{2s^2}{e^2 r^2} \right) \hat{r}_i \hat{r}_c \right\} D_{ac} \quad (41)$$

$$A_i^a = \frac{s^2}{r^2} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] \epsilon_{inb} \hat{r}_n D_{ac} \quad (42)$$

Donde D_{ab} son las matrices de Wigner de SU(2), $D_{ab} = \frac{1}{2} Tr[A \tau_a A^+ \tau_b]$.

2.7-Predicciones del modelo de dos sabores

En la tabla 1 se encuentran ciertas predicciones típicas del modelo de Skyrme de dos sabores en comparación con los datos experimentales. La manera de obtener dichas predicciones se detalla a continuación.

2.7.1-Masas del nucleón y de la partícula Delta

A partir del Hamiltoniano (36), se pueden determinar las masas del nucleón, de la delta y su diferencia:

$$m_N = M + \frac{3}{2\Theta} \quad \text{y} \quad m_\Delta = M + \frac{15}{8\Theta} \quad \text{y su separación} \quad m_N - m_\Delta = \frac{3}{2\Theta}.$$

2.7.2-Propiedades electromagnéticas

La corriente electromagnética está definida como

$$J_{EM}^\mu = \frac{B^\mu}{2} + V_3^\mu, \quad (43)$$

es decir contiene una parte proporcional a la corriente bariónica (isoescalar) y otra parte dada por la tercera componente de la corriente vectorial.

El operador de carga Q es en consecuencia

$$Q = \int d^3x J_{EM}^o = \int r^2 dr d\Omega \left(\frac{B^o}{2} + V_3^o \right) = \frac{B}{2} + T_3 \quad (44)$$

donde B es el número bariónico y T_3 es la proyección del isoespín.

En función de las distribuciones de carga isoescalar e isovectorial, Q resulta

$$Q = \int_0^\infty dr \left(\frac{1}{2} \rho_{E,I=0}(r) + I_3 \rho_{E,I=1}(r) \right) \quad (45)$$

$$\text{donde } \rho_{E,I=0}(r) = \frac{-2}{\pi} s^2 f' \quad (46)$$

$$\text{y } \rho_{E,I=1}(r) = \frac{8\pi}{3\Theta} r^2 s^2 \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] \quad (47)$$

Utilizando estas densidades es posible hallar los radios isoescalares e isovectoriales eléctricos

$$\langle r^2 \rangle_{E,I=0} = \int_0^\infty dr r^2 \rho_{E,I=0}(r) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2ef_\pi} \right)^2 \int_0^\infty du u^2 s^2 f' \quad (48)$$

$$\langle r^2 \rangle_{E,I=1} = \int_0^\infty dr r^2 \rho_{E,I=1}(r) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{2ef_\pi} \right)^2 \int du u^4 s^2 \left(1 + 4 \left(f'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right) \right) \quad (49)$$

donde $u = 2 e f_\pi r$.

El operador momento magnético está dado por

$$\mu_i = \frac{1}{2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} x^j \left(\frac{B^k}{2} + V_3^k \right) \quad (50)$$

$$\mu_i = \frac{1}{6\Theta} \left(\langle r^2 \rangle_{E,I=0} J_i - \frac{\Theta}{2} D_{3i} \right) \quad (51)$$

donde J_3 es el espín del solitón y D_{3i} es la matriz de rotación.

Los momentos magnéticos del protón y del neutrón se definen mediante

$$\langle N, \frac{1}{2} | \mu^3 | N, \frac{1}{2} \rangle = \frac{\mu_N}{2M_N} \quad (52)$$

Por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_p &= 2M_N \left(\frac{1}{12\Theta} \langle r^2 \rangle_{E,I=0} + \frac{\Theta}{6} \right) \\ \mu_n &= 2M_N \left(\frac{1}{12\Theta} \langle r^2 \rangle_{E,I=0} - \frac{\Theta}{6} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

2.7.3-Acoplamiento axial

La constante de acoplamiento axial g_A puede obtenerse comparando la expresión del modelo de Skyrme $\int d^3x J_A^{ia}$ con la correspondiente en teoría de campos.

La corriente axial en teoría de campos está dada por

$$\langle N, p | J_A^{\mu a}(\vec{x}) | N', p' \rangle = e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \bar{u}_N(p) \frac{\tau_a}{2} \left[\gamma^\mu \gamma_5 g_A(q^2) + q^\mu \gamma_5 h_A(q^2) \right] u_{N'}(p') \quad (54)$$

donde $q = p - p'$.

La constante de acoplamiento axial g_A se define como $g_A = g_A(0)$. Integrando espacialmente (54) y utilizando la ecuación de Dirac junto con la conservación de la corriente axial se obtiene

$$\langle N, p | \int d^3x J_A^{ia}(\vec{x}) | N', p' \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{q}) g_A(q^2) \bar{u}_N(p) \frac{\tau_a}{2} \left[\gamma^i \gamma_5 - \frac{2}{q^2} M_N q^i \gamma_5 \right] u_{N'}(p') \quad (55)$$

Para nucleones no relativistas se tiene que

$$\bar{u}_N(p) \tau_a \gamma^i \gamma_5 u_{N'}(p') \cong \xi_N^+ \tau_a \sigma^i \xi_{N'} \quad (56)$$

$$\bar{u}_N(p) \tau_a \gamma^5 u_{N'}(p') \cong \xi_N^+ \tau_a \left(\frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{2M_N} \right) \xi_{N'} \quad (57)$$

donde ξ_N es el espinor de Pauli. Por lo tanto para valores de $|\vec{q}|$ pequeños

$$\langle N, p | J_A^{ia}(0) | N', p' \rangle \cong \frac{g_A}{2} (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) \xi_N^+ \tau_a \sigma_j \xi_{N'} \quad (58)$$

El valor del elemento de matriz (58) en el límite de $|\vec{q}| \rightarrow 0$ depende del orden en que se realiza la integración y el paso al límite. Integrando primero la parte angular y tomando luego el límite se obtiene

$$\langle N, p | J_A^{ia}(0) | N', p' \rangle \cong \frac{g_A}{3} \xi_N^+ \tau_a \sigma_i \xi_{N'} \quad (59)$$

En el modelo de Skyrme la expresión para la integral de volumen de la corriente axial es

$$\int d^3x J_A^{ia}(\vec{x}) = \frac{\pi}{3e^2} E D_{ai} \quad (60)$$

donde E es la integral radial

$$E = - \int_0^\infty du u^2 \left(\frac{2sc}{u} \left(1 + 4 \left(f'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right) \right) + f' \left(1 + 8 \frac{s^2}{u^2} \right) \right) \quad \text{con } u = 2ef_\pi r.$$

Por lo tanto el elemento de matriz de (60) entre estados de nucleones es

$$\langle N | \int d^3x J_A^{ia}(\vec{x}) | N' \rangle = \frac{\pi}{3e^2} E \left(-\frac{4}{3} \right) \langle N | T_a J_i | N' \rangle \quad (61)$$

Comparando (61) y (59) se obtiene entonces la expresión de

$$g_A = \frac{\pi E}{3e^2} \quad (62)$$

Cantidad física	Predicción($m_\pi = 0$)	Predicción($m_\pi \neq 0$)	Experimental
M_N	939 MeV(input)	939MeV(input)	939MeV
M_Δ	1232 MeV(input)	1232 MeV(input)	1232 MeV
m_π	0 MeV(input)	138 MeV(input)	138 MeV
f_π	64.5 Mev	54 Mev	93 MeV
e	5.44	4.84	-----
$\langle r^2 \rangle_{E,I=0}$	0.59 fm	0.68 fm	0.72 fm
$\langle r^2 \rangle_{E,I=1}$	-----	1.05 fm	0.80 fm
μ_p	1.88	1.97	2.79
μ_n	-1.32	-1.23	-1.91
g_A	0.61	0.65	1.23
$g_{\pi NN}$	13.4	17.9	20.4

Tabla 1: Predicciones características del modelo de Skyrme de dos sabores [7]. Aquí f_π fue tomado como parámetro ajustable. Los cálculos más modernos fijan esta constante a su valor experimental obteniéndose predicciones similares salvo para la masa del nucleón y la delta. Ver discusión sobre este punto más adelante.

2.8-Extensión del modelo a tres sabores

Debido al hecho de que el modelo de Skyrme proporciona una descripción razonablemente buena de los bariones no extraños y de su vinculación con QCD, surgió el interés de extender el modelo para incorporar bariones extraños.

Cuando el modelo se extiende a SU(3), es decir se incluye un grado de libertad “strange”, el campo quiral $U(x)$ debe pasar de ser una matriz de 2×2 a ser una de 3×3 por lo que el campo quiral resulta

$$U(x) = e^{i\phi} \quad , \quad \phi = \sum_{a=1}^8 \frac{\phi^a \lambda_a}{f_a} \quad (63)$$

donde λ_a son las matrices de Gell-Mann. Es decir, además de los piones se deben incorporar los kaones y el mesón η .

Como es sabido en QCD con 3 sabores la invariancia quiral está quebrada en forma apreciable. Por lo tanto es necesario agregar al modelo un término que tenga en cuenta este hecho. Procediendo de la misma forma que en SU(2), \mathcal{L}_{SB} se modifica como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SB} = & \frac{f_\pi^2 m_\pi^2 + 2f_K^2 m_K^2}{12} \text{Tr} [U + U^\dagger - 2] \\ & + \sqrt{3} \frac{(f_\pi^2 m_\pi^2 - 2f_K^2 m_K^2)}{12} \text{Tr} [\lambda_8 (U + U^\dagger)] \\ & + \frac{f_K^2 - f_\pi^2}{12} \text{Tr} \left[(1 - \sqrt{3}\lambda_8) \left(U (\partial_\mu U)^\dagger \partial^\mu U + U^\dagger \partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger \right) \right] \end{aligned} \quad (64)$$

Mediante estos nuevos términos se pueden describir las distintas masas mesónicas y las distintas constantes de decaimiento ($f_K \neq f_\pi$) [18].

Aun así, si se compara el lagrangiano quiral efectivo con el de QCD se observa que todavía tiene una simetría superflua, ya que es invariante bajo transformaciones separadas $U \rightarrow U^\dagger, r \rightarrow -r$ mientras que QCD es invariante sólo cuando estas dos transformaciones se realizan en forma combinada $U(r, t) \rightarrow U^\dagger(-r, t)$.

Con el fin de eliminar esta simetría espúrea se introduce un cuarto término al lagrangiano, llamado de Wess-Zumino (Ver Apéndice)

$$\Gamma_{WZ} = \frac{-iNc}{240\pi^2} \int d^5x \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho\tau} \text{Tr} [\ell_\mu \ell_\nu \ell_\sigma \ell_\rho \ell_\tau] \quad (65)$$

La integración se realiza sobre una variedad de 5 dimensiones. Γ_{WZ} es una 5-forma que se anula en el caso de dos sabores (ya que el número de generadores es sólo 3).

Finalmente la acción efectiva para SU(3) es

$$\Gamma = \int d^4x (\mathcal{L}_{\sigma nl} + \mathcal{L}_{SK} + \mathcal{L}_{SB}) + \Gamma_{WZ} \quad (66)$$

donde la expresión correspondiente a $\mathcal{L}_{\sigma nl}$ es la ecuación (4), la de \mathcal{L}_{SK} es la ecuación (5), la de \mathcal{L}_{SB} es la ecuación (64) y la de Γ_{WZ} es la ecuación (65).

El solitón clásico que describe a los bariones en SU(3), se construye embebiendo el ansatz de Skyrme de SU(2), $U^{SU(2)}(\vec{r})$, en SU(3) mediante

$$U_0^{SU(3)}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} U^{SU(2)}(\vec{r}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (67)$$

donde $U^{SU(2)}(\vec{r}) = \cos(f(r)) + i \vec{\tau} \cdot \hat{r} \sin(f(r))$.

Tal elección preserva la relación entre rotaciones espaciales y rotaciones en el isoespacio, que caracteriza el skyrmión de SU(2). Luego se procede de igual manera que en SU(2) minimizando la energía y obteniendo la función $f(r)$ y la masa del solitón.

Debido a los resultados insatisfactorios obtenidos al tratar el quiebre de simetría [9,10] mediante el método perturbativo, Yabu y Ando propusieron un método basado también en las coordenadas colectivas pero esta vez tratando el quiebre de simetría en forma exacta [12].

El método se basa en introducir una matriz de rotación quirral $A(t)$ perteneciente a SU(3). En consecuencia el campo rotado es

$$U(\vec{r}, t) = A(t) U_0^{SU(3)}(\vec{r}) A^\dagger(t) \quad (68)$$

Las propiedades de transformación de las coordenadas respecto a simetrías existentes son las siguientes

1- Isorotación:

$$A \rightarrow G_L A, \quad G_L \in SU(2)_L$$

2- Hipercarga

$$A \rightarrow \exp(i\theta_L \lambda_8), \quad \exp(i\theta_L \lambda_8) \in U(1)_L$$

3- Rotación de espín

$$A \rightarrow A G_R^+, \quad G_R^+ \in SU(2)_R$$

4- Hipercarga "derecha" (Y_R)

$$A \rightarrow \exp(i\theta_R \lambda_8), \quad \exp(i\theta_R \lambda_8) \in U(1)_R$$

Como la Y_R conmuta con la solución clásica (63), este grado de libertad es redundante.

En consecuencia, la simetría de las coordenadas colectivas no es $SU(3)$ sino $\frac{SU(3)}{U(1)_R}$ por lo

que la hipercarga derecha Y_R no es una cantidad física. Una forma alternativa en que se puede pensar a las coordenadas colectivas es considerando el grupo $SU(3)$ completo y tratando el grado de libertad $U(1)_R$ como un vínculo.

Los modos cero usados para cuantificar el modelo son los de rotación en el espacio de sabor. Ahora las matrices $A(t)$ pertenecen a $SU(3)$ por lo que pueden ser parametrizadas a través de ocho coordenadas colectivas a_α ($\alpha=1, \dots, 8$) introducidas a través de la relación

$$A^+ \dot{A} = \frac{i}{2} \sum_{\beta=1}^8 \lambda_\beta \dot{a}_\beta \quad (69)$$

De esta manera el lagrangiano obtenido es de la forma

$$L = -M + \frac{\Theta_\pi}{2} (\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2 + \dot{a}_3^2) + \frac{\Theta_K}{2} (\dot{a}_4^2 + \dot{a}_5^2 + \dot{a}_6^2 + \dot{a}_7^2) + \frac{Nc}{2\sqrt{3}} \dot{a}_8 - \frac{\gamma}{2} (1 - D_{88}(A)) \quad (70)$$

donde $D_{88}(A) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\lambda_8 A^+ \lambda_8 A]$. Θ_π y Θ_K son los momentos de inercia en la dirección del pión (ver ecuación (26)) y del kaón

$$\Theta_K = \frac{\pi}{2e^2} \int dr (1-c) \left(4(f_K)^2 e^2 r^2 + 2s^2 + r^2 f'^2 \right) \quad (71)$$

y γ es la constante que acompaña al término de quiebre de simetría

$$\gamma = \frac{16\pi}{3} f_\pi^2 \left(\frac{f_K^2}{f_\pi^2} m_K^2 - m_\pi^2 \right) \int r^2 dr (1-c) + \frac{8\pi}{3} f_\pi^2 \left(\frac{f_K^2}{f_\pi^2} - 1 \right) \int r^2 dr c \left(f'^2 + 2 \frac{s^2}{r^2} \right) \quad (72)$$

El correspondiente Hamiltoniano resulta ser

$$H = M + \frac{1}{2\Theta_K} \left[C_2(SU(3)) - \frac{3}{4} Y_R^2 \right] + \left(\frac{1}{\Theta_\pi} - \frac{1}{\Theta_K} \right) \frac{J^2}{2} + \frac{\gamma}{2} (1 - D_{88}) \quad (73)$$

donde $C_2(SU(3))$ es el operador cuadrático de Casimir de SU(3), J^2 es el operador de Casimir de SU(2), subgrupo que coincide con el momento angular. $Y_R = \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{p}_8$ es el generador de hipercarga derecha del correspondiente subgrupo $U(1)$.

Debido a la redundancia de la rotación asociada con Y_R se obtiene un vínculo cuya expresión es determinada por la acción de Wess-Zumino (Ver Apéndice)

$$Y_R = \frac{1}{3} N_c \quad (74)$$

por lo que para $N_c = 3$ se obtiene $Y_R = 1$.

Esto lleva a que las representaciones con dimensiones más bajas sean octetes y decupletes. Además como $J^2 = T^2$, para $Y_R = 1$ sólo pueden ocurrir estados con espín 1/2 ó 3/2.

Los autovalores y las autofunciones del hamiltoniano son identificados como las masas m_B y las autofunciones bariónicas $\Psi_B = \langle A / B \rangle$, respectivamente.

La diagonalización del hamiltoniano se puede hacer mediante la expansión de los estados bariónicos en términos de representaciones irreducibles de SU(3) (por ejemplo, el protón es una mezcla de {8},{10},{27}, ...) [19]. Es decir, la función de onda bariónica general es

$$\Psi_B = \sum_R C_B^R \sqrt{\dim(R)} D_{\alpha\beta}^R \quad (75)$$

donde $D_{\alpha\beta}^R$ son las funciones de Wigner, $\alpha = (Y, T, T_3)$ y $\beta = (Y_R, J, J_3)$ corresponden a los números cuánticos bariónicos hipercarga, isoespín, proyección de isoespín e hipercarga derecha, espín y la proyección del mismo, respectivamente. R es la representación correspondiente, y los coeficientes numéricos C_B^R resultan de la diagonalización del Hamiltoniano colectivo .

Este procedimiento ha permitido describir con razonable éxito el espectro de bariones y sus propiedades estáticas [13]. Ver tablas 2 y 3.

Bariones	Predicción del modelo (Mev)	Experimental (Mev)
Λ	154	177
Σ	242	254
Ξ	366	379
Δ	278	293
Σ^*	410	446
Ξ^*	544	591
Ω	677	733

Tabla 2: Masas de bariones tomados respecto de la masa del nucleón

Valores tomados de referencia [13].

Bariones	$\mu_B(n.m)$		$r_M^2(fm^2)$		$r_E^2(fm^2)$	
	modelo	exp.	modelo	exp.	modelo	exp.
p	2.03	2.79	0.43	0.74	0.59	0.74
n	-1.58	-1.91	0.46	0.77	-0.22	-0.12
Λ	-0.71	-0.61	0.36	----	-0.08	----
Σ^+	1.99	2.42	0.45	----	0.59	----
Σ^0	0.60	----	0.36	----	-0.02	----
Σ^-	-0.79	-1.16	0.58	----	-0.63	----
Ξ^0	-1.55	-1.25	0.38	----	-0.15	----
Ξ^-	-0.64	-0.69	0.43	----	-0.49	----
$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda$	-1.39	-1.61	0.48	----	----	----

Tabla 3: Propiedades electromagnéticas de los bariones del octete en el modelo de Skyrme de tres sabores. Tomados de la referencia [13].

3-DECAIMIENTOS DÉBILES NO LEPTÓNICOS DE HIPERONES

3.1- El Lagrangiano débil efectivo

Como se mencionó en la introducción la principal dificultad para poder describir los decaimientos no leptónicos de hiperones reside en que si bien se conoce cómo interactúan los mediadores de las interacciones electrodébiles con los quarks individualmente no es posible, en la actualidad, determinar con esta información la interacción con el barión como un todo.

Básicamente la situación es semejante a la encontrada en el capítulo anterior: la descripción en términos de quarks no resulta la más apropiada para estudiar fenómenos en los que QCD presenta su carácter no perturbativo. Tomando entonces los mesones pseudoescalares como grados de libertad más relevantes, la idea consiste en escribir un lagrangiano efectivo en términos del campo quiral $U(x)$ para estudiar los procesos débiles hadrónicos. El primer paso en esta dirección fue dado por Cronin en 1967 [20] quien escribió la forma explícita de dicho lagrangiano a orden más bajo en el impulso de los mesones. Posteriormente fueron surgiendo en la literatura versiones más elaboradas que incluían algunos términos de orden p^4 y que permitían una buena descripción de las amplitudes experimentales para los procesos $K \rightarrow 2\pi$ y $K \rightarrow 3\pi$. La forma completa del lagrangiano efectivo a orden p^4 fue encontrada por Kambor, Missimer y Wyler en 1990 [21]. En forma genérica cada término de dicho lagrangiano debe transformar como una representación octete (1,1) ó 27-plete (2,2) bajo el grupo quiral $SU(3)_L$. Los términos tipo octete dan lugar a transiciones con $\Delta I = \frac{1}{2}$, es decir aquellas en que el isoespín del hadrón

inicial difiere en $1/2$ respecto del isospín del hadrón en el estado final mientras que los términos tipo 27 incluyen tanto transiciones con $\Delta I = \frac{1}{2}$ como con $\Delta I = \frac{3}{2}$. Es un hecho bien conocido que en la naturaleza las transiciones $\Delta I = \frac{3}{2}$ se encuentran fuertemente suprimidas [22]. En la actualidad no se dispone aún de una explicación satisfactoria de este hecho llamado usualmente “regla $\Delta I = \frac{1}{2}$ ”.

En lo que resta de esta sección y en las tres subsiguientes nos concentraremos en los términos dominantes, es decir en los que transforman como octetes. Sólo volveremos sobre el problema de los decaimientos $\Delta I = \frac{3}{2}$ en la sección 3.5. Para los decaimientos hadrónicos tipo octete la forma más general del lagrangiano incluye quince términos independientes de orden p^4 . Sin embargo se ha mostrado que a este orden de aproximación los acoplamientos descritos por la densidad lagrangiana efectiva débil

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & gTr[\lambda_6 \partial_\mu U \partial^\mu U^+] + g'Tr[\lambda_6 \partial_\mu U \partial^\mu U^+ \partial_\nu U \partial^\nu U^+] \\ & + g''Tr[\lambda_6 \partial_\mu U \partial_\nu U^+ \partial^\mu U \partial^\nu U^+] \end{aligned} \quad (76)$$

son suficientes para ajustar los datos experimentales de los decaimientos $K \rightarrow 2\pi$ y $K \rightarrow 3\pi$ [14,23,24]. Por tal motivo, y ante la falta de mayor información experimental sobre decaimientos mesónicos, en el presente trabajo nos limitaremos al uso de dicha densidad lagrangiana efectiva.

El procedimiento para determinar las constantes g , g' y g'' que aparecen en (76) es el siguiente. Primeramente se fija la constante g de manera de reproducir la amplitud de

decaimiento experimental del proceso $K \rightarrow 2\pi$. Las dos restantes se determinan utilizando el decaimiento $K \rightarrow 3\pi$ mediante el procedimiento que se detalla a continuación. La amplitud de decaimiento del kaón a tres piones puede ser parametrizada en términos de cuatro cantidades a, b, c, d en función de las cuales tal amplitud resulta

$$A = a + bY + c \left(Y^2 + \frac{X^2}{3} \right) + d \left(Y^2 - \frac{X^2}{3} \right), \text{ donde } X = \frac{(s_2 - s_1)}{m_{\pi^+}^2}, \quad (77)$$

$$Y = \frac{(s_3 - s_0)}{m_{\pi^+}^2} \text{ con } s_i = (p_K - p_i)^2 \text{ y } s_0 = \frac{1}{3}(m_K^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2).$$

Midiendo la amplitud del decaimiento en función de los momentos de las partículas participantes es posible determinar las cantidades a, b, c y d que ajusten de manera óptima los datos experimentales. Con el propósito de hallar la relación entre dichos datos y los cálculos teóricos se parte del lagrangiano quiral (76) que describe tales decaimientos y se lo expande en serie de potencias del campo de mesones. Se identifica luego los términos de este lagrangiano expandido con la expresión (77) y se escribe a los parámetros a, b, c, d en función de las constantes a determinar g' y g'' . Luego se determinan los valores de las mismas que mejor ajusten las cuatro cantidades a, b, c y d encontradas previamente.

En esta tesis se considerarán dos conjuntos de valores ya que ambos ajustan con similar calidad los decaimientos kaónicos nombrados anteriormente. El conjunto que de aquí en adelante llamaremos SET A corresponde a

$$g = 3.60 \times 10^{-8} m_{\pi}^2; \quad g'/g = 1.50 \times 10^{-1} fm^2; \quad g''/g = -6.74 \times 10^{-2} fm^2 \quad (78)$$

mientras que el SET B está dado por

$$g = 2.98 \times 10^{-8} m_{\pi}^2; \quad g'/g = 1.69 \times 10^{-1} fm^2; \quad g''/g = 1.87 \times 10^{-2} fm^2 \quad (79)$$

El grupo de valores de la ecuación (78) corresponden a los parámetros determinados en la referencia [8], mientras que los que aparecen en (79) fueron obtenidos en la referencia [25].

3.2-Decaimientos no leptónicos en el modelo de Skyrme

Para calcular los decaimientos de hiperones dentro del modelo de Skyrme se deben incluir las fluctuaciones piónicas del solitón rotante dentro del contexto de la aproximación de coordenadas colectivas. Esto se realiza utilizando la siguiente forma para el campo quiral

$$U = U_M U_0(\vec{r}, t) U_M \quad (80)$$

donde $U_M = 1 + i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{2f_\pi} + \dots$

Insertando U_M en \mathcal{L}_W , expandiendo la expresión resultante a primer orden en el campo piónico, y tomando los elementos de matriz adecuados se pueden obtener las amplitudes correspondientes a las ondas S y P.

En los decaimientos con emisiones piónicas del tipo

$$B(p, \lambda) \rightarrow B'(p', \lambda') + \pi(q) \quad (81)$$

las amplitudes de los decaimientos de la onda S y de la onda P, denotadas A y B respectivamente, quedan definidas por

$$\bar{u}(p', \lambda') (A + B\gamma_5) u(p, \lambda). \quad (82)$$

Si se trabaja en el límite de pequeños impulsos la ecuación (82) se reduce a

$$A \xi^+(\lambda') \xi(\lambda) - \frac{B}{2M} \xi^+(\lambda') \sigma \cdot q \xi(\lambda) \quad (83)$$

donde \bar{M} es la masa bariónica promedio ($\bar{M} = \frac{M+M'}{2}$) y los términos de orden $p \frac{M-M'}{M}$ o $\frac{p^2}{M^2}$, etc., fueron despreciados. En las secciones siguientes trataremos las amplitudes A y B separadamente.

3.3-Cálculo de la amplitud de la onda S

Las amplitudes de la onda S se hallan insertando la ecuación (80) en \mathcal{L}_W . Para ser consistente con la aproximación semiclásica no se tendrán en cuenta las derivadas temporales actuando sobre U_0 ya que asumimos que el solitón rota lentamente. Como se quiere calcular las amplitudes de la onda S , tampoco es necesario considerar los términos en los cuales las derivadas temporales actúan sobre el campo piónico. En esta situación es posible efectuar el reemplazo $\partial_\mu U_0 \rightarrow U_M A(t) \partial_i U_0 A^{-1}(t) U_M \delta_{i\mu}$. En consecuencia (76) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W^{onda S} = & -g Tr \left[U_M^+ \lambda_6 U_M A \partial_i U_0 \partial_i U_0^+ A^+ \right] \\ & + g' Tr \left[U_M^+ \lambda_6 U_M A \partial_i U_0 \partial_i U_0^+ \partial_j U_0 \partial_j U_0^+ A^+ \right] \\ & + g'' Tr \left[U_M^+ \lambda_6 U_M A \partial_i U_0 \partial_j U_0^+ \partial_i U_0 \partial_j U_0^+ A^+ \right] \end{aligned} \quad (84)$$

En lo que sigue, y por simplicidad, consideraremos sólo los decaimientos con mesones π^0 en el estado final. La generalización para el caso de piones cargados se puede fácilmente obtener de la expresión para π^0 utilizando el teorema de Wigner-Eckart [26].

Expandiendo, entonces, U_M en serie de potencias de π^0

$$U_M \approx 1 + i \frac{\lambda_3 \pi}{2 f_\pi} \quad (85)$$

y utilizando la relación $[\lambda_6, \lambda_3] = i\lambda_7$ se obtiene $U_M^+ \lambda_6 U_M \approx \lambda_6 - \frac{\pi^0}{2f_\pi} \lambda_7$. (86)

Por otra parte como

$$\partial_i U_0 = \partial_i (c + i\vec{\tau} \cdot \vec{r} s) \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_8 \right) \quad (87)$$

resultan las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \partial_i U_0 \partial_i U_0^+ &= a \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_8 \right) \\ \partial_i U_0 \partial_i U_0^+ \partial_j U_0 \partial_j U_0^+ &= a^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_8 \right) \\ \partial_i U_0 \partial_j U_0^+ \partial_i U_0 \partial_j U_0^+ &= b \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_8 \right) \end{aligned} \quad (88)$$

donde $a = \left(f'^2 + 2 \frac{s^2}{r^2} \right)$, $b = \left(f'^4 - \frac{4s^2 f'^2}{r^2} \right)$, $s = \text{sen}(f(r))$ y $c = \text{cos}(f(r))$.

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (84) y usando las relaciones de conmutación de las matrices de Gell-Mann $[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W^{\text{onda } S} &= g \text{Tr} \left[a \left(\lambda_6 - \frac{\pi^0}{2f_\pi} \lambda_7 \right) A \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_8 \right) A^+ \right] \\ &\quad + g' \text{Tr} \left[a^2 \left(\lambda_6 - \frac{\pi^0}{2f_\pi} \lambda_7 \right) A \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_8 \right) A^+ \right] \\ &\quad + g'' \text{Tr} \left[b \left(\lambda_6 - \frac{\pi^0}{2f_\pi} \lambda_7 \right) A \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_8 \right) A^+ \right] \end{aligned} \quad (89)$$

Usando $\text{Tr}[\lambda_k] = 0$ y definiendo $D_{ab}(A) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_a A \lambda_b A^+)$ se obtiene

$$\mathcal{L}_W^{\text{onda } S} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(D_{68} - \frac{\pi^0}{2f_\pi} D_{78} \right) \left[-ga + g'a^2 + g''b \right] \quad (90)$$

Llevando a cabo la integral espacial y tomando los elementos de matriz correspondientes, la amplitud de decaimiento de la onda S para la emisión de π_0 resulta finalmente

$$A(B \rightarrow B' \pi_0) = I_0 \langle \Psi_{B'} | D_{78} | \Psi_B \rangle \quad (91)$$

$$\text{donde } I_0 = \frac{4\pi i}{\sqrt{3}f_\pi} \int dr r^2 \left[g \left(f'^2 + 2 \frac{s^2}{r^2} \right) - g' \left(f'^2 + 2 \frac{s^2}{r^2} \right)^2 - g'' \left(f'^4 - 4 f'^2 \frac{s^2}{r^2} \right) \right] \quad (92)$$

Los elementos de matriz de D_{78} entre las distintas funciones de onda colectivas que describen los estados bariónicos pueden ser calculados como combinaciones lineales de coeficientes de Clebsh-Gordan de SU(3). Para ello es conveniente realizar un cambio de coordenadas en las matrices de rotación pasando de “cartesianas” ($a = 1, \dots, 8$) a “esféricas” (Y, T, T_3). En el caso particular de D_{78} se obtiene

$$D_{78} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[D_{(1,1/2,-1/2);(0,0,0)}^8 - D_{(-1,1/2,1/2);(0,0,0)}^8 \right].$$

Como hemos visto en la sección 2.8 las funciones de onda bariónica (75) pueden ser expandidas en términos de las funciones de Wigner ($D_{\alpha\beta}^R$) pertenecientes a SU(3). Por lo tanto los elementos de matriz que buscamos son proporcionales a integrales sobre la variedad de SU(3) de productos de tres matrices de rotación, las cuales pueden expresarse en término de los Clebsch-Gordan. Se obtiene así

$$\langle \Psi_{B'} | \hat{O} | \Psi_B \rangle = \sum_{\mu, \nu, R'} \lambda_{\mu\nu}^{R'} \sum_{R, R', \delta} C_B^R (C_{B'}^{R'})^* \sqrt{\frac{\dim(R')}{\dim(R)}} \begin{pmatrix} R & R'' & R' \\ \alpha & \mu & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & R'' & R'_\delta \\ \beta & \nu & \beta' \end{pmatrix} \quad (93)$$

Los paréntesis simbolizan los coeficientes de los Clebsch-Gordan de SU(3) [27] y la suma sobre δ está referida a las situaciones en las cuales la expansión incluye más de una

representación con la misma dimensión. En (93) hemos considerado que el operador tiene la forma general

$$\hat{O} = \sum_{\mu, \nu, R} \lambda_{\mu\nu}^R D_{\mu\nu}^R \quad (94)$$

donde $\lambda_{\mu\nu}^R$ son coeficientes numéricos relacionados con integrales radiales dependientes del ángulo quiral. En el caso particular bajo consideración $\lambda_{(1,1/2,-1/2);(0,0,0)}^8 = \frac{i}{\sqrt{2}} I_0$ y $\lambda_{(-1,1/2,1/2);(0,0,0)}^8 = -\frac{i}{\sqrt{2}} I_0$.

3.4-Cálculo de la amplitud de la onda P

Como hemos visto, en el límite no relativista la amplitud de onda P está definida por

$$\frac{B}{2\bar{M}} \xi^+(\lambda') \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \xi(\lambda) \quad (95)$$

donde \vec{q} es el momento del pión, $\vec{\sigma}$ es el operador de espín y \bar{M} es el promedio de las masas bariónicas.

En este modelo la amplitud de onda P tiene dos clases diferentes de contribuciones [8]: de contacto y la de tipo polo (ver figura 3)

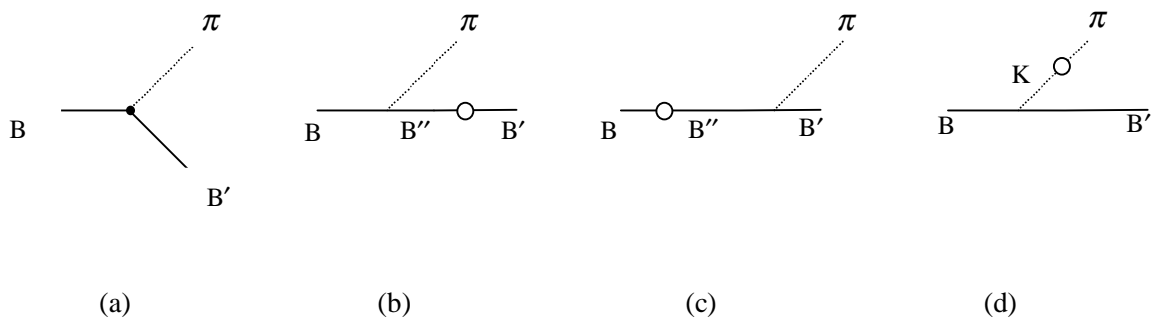


Figura 3: Diagramas que contribuyen a los decaimientos correspondientes a la onda P:

(a) contribución de contacto; (b) y (c) contribuciones polares bariónicas; (d) contribución polar kaónica.

3.4.1- Contribuciones de contacto

Las contribuciones de contacto a la amplitud de onda P se obtienen reemplazando (80) en \mathcal{L}_W , y tomando los elementos de matriz proporcionales a $\partial_i \pi$, es decir aquellos que contengan una única derivada espacial actuando sobre el campo piónico.

Definiendo $R_i = U \partial_i U^+$ la densidad lagrangiana (76) toma la forma

$$\mathcal{L}_W = g \text{Tr} [\lambda_6 R_i R_i] + g' \text{Tr} [\lambda_6 R_i R_i R_k R_k] + g'' \text{Tr} [\lambda_6 R_i R_k R_i R_k] \quad (96)$$

recordando que $U = U_M A U_0 A^+ U_M$ y desarrollando R_i a orden más bajo en $\partial_i \pi$

obtenemos $R_i = -\frac{i}{2f_\pi} (A U_0 A^+ \lambda_8 \partial_i \pi^0 A U_0^+ A^+ + \lambda_8 \partial_i \pi^0)$. Reemplazando en la ecuación

(96) y trabajando algebraicamente los términos se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W^{\text{onda P}} = & g \frac{\partial_i \pi^0}{2f_\pi} \alpha_{im} D_{6a} D_{3b} \text{Tr} [\lambda_a \{ \lambda_m, (\lambda_b + \Lambda_b) \}] \\ & - g' \frac{\partial_i \pi^0}{2f_\pi} a D_{6a} D_{3b} \alpha_{im} \text{Tr} \left[\lambda_a \left\{ \{ \lambda_m, \Lambda_b \}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_8 \right\} \right] \\ & - g'' \frac{\partial_i \pi^0}{2f_\pi} D_{6a} D_{3b} \alpha_{an} \alpha_{al} \alpha_{is} \left[\text{Tr} [\lambda_a \{ \lambda_l \lambda_s, \lambda_n \Lambda_b \}] + \text{Tr} [\lambda_a \{ \lambda_s \lambda_l, \Lambda_b \lambda_n \}] \right] \end{aligned} \quad (97)$$

donde $\Lambda_b = \lambda_b + U_0 \lambda_b U_0^+$, $\alpha_{ij} = -\frac{sc}{r} \delta_{ij} - \left(f' - \frac{sc}{r} \right) \hat{r}_i \hat{r}_j + \frac{s^2}{r} \epsilon_{ijk} \hat{r}_k$ y $a = f'^2 + \frac{2s^2}{r^2}$

El cálculo de las trazas, si bien no tiene mayores complicaciones, resulta muy engorroso de realizar. Por lo tanto se recurrió aquí al uso del programa de computación Mathematica. Se obtuvo que el término de contacto en el caso de emisión de π_0 resulta

$$B_{\text{contacto}} (B \rightarrow B' \pi_0) = -\frac{2\bar{M}}{3f_\pi} \langle \Psi_{B'} | \int d^3x (I_1 D_{63} + I_2 D_{33}^+ + I_3 D_{33}^-) | \Psi_B \rangle \quad (98)$$

donde $D_{ij}^\pm = D_{68} D_{ji} \pm D_{6i} D_{j8}$ y

$$\begin{aligned}
I_1 &= g(1+c) \left(\frac{2s}{r} + f' \right) - g' \left(f'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right) \left(f'(1+c) + \frac{2s}{r} + \frac{2sc}{r} \right) \\
&\quad + g'' \left(-f'^3(1+c) + \left(\frac{f'}{r^2} s + \frac{f'^2}{r} \right) (2s(1+c)) \right) \\
I_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} g(1-c) \left(\frac{2}{r} r - f' \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} g' \left(f'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right) \left(f'(3-c) - \frac{2s}{r} + \frac{6sc}{r} \right) \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} g'' \left(\frac{4}{r^3} s^3 c - 2s(c-1) \left(\frac{f'^2}{r} - \frac{f's}{r^2} \right) + f'^3(3-c) \right) \\
I_3 &= -g'' \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{f'^2}{r} 2sc + \frac{2f's^2}{r^2} + \frac{2s^3c}{r^3} \right)
\end{aligned} \tag{99}$$

Al igual que en caso de la onda S resulta conveniente expresar los índices de las matrices de Wigner en términos de sus contrapartes “esféricas”. Haciendo este reemplazo y utilizando la expansión de Clebsch-Gordan de los productos de dos matrices resulta que el operador relevante para las contribuciones de la onda P también puede llevarse a la forma (94) y sus elementos de matriz se pueden calcular mediante (93).

3.4.2- Contribuciones tipo polo

Estas contribuciones están dadas por los diagramas (b)-(d) de la figura 3. Utilizando las reglas de Feynman correspondientes la expresión analítica de los mismos es

$$B_{BB'}^{polo} = - \left[\frac{g_{B'B'\pi} a_{B'B}}{m_B - m_{B'}} + \frac{g_{B'B\pi} a_{B'B'}}{m_{B'} - m_B} - \frac{g_{BB'K} a_{K\pi}}{m_K^2 - m_\pi^2} \right] \tag{100}$$

donde el último término corresponde a la contribución tipo polo del kaón. En la expresión (100) $g_{BB'M}$ son las constantes de acoplamiento fuerte y $a_{BB'}$ son los elementos de matriz del Hamiltoniano de la onda S.

La relación entre las amplitudes de la onda S $A(B \rightarrow B'\pi^0)$ y los elementos de matriz del Hamiltoniano débil está dado por la siguiente expresión [22]

$$A(B \rightarrow B'\pi^0) = -\frac{1}{f_\pi} \langle B' | [I_3, H_W^{PC}] | B \rangle \quad (101)$$

Aplicando (101) a los casos de interés obtenemos por ejemplo

$$A(\Lambda \rightarrow n\pi^0) = -\frac{1}{f_\pi} \langle n | I_3 H_W^{PC} - H_W^{PC} I_3 | \Lambda \rangle = \frac{a_{n\Lambda}}{2f_\pi} \quad (102)$$

o en forma más general $A(B \rightarrow B'\pi^0) = \frac{a_{B'B}}{2f_\pi}$. Por otro lado para relacionar las constantes

de acoplamiento $g_A^{BB'}$ con el vértice $g^{BB'M}$ es posible utilizar la relación de Goldberger-Treiman generalizada

$$g_A^{BB'} = \frac{\sqrt{2} f_\pi}{M_B + M_{B'}} g^{BB'M} \quad (103)$$

Reemplazando entonces (102) y (103) en la expresión (100) obtenemos

$$B_{\text{polo}}(B' \rightarrow B\pi_0) = -2\sqrt{2}M \sum_{B''} \left[g_A^{B'B''} \frac{A(B \rightarrow B''\pi_0)}{M_B - M_{B''}} + g_A^{BB''} \frac{A(B'' \rightarrow B'\pi_0)}{M_{B''} - M_{B'}} \right] \quad (104)$$

En esta expresión lo único que nos resta saber es como calcular

$$g_A^{BB'} = \langle B' | \hat{g}_A | B \rangle \quad (105)$$

Como se mostró para el caso de dos sabores el operador de carga axial se puede obtener a partir de la acción efectiva fuerte [28]. En el presente caso la expresión resultante es

$$\hat{g}_A = \sqrt{2} \int d\Omega (A_{3,oml}^3 + A_{3,SK}^3 + A_{3,SB}^3 + A_{3,WZ}^3) = \sqrt{2} \int d\Omega A_{3,total}^3 \quad (106)$$

$$A_{3,total}^3 = \int dr r^2 (a_1 D_{33} + a_2 d_{ikk'} D_{ak} \Omega_{k'} + a_3 D_{88} D_{33} + a_4 D_{83} D_{38}) \quad (107)$$

$$a_1 = \frac{-2s}{3e^2 r} \left(f'^2 c + \frac{s^2 c}{r^2} + \frac{f' s}{r} \right) - \frac{1}{3} f_\pi^2 \left(\frac{2sc}{r} + f' \right) - \frac{2}{9} (f_K^2 - f_\pi^2) \left(-c \left(\frac{2sc}{r} + f' \right) + \phi^2 \left(\frac{2s}{r} + f' \right) \right)$$

$$a_2 = -\frac{Nc}{18\pi^2 r} s \phi^2 \left(\frac{s}{r} - 2f' \right)$$

$$a_3 = \frac{2}{9} (f_K^2 - f_\pi^2) \left[2\frac{s}{r} + f' c - \phi^2 \left(\frac{2s}{r} + f' \right) \right]$$

$$a_4 = \frac{2}{9} (f_K^2 - f_\pi^2) \left[c \left(\frac{2sc}{r} + f' \right) - \phi^2 \left(\frac{2s}{r} + f' \right) \right]$$

$$\text{donde, } \phi = \text{sen} \left(\frac{f(r)}{2} \right) \text{ y } \psi = \text{cos} \left(\frac{f(r)}{2} \right).$$

Es importante tener en cuenta que B_{polo} (104) incluye una suma sobre estados intermedios B'' , que en este caso son aquellos con $J''=1/2^+$. Las correspondientes autofunciones se obtienen a partir de la diagonalización exacta del Hamiltoniano colectivo.

3.5-Contribución de las componentes no octetes

Como se mencionó al comienzo de este capítulo las amplitudes de decaimiento no leptónicas están dominadas por las componentes tipo octete del lagrangiano efectivo débil. Sin embargo si sólo se consideran dichas componentes la amplitud de onda S del decaimiento $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ se anula exactamente. Dado que experimentalmente la misma tiene un valor significativamente pequeño pero diferente de cero, es necesario tener en cuenta contribuciones no octetes al lagrangiano efectivo. Nos concentraremos aquí en la amplitud de decaimiento de la onda S.

A orden p^2 la contribución tipo 27 puede escribirse como [21]

$$\mathcal{L}_2^{(27)} = c_3 t_{cd}^{ab} \text{Tr} \left[Q_a^c U^+ \partial_\mu U \right] \text{Tr} \left[Q_d^b U^+ \partial^\mu U \right] \quad (108)$$

donde $(Q_a^c)_{ij} = \delta_{cj}\delta_{ai}$ y $t_{21}^{31} = t_{12}^{13} = t_{13}^{12} = t_{31}^{21} = \frac{3}{2}$, $t_{12}^{31} = t_{21}^{13} = t_{13}^{21} = t_{31}^{12} = 1$ siendo $t_{cd}^{ab} = 0$ en otro caso.

En nuestros cálculos incluiremos también los siguientes términos de $O(p^4)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{(27)} = & g_1 t_{cd}^{ab} Tr[Q_a^c L_\mu] Tr[Q_d^b L_\nu L^\mu L^\nu] + g_2 t_{cd}^{ab} Tr[Q_a^c L_\mu] Tr[Q_d^b \{L^\mu, L^\nu\}] \\ & + g_3 t_{cd}^{ab} Tr[Q_a^c [L_\mu, L_\nu]] Tr[Q_d^b [L^\mu, L^\nu]] \end{aligned} \quad (109)$$

Al igual que en el caso de los octetes de la sección 3.1 existen más términos tipo 27 permitidos [21]. Dado que las correspondientes constantes no pueden ser totalmente determinadas a partir de la información experimental disponible en el sector kaónico procederemos aquí como en la sección mencionada. Utilizaremos el lagrangiano (109) ya que éste es suficiente para un buen ajuste de los decaimientos de $K \rightarrow 2\pi$ y $K \rightarrow 3\pi$.

De la referencia [25] fueron tomados los siguientes valores $g_1 \cong 1.0 \times 10^{-10}$, $g_2 \cong -0.4 \times 10^{-10}$, $g_3 \cong 0.1 \times 10^{-10}$, junto con $\frac{c_3}{f_\pi^2} \cong -0.8 \times 10^{-9}$

$$(110)$$

Reemplazando (80) en (108) y (109) se encuentra

$$A^{(27)}(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+) = \frac{\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}(I_2 + I_4) \langle n | D_{(1,3/2,-3/2);(0,0,0)}^{27} | \Sigma^+ \rangle \quad (111)$$

$$\begin{aligned} I_2 = & -\frac{16\pi}{3f_\pi} c_3 \int dr r^2 \left(f'^2 + 2 \frac{s^2}{r^2} \right) \\ I_4 = & -\frac{16\pi}{3f_\pi} \int dr r^2 \left[g_1 f'^2 \left(f'^2 - 4 \frac{s^2}{r^2} \right) + 2g_2 \left(f'^2 + 2 \frac{s^2}{r^2} \right)^2 + g_3 \frac{8s^2}{r^2} \left(2f'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (112)$$

4-RESULTADOS OBTENIDOS

En este capítulo presentamos los resultados numéricos obtenidos en este trabajo. Estos han sido hallados utilizando los valores experimentales de las constantes de decaimiento (f_π, f_K) y de las masas intervinientes (m_π, m_K), dejando sólo como parámetros ajustables la constante e y las constantes de acoplamiento débil g, g' y g'' . El valor de la constante e fue determinado de manera de obtener el mejor espectro de masas posible y los valores de las constantes de acoplamiento débil fueron hallados del ajuste experimental de los decaimientos $K \rightarrow 2\pi$ y $K \rightarrow 3\pi$ tal como se explicó en la sección 3.1. Los valores utilizados para los parámetros de la acción efectiva fuerte (66) pueden verse en la tabla 4 mientras que los correspondientes a las de la acción efectiva débil (76) son las de las ecuaciones (78) y (79), que corresponden al SET A y al SET B, respectivamente.

Parámetro	Valor
f_π	93 Mev
f_K / f_π	1.29
m_π	138 Mev
m_K	495 Mev
e	4.1

Tabla 4: Valores de los parámetros de la acción efectiva (66) utilizados en los cálculos del presente trabajo.

El perfil del solitón fue obtenido resolviendo numéricamente la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange (20) con las condiciones de contorno $f(0) = \pi$ y $f(\infty) = 0$. El resultado obtenido se puede observar en la figura 2.

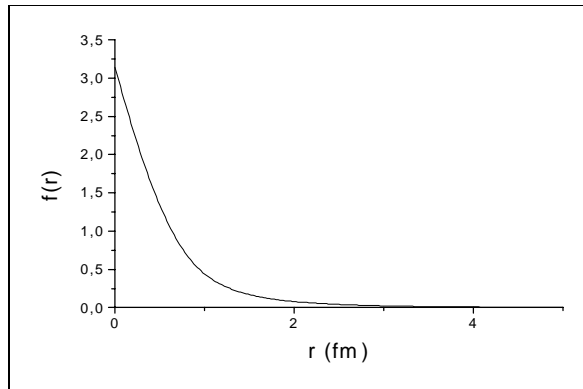


Figura 2: Perfil del ángulo quirral para la configuración del hedgehog obtenido de la solución de la ecuación (20) con $B = 1$.

Una vez obtenido el perfil del solitón se procedió a diagonalizar el Hamiltoniano colectivo para de esta manera determinar las masas de los bariones y sus respectivas funciones de onda. Los valores obtenidos para los estados de menor masa aparecen en las tablas 5 y 6 respectivamente.

Como se puede observar en la tabla 5 el valor absoluto de las masas resulta mucho mayor que el experimental. Hoy en día se sabe que esto está relacionado con las energías de Casimir [29, 30, 31]. Al ser tenidas en cuenta, estas energías proveen correcciones que mejoran notablemente las predicciones. La idea es la siguiente: las fluctuaciones mesónicas en el vacío producen una energía infinita por lo que para lograr tener un valor finito y poder trabajar con ella se debe renormalizar el resultado redefiniendo el cero de la energía. Las fluctuaciones de la energía del pión alrededor del solitón también producen un valor infinito. Sin embargo, debido a la existencia de una interacción con el solitón el valor es diferente. Entonces para calcular adecuadamente la masa del solitón se debe de tomar en cuenta la diferencia entre ambas energías de vacío. Esa diferencia ($\approx (1-2)$ Gev) es

justamente la que se observa entre los valores calculados y los empíricos. Por otra parte observamos también en la tabla 5 que las separaciones entre las masas de los distintos bariones es reproducida adecuadamente por el modelo.

Partícula	Valor experimental (Mev)	$M_B - M_N$ Experimental (Mev)	Valor teórico (Mev) (Sin incluir energías de Casimir)	$M_B - M_N$ Teórico (Mev)
N	940	----	2480	-----
Λ	1115	175	2649	169
Σ	1192	252	2763	283
Ξ	1320	380	2884	404
Δ	1232	292	2792	312
Σ^*	1385	445	2934	454
Ξ^*	1530	590	3074	594
Ω	1672	732	3208	728

Tabla 5: Resultados obtenidos diagonalizando el Hamiltoniano (73) en forma exacta [12]. $M_B - M_N$ significa la diferencia entre el valor de la masa bariónica y la masa del nucleón.

En la tabla 6 podemos ver los coeficientes (C_B^R) correspondientes a cada una de las representaciones que componen las funciones de onda de los bariones cuya componente dominante pertenece al octete o al decuplete. Estos valores pertenecen al estado de menor energía y se han obtenido mediante la diagonalización exacta del Hamiltoniano (73). Se observa que los estados incluidos alcanzan para describir en forma muy precisa la función de onda exacta ya que los coeficientes correspondientes a las últimas representaciones incluidas resultan ser completamente despreciables. También es importante notar que en todos los casos más de un 15% de la amplitud total se encuentra distribuida entre las representaciones distintas de la dominante.

(p,q)	N	Λ	Σ	Ξ
(1,1)	0.949	0.965	0.916	0.967
(0,3)	0.243	----	0.338	----
(2,2)	0.196	0.260	0.205	0.255
(1,4)	0.040	----	0.061	----
(3,3)	0.021	0.032	0.023	0.032
(2,5)	0.004	----	0.006	----
(4,4)	0.001	0.002	0.002	0.002
(3,6)	2×10^{-4}	----	3×10^{-4}	----
(5,5)	7×10^{-5}	1×10^{-4}	8×10^{-5}	1×10^{-4}

(p,q)	Δ	Σ^*	Ξ^*	Ω
(3,0)	0.856	0.893	0.937	0.984
(2,2)	0.489	0.410	0.290	----
(4,1)	0.129	0.171	0.189	0.180
(1,4)	0.092	0.052	----	----
(3,3)	0.048	0.052	0.040	----
(5,2)	0.011	0.016	0.019	0.017
(0,6)	0.008	----	----	----
(2,5)	0.008	0.006		----
(4,4)	0.003	0.004	0.003	----
(6,3)	6×10^{-4}	0.001	0.001	0.001
(1,7)	6×10^{-4}	----	----	----
(3,6)	4×10^{-4}	3×10^{-4}	----	----
(5,5)	1×10^{-4}	----	2×10^{-4}	----
(7,4)	2×10^{-5}	----	5×10^{-5}	4×10^{-5}

Tabla 6: Valores de los coeficientes C_B^R de la función de onda bariónica ecuación (75) correspondientes al estado de mínima energía obtenidos mediante la diagonalización exacta del Hamiltoniano colectivo. Representaciones mayores a las indicadas dan lugar a coeficientes $C_B^R \leq 10^{-5}$.

Los resultados numéricos para las amplitudes de onda S pueden verse en la tabla 7. Se comparan allí los resultados obtenidos en el presente cálculo con los obtenidos en el modelo de quarks (QM), en el modelo de Skyrme a orden perturbativo (PTA) y con los valores experimentales. Se observa que los valores están por debajo de los experimentales, pero en relación a los del QM se puede decir que son de calidad similar. En cuanto a la diferencia entre nuestros resultados y los hallados en PTA vemos que los valores del método perturbativo son mucho más pequeños debido al tratamiento del término de quiebre de simetría en forma perturbativa y a la utilización en dicho cálculo de un valor de f_π aproximadamente igual a la mitad de su valor experimental.

El valor nulo obtenido para el decaimiento $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ se debe al hecho que en el lagrangiano efectivo débil sólo hemos utilizado términos tipo octete. De los dos conjuntos de constantes de acoplamiento débil usados vemos que el SET A produce valores que se encuentran un 30% por debajo del valor experimental mientras que los del SET B están en un 44% por debajo del mismo. En consecuencia el primero es el que mejor reproduce los valores experimentales si bien la diferencia entre ambos sets no es muy significativa.

<i>Transición</i>	<i>Presente modelo</i>		<i>QM</i>	<i>PTA</i>	<i>Experimental</i>
	<i>SET A</i>	<i>SET B</i>			
$\Lambda_0 \rightarrow n\pi_0$	1.63	1.28	1.5	0.49	2.37
$\Sigma^+ \rightarrow p\pi_0$	-2.48	-1.94	-3.8	-0.70	-3.27
$\Xi^0 \rightarrow \Lambda\pi_0$	2.37	1.86	3.0	0.76	3.43
$\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$	0	0	0	0	0.13

Tabla 7: Cálculo de las amplitudes de decaimiento de hiperones no leptónicos en la onda S, comparados con los datos experimentales, con los cálculos del modelo de quark (QM) [4] y con la aproximación perturbativa al modelo de Skyrme (PTA) [11]. Todos los valores deben ser multiplicados por 10^{-7} .

Para el cálculo de los decaimientos de la onda P es necesario conocer, además de las amplitudes de decaimiento de la onda S, los elementos de matriz de la constante de acoplamiento axial (105) y (106) ya que ellos intervienen en las contribuciones tipo polo. Los valores obtenidos se presentan en la tabla 8.

\mathbf{B}''	$g_A^{nn'}$	$g_A^{\Lambda\Sigma_0''}$	$g_A^{p'p}$	$g_A^{\Sigma^+\Sigma^+''}$	$g_A^{\Sigma^0\Lambda''}$	$g_A^{\Sigma^0\Lambda}$	$g_A^{\Xi_0\Xi_0''}$
1	0.529	-0.462	-0.529	-0.461	-0.462	-0.462	0.151
2	0.137	-0.257	-0.137	-0.172	-0.035	-0.257	0.027
3	0.015	-0.051	-0.015	0.013	-0.002	-0.051	0.003
4	0.010	-0.018	-0.010	-0.019	-1×10^{-4}	-0.018	2×10^{-4}
5	0.001	-0.008	-0.001	0.002	-4×10^{-6}	-0.008	8×10^{-6}

Tabla 8: Valores de $g_A^{B_1, B_2}$. Se incluyen sólo los estados bariónicos relevantes para el cálculo de las contribuciones polo de las figuras 3b y 3c. Los valores hasta el cuarto estado excitado del barión intermedio son indicados.

Es importante destacar que el valor de la constante de acoplamiento axial para el decaimiento β del neutrón que resulta del presente cálculo es $g_A = 0.749$, es decir que está bastante por debajo del valor experimental $g_A^{\text{exp}} = 1.25$. Es de esperar que algo similar ocurra con el resto de los valores obtenidos para las constantes de acoplamiento axiales.

En la tabla 9 se encuentran los resultados obtenidos para la amplitud de la onda P, tanto las contribuciones tipo polo y de contacto como la total. Comparando los resultados del SET A con los del B es de notar que si bien parece haber diferencia cuando se considera cada contribución por separado, tal diferencia desaparece al sumar ambas contribuciones.

En general nuestros resultados se encuentran muy por debajo (en valor absoluto) de los valores experimentales: 65% en el decaimiento $\Lambda_0 \rightarrow n\pi_0$ y 85% en los restantes.

En este sentido, la situación es similar a la de otros modelos, como el de quarks o el de teoría perturbaciones quiral de bariones pesados. En esta comparación el ajuste quiral corresponde al orden más bajo en el cálculo quiral, igualmente yendo a órdenes más altos en aproximaciones no se observan mayores diferencias [32,33]

<i>Transición</i>	<i>Presente modelo</i>						<i>Ajuste quiral</i>	<i>Experimental</i>
	<i>SET A</i>			<i>SET B</i>				
	<i>Polo</i>	<i>Contacto</i>	<i>Total</i>	<i>Polo</i>	<i>Contacto</i>	<i>Total</i>		
$\Lambda_0 \rightarrow n\pi_0$	-5.15	-0.38	-5.53	-4.04	-1.46	-5.50	-16	-15.8
$\Sigma^+ \rightarrow p\pi_0$	2.73	2.23	4.96	2.14	2.27	4.41	10	26.6
$\Xi^0 \rightarrow \Lambda\pi_0$	1.98	-0.27	1.71	1.55	-0.003	1.55	3.3	-12.3
$\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$	-0.65	4.52	3.87	-0.51	3.57	3.06	4.3	42.2

Tabla 9: Cálculo de las amplitudes de decaimiento de hiperones no leptónicos en la onda P, en comparación con los datos empíricos y con cálculos hechos a orden más bajo en el ajuste quiral [34]. Todos los valores deben multiplicarse por 10^{-7} .

En cuanto a los términos de contacto se ve que, en general, no dan lugar a una contribución muy significativa al valor total de la amplitud de decaimiento de la onda P. En referencia a los términos tipo polo es importante recordar que la ecuación (104) contiene una suma sobre estados intermedios B'' , que como se ha mencionado, en el presente cálculo corresponden a los estados con $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ cuyas autofunciones provienen de la diagonalización exacta del Hamiltoniano colectivo. En la tabla 10 se indica la contribución de cada término de la suma mencionada para el caso del SET A. De esta tabla resulta claro

<i>Estados intermedios(B'')</i>	$\Lambda \rightarrow n\pi^0$	$\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$	$\Sigma^0 \rightarrow n\pi^0$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\pi^0$
1	-6.588	-1.795	-3.594	3.373
2	1.472	-0.879	0.981	-1.654
3	-0.041	-0.057	0.023	0.265
4	0.005	-8×10^{-4}	0.004	-0.003
5	1×10^{-4}	-2×10^{-4}	5×10^{-5}	0.001
6	3×10^{-6}	9×10^{-7}	5×10^{-6}	-1×10^{-6}
7	2×10^{-7}	-3×10^{-7}	7×10^{-8}	1×10^{-6}
8	6×10^{-10}	1×10^{-9}	2×10^{-9}	-7×10^{-11}
9	1×10^{-10}	-2×10^{-10}	5×10^{-11}	9×10^{-10}
10	-7×10^{-13}	3×10^{-13}	1×10^{-12}	-1×10^{-13}

Tabla 10: Contribución tipo polo de los estados intermedios B'' de la ecuación (104) correspondiente al SET A. Todos los valores deben ser multiplicados por 10^7 .

que sólo unos pocos estados excitados son necesarios para encontrar una buena convergencia. Igual conclusión surge de considerar el SET B. Es importante destacar que en el presente cálculo se utilizaron los valores experimentales de las masas para calcular las

masas medias que aparecen en la ecuación (104) mientras que las diferencias de masas fueron evaluadas con los valores obtenidos de la diagonalización exacta del Hamiltoniano (73).

Para estudiar la dependencia de nuestros resultados respecto del valor del parámetro e hemos considerado apartamientos alrededor del valor central $e = 4.1$. Se encontró que los valores absolutos de las amplitudes de onda crecen al aumentar el valor de e . Considerando como ejemplo la correspondiente al proceso $\Lambda \rightarrow n\pi^0$ para el SET A se obtiene que para $e = 4.5$, lo cual implica un incremento del 25% de la separación de masas $\Delta - N$, la amplitud de la onda S resulta ser $\approx -2 \times 10^{-7}$ valor que se aproxima satisfactoriamente al experimental. De todos modos la correspondiente amplitud para la onda P está en un 50% por debajo del valor empírico.

Respecto a la contribución de términos no octetes a la amplitud de decaimiento $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ los resultados se indican en la tabla 11. Se observa que la predicción del presente cálculo resulta ser un orden de magnitud menor que el valor empírico. Esto indica que el modelo utilizado no es capaz de dar cuenta de los apartamientos de la regla $\Delta I = \frac{1}{2}$ observados empíricamente.

<i>Decaimiento</i>	<i>Valor teórico</i>	<i>Valor experimental</i>
$\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$	0.01	0.13

Tabla 11: Comparación de los resultados obtenidos mediante la inclusión de términos no octetes en el lagrangiano efectivo débil. Estos valores deben ser multiplicados por 10^{-7} .

5-CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado los decaimientos débiles no leptónicos dentro del modelo solitónico de bariones de Skyrme. Para ello se utilizó una extensión del mismo a SU(3) en la cual se tratan los grados de libertad de isospín y de extrañeza como rotaciones colectivas alrededor del ansatz de SU(2) diagonalizado el término de quiebre de simetría en forma exacta. Para la descripción de los decaimientos débiles se usó una acción efectiva débil que permite describir en forma satisfactoria los decaimientos $K \rightarrow 2\pi$ y $K \rightarrow 3\pi$.

Respecto de los resultados obtenidos para la onda S, observamos una mejora en los valores calculados al compararlos con cálculos previos basados en lagrangianos efectivos débiles quirales [7]. Resultados similares se han obtenido recientemente usando una forma simple tipo corriente-corriente para las interacciones débiles [35]. Aunque las predicciones del modelo en este trabajo están un 30% por debajo de las empíricas pueden considerarse satisfactorias debido al hecho de que nuestro cálculo no tiene ningún parámetro libre, ya que los valores de los mismos han sido tomados ya sea del experimento o del ajuste de masas bariónicas y de los decaimientos mesónicos. Es de notar que las posibles correcciones a nuestros resultados debidas a términos superiores en la expansión en el número de colores N_c son precisamente de ese orden.

Respecto a la onda P, desafortunadamente las contribuciones del término de contacto son demasiado pequeñas como para que al ser sumadas a las obtenidas de los diagramas tipo polo los resultados se acerquen en forma significativa a los valores experimentales.

Dentro del modelo de Skyrme con las aproximaciones realizadas en este trabajo no parece ser posible la solución del problema de explicar al mismo tiempo ambas ondas S y P [36].

Por último estimamos la contribución de términos no octetes en el lagrangiano efectivo débil. Debido a que son contribuciones muy pequeñas sólo se calculó la amplitud de decaimiento de la onda S de $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$. Si bien el resultado obtenido es un orden de magnitud menor que el valor experimental, es significativo debido a que esta amplitud se anula en el caso en que en la acción sólo se consideren términos octetes.

En suma, si bien algunos resultados del presente trabajo implican una notable mejora frente a los existentes en la literatura, es claro que aún resta trabajo por hacer para que el modelo de solitones de lugar a una descripción adecuada de los decaimientos no leptónicos.

En este sentido tal vez tomando funciones de onda más refinadas y/o interacciones efectivas débiles más adecuadas se puedan mejorar los resultados y además, entender los efectos relacionados con la (pequeña) violación de la regla $\Delta I = \frac{1}{2}$ observada en los decaimientos de la onda S.

APÉNDICE

Acción de Wess-Zumino y número de colores

La ecuación de movimiento asociada al modelo σ no lineal está dada por

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu U} - U^+ \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu U^+} U^+ = 0 \quad (\text{A1})$$

Debido a la simetría extra que aparece en este modelo, Witten sugirió sumar un término adicional a la ecuación de movimiento, con el fin de darle el sentido pseudoescalar requerido por QCD. Es decir, $\hat{P}\pi(x,t) = -\pi(x,t)$, donde \hat{P} es el operador paridad definido como

$$\hat{P} : x \rightarrow -x; t \rightarrow t; U \rightarrow U^+. \quad (\text{A2})$$

En consecuencia se obtiene una única ecuación

$$2f_\pi^2 \partial_\mu \ell_\mu + \lambda \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \ell_\mu \ell_\nu \ell_\rho \ell_\sigma = 0, \quad (\text{A3})$$

donde $\ell_\mu = U^+ \partial_\mu U$ que satisface este requerimiento si se restringe al orden más bajo en el número de derivadas.

Este nuevo término es impar bajo $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow t$, mientras que el primero y los ordenes más altos (como el \mathcal{L}_{SK}) son pares.

Bajo el reemplazo de $U \rightarrow U^+$ en la última ecuación, usando $U \partial_\mu U^+ = -\partial_\mu U U^+$ y multiplicando a la izquierda por U^+ y a la derecha por U , se ve que el primer término es impar mientras que el último es par. O sea que (A3) es invariante sólo bajo la acción combinada de \hat{P} como se definió en (A2).

Existe una dificultad que viene del hecho de que la acción correspondiente al término adicional en (A4) no puede ser escrita como una integral de 4 dimensiones en el espacio-tiempo. Sin embargo sí es posible si se incluye una coordenada adicional, de manera que el espacio-tiempo sea el contorno del volumen M de 5d.

$$\Gamma = \lambda \int_M \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[\ell_\mu \ell_\nu \ell_\alpha \ell_\beta \ell_\gamma] d^5x = \int_M \omega \quad (\text{A4})$$

Witten observó que λ debía ser un múltiplo entero de $\alpha = \left(\frac{-1}{240\pi^2}\right)$. El origen de esta cuantificación proviene del hecho de que el contorno de un volumen M es también el contorno de un volumen complementario M' , el cual junto con M determinan el espacio completo. Otra elección del camino de integración podría dar lugar al mismo resultado (notar el cambio de signo debido a la orientación opuesta del contorno).

$$\exp\left(i \int_M \omega\right) = \exp\left(-i \int_{M'} \omega\right) \quad \text{o}' \quad \int_{M+M'} \omega = 2\pi n \quad (\text{A5})$$

El significado físico del entero n es determinado mediante la conexión con QCD, ya que partiendo de ella las anomalías llevan un factor N_c . En consecuencia el término de la acción efectiva que las representa debe llevar ese mismo factor.

Witten mostró que los efectos de las anomalías de QCD se reproducen si se elige $n = N_c$, con lo cual $\lambda = N_c \left(\frac{-1}{240\pi^2}\right)$. Se obtiene así la acción de Wess-Zumino (65).

En término de las coordenadas colectivas definidas en (69) si se integra la ecuación (A4) se obtiene $\Gamma = \frac{a_8 N_c}{2\sqrt{3}}$. Debido a que en la ecuación (70) la coordenada a_8 sólo contiene una

derivada temporal, no contribuye a la energía, pero sí fija el número cuántico $Y_R = \frac{N_c}{3}$ y

de esta forma determina la representación más baja posible para los bariones y su espín.

Para $N_c = 3$ se obtiene de esta manera que las representaciones permitidas tienen espín semientero, es decir corresponden a fermiones.

REFERENCIAS

- [1] R. L. Garwin, L. M. Lederman y M. Weinrich, Phys. Rev. 105,1415 (1957).
- [2] J. I. Friedmann, V. L. Telegdi, Phys. Rev. 105,1681 (1957).
- [3] F. E. Close, *Quarks and Partons* (Academic Press, London, 1979).
- [4] J. F. Donoghue, E. Golowich y B. R. Holstein, Phys. Rep. 131, 319 (1986).
- [5] E. Jenkins, Nucl. Phys. B375, 561 (1992).
- [6] E. M. Henley, W-Y. P. Huang and L. S. Kisslinger, hep-ph / 9912530.
- [7] I. Zahed y G. E. Brown, Phys. Rep. 142 (1986); G. Holzwarth and B. Schwesinger, Rep. Prog. Phys. 49, 825 (1986).
- [8] J. F. Donoghue, E. Golowich y Y-C. R. Lín, Phys. Rev. D32, 1733 (1985); (E) D33, 2728 (1986).
- [9] M. Praszalowicz , Phys. Lett. 158B, 264 (1985).
- [10] M. Chemtob, Nucl. Phys. B256, 600 (1985).
- [11] M. Praszalowicz y J. Trampetic, Phys. Lett. 161B, 169 (1985).
- [12] H. Yabu y K. Ando, Nucl. Phys. B301, 601 (1988).
- [13] H. Weigel, Int. J. Mod. Phys. A11, 2419 (1996).
- [14] J. F. Donoghue, E. Golowich y B. R. Holstein, Phys. Rev. D30, 587 (1984).
- [15] G. t'Hooft, Nucl. Phys. B72, 461 (1974).
- [16] E. Witten, Nucl. Phys. B160, 57 (1979).
- [17] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1989).
- [18] G. Pari, B. Schwesinger y H. Walliser, Phys. Lett. B255, 1 (1991).
- [19] J. Kim, C. Lee y H. Lee, Nucl. Phys. A501, 835 (1989).

- [20] J. Cronin, Phys. Rev. 161, 1483 (1967).
- [21] J. Kambor, J. Missimer y D. Wyler, Nucl. Phys. B346, 17 (1990).
- [22] R. E. Marshak, Riazuddin y C. P. Ryan, *Theory of Weak Interactions in Particle Physics* (J Wiley & Sons, New York, 1969).
- [23] J. Kambor, J. F. Donoghue, B. R. Holstein, J. Missimer y D. Wyler, Phys. Rev. Lett. 68, 1818 (1992).
- [24] E. Golowich, Phys. Rev. D35, 2764 (1987).
- [25] J. Kambor, J. Missimer y D. Wyler, Phys. Lett. B261, 496 (1991).
- [26] A. R. Edmons, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1974).
- [27] J. J. de Swart, Rev. Mod. Phys. 35, 916 (1963).
- [28] N. W. Park, J. Schechter y H. Weigel, Phys. Rev. D43, 869 (1991).
- [29] B. Moussallam y D. Kalafatis, Phys. Lett. B. 272, 196 (1991); B. Moussallam, Ann. Phys. (N.Y.) 225, 264 (1993).
- [30] F. Meier y H. Walliser, Phys. Rep. 289, 383 (1997).
- [31] N. N. Scoccola y H. Walliser, Phys. Rev. D58, 58-094037 (1998).
- [32] E. Jenkins, Nucl. Phys. B375, 561 (1992).
- [33] A. Abd El-hady y J. Tandean, Phys. Rev. D61, 114014 (2000) .
- [34] J. F. Donoghue, E. Golowich y B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994).
- [35] N. N. Scoccola, Phys. Lett. B428, 8 (1998).
- [36] D. G. Dumm, A. J. García y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D62, 014001 (2000).