



El rol de la matemática y la física en la música

Dr. Manuel Platino

Para el Ciclo de Seminarios de la
Gerencia de Investigación y Aplicaciones
CAC-CNEA-2009

1. *Origen Acústico de la Música - Codificación Standard*

Acústica – La Ecuación de Onda

Codificación de la Música

2. *Música de Orígenes no Acústicos – Codificación Alternativa*

Codificaciones Alternativas de la Música

Instrumentos Electrónicos

3. *Cuando la Música sirve como Expresión de principios Físicos y Matemáticos*

Progresiones Numéricas

Musicalización de orígenes naturales

Resonancia y Armónicos

Comportamiento Caótico

Feedback y Disonancia

4. *Demostración*

Ecuación de Onda

Solución en 1D

u : parámetro genérico de comportamiento vibratorio.

c : velocidad de propagación de dichas vibraciones (ondas) en el medio donde se generan.

t : tiempo.

x, y : coordenadas espaciales.

v : velocidad de propagación de las vibraciones en una membrana.

p : presión del aire.

ω : frecuencia angular.

k : número de onda.

El sonido llega a nuestros oídos a través de vibraciones en la presión del aire.

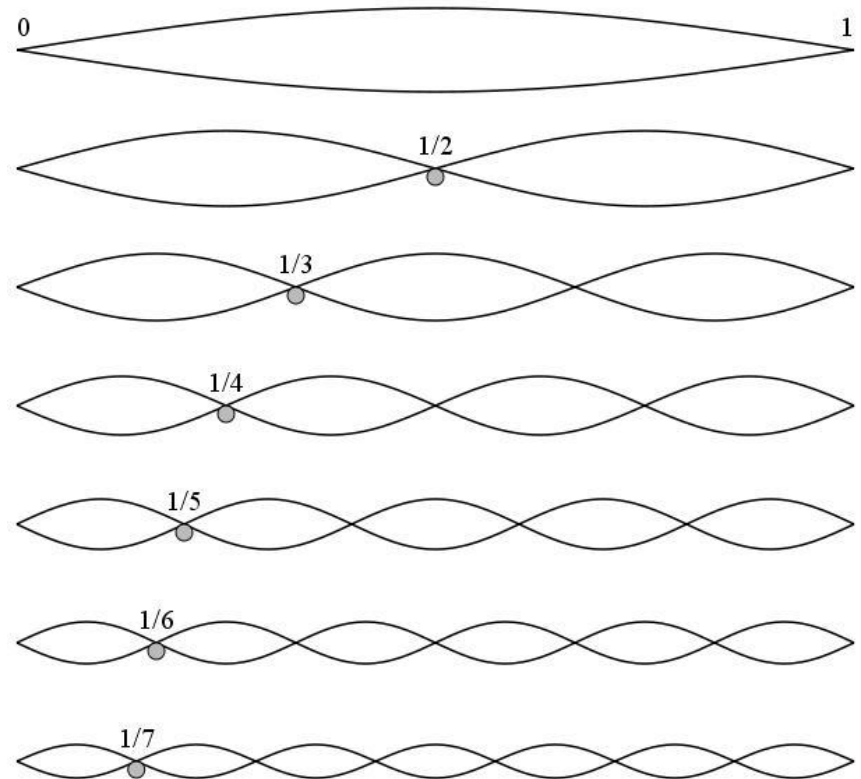
$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u,$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

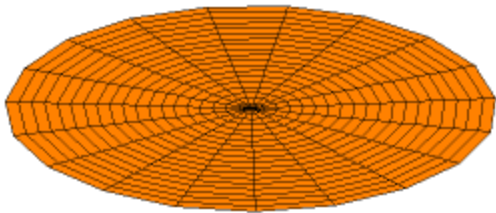
$$(4) \quad p = p_0 \sin(\omega t \mp kx)$$

Ondas estacionarias en 1D, e.g. una cuerda.
Modos de Vibración



Solución para 2D y 3D

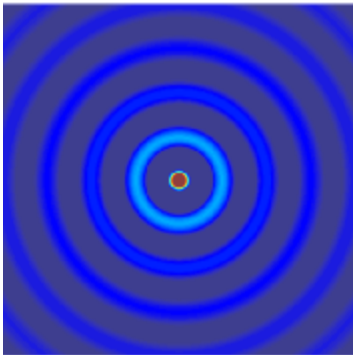
Solución para 2D



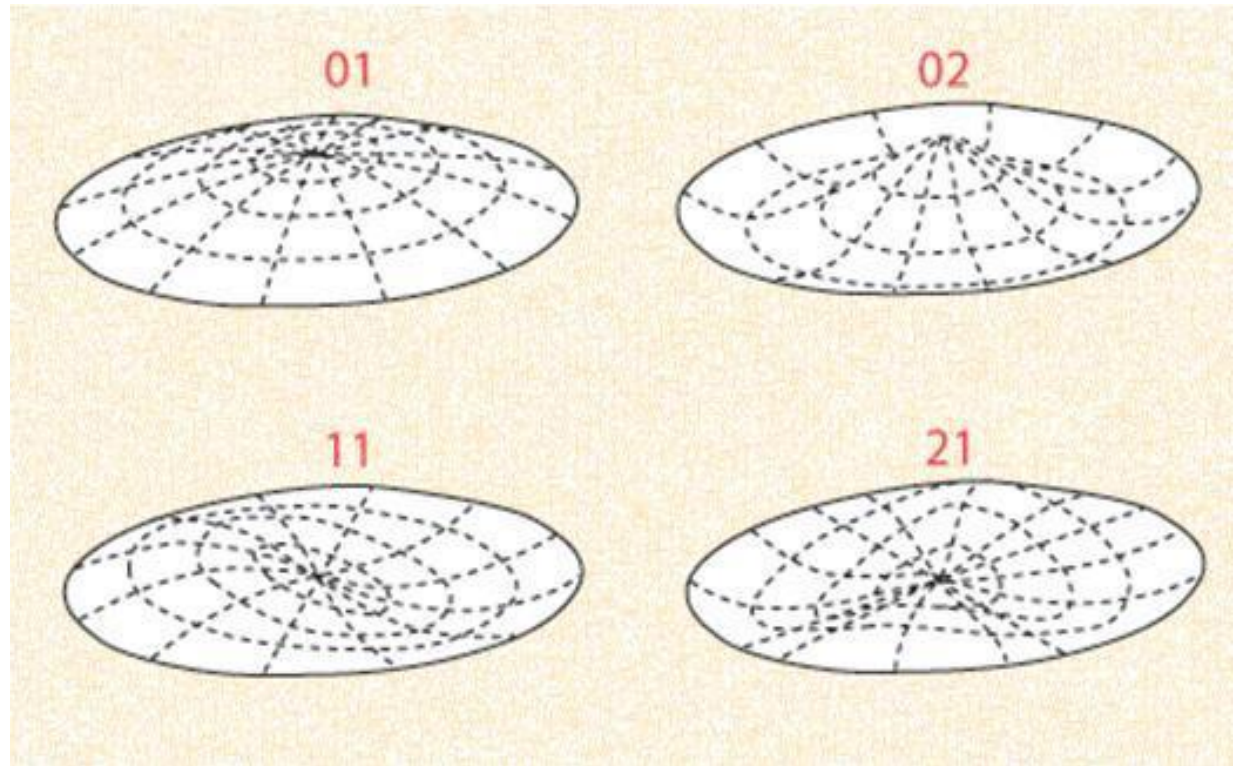
Solución para 3D

r : distancia radial

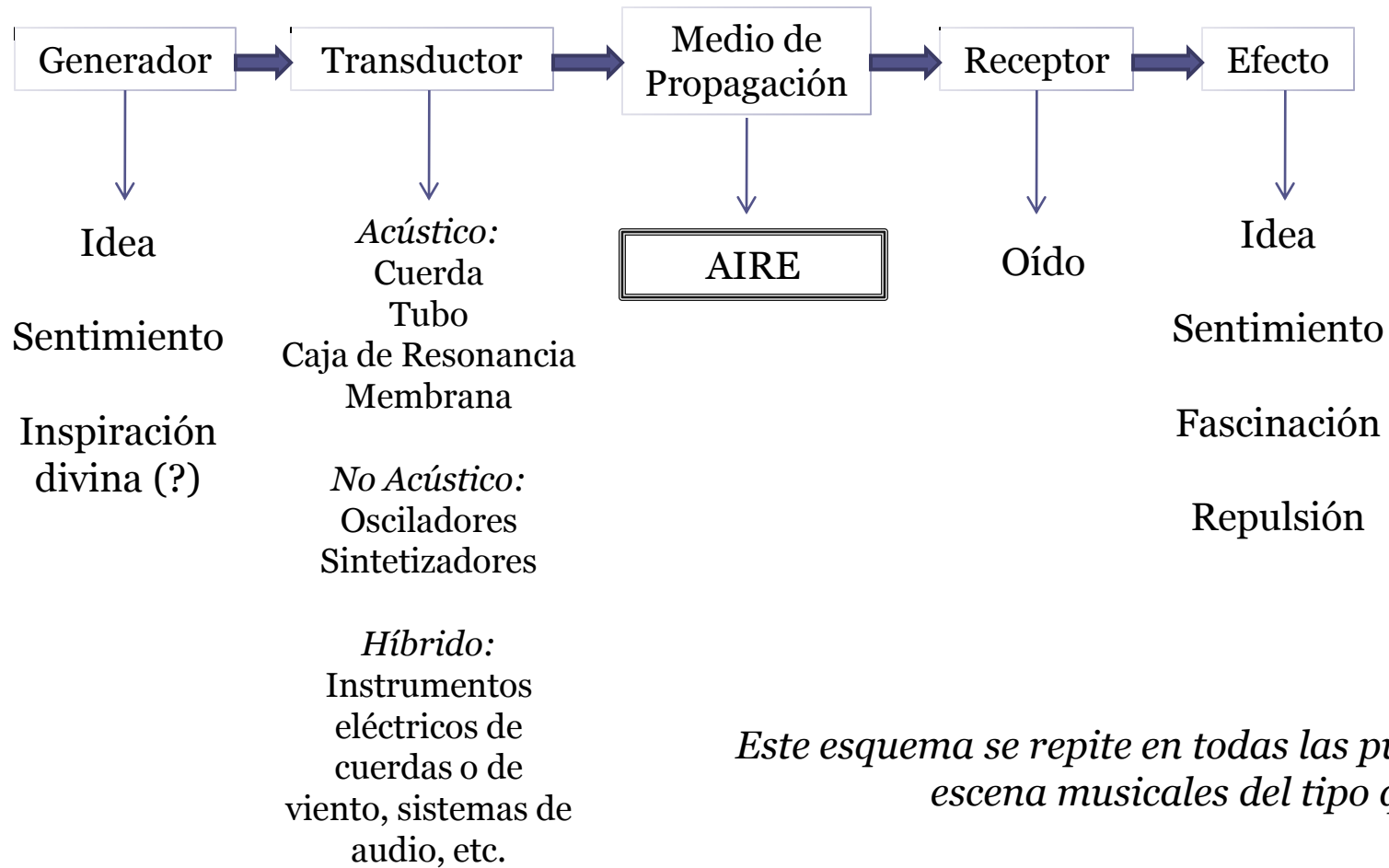
$$(5) \quad p(r, k) = \frac{A}{r} e^{\pm ikr}$$



Ondas estacionarias en 2D, e.g. una membrana (tímpano, etc.).
Modos de Vibración

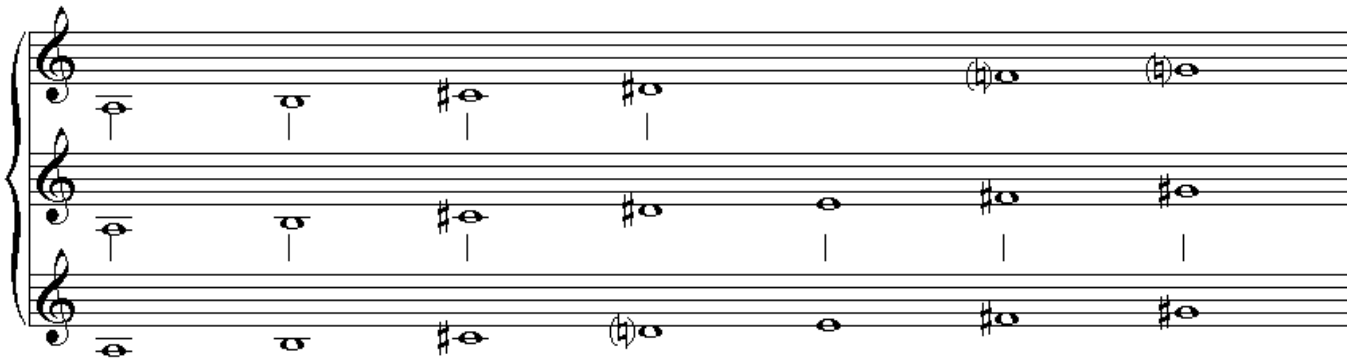


Acústica



Este esquema se repite en todas las puestas en escena musicales del tipo que sean.

Codificación Standard de la Música



Las *escalas* en la música tradicional occidental generalmente consisten de siete *notas* que se repiten en la octava.

Algunas de las notas se separan con *tonos*, otras con *semitonos*.

Esta codificación tiene orígenes inciertos, algunos la relacionan con la anatomía de nuestro oído interno, pero la existencia de tantas variaciones de la misma en otras culturas (que incluyen hasta *microtonos*) hace pensar que es simplemente una convención arbitraria que se ha mantenido con el tiempo.

Las escalas más usadas, desarrolladas a partir del Renacimiento, ambas de siete notas son:

- ✓ *Escala diatónica*
- ✓ *Escala menor*

Otras escalas introducidas a la música occidental en los siglos XIX y XX:

- ✓ Escala cromática de 12 notas
- ✓ Escala de tono completo de seis notas
- ✓ Escala pentatónica de cinco notas
- ✓ Escala disminuida de ocho notas

- ✓ Escala arábica
- ✓ Escala húngara menor

... → ∞

1. Origen Acústico de la Música - Codificación Standard

Acústica – La Ecuación de Onda

Codificación de la Música

2. Música de Orígenes no Acústicos – Codificación Alternativa

Codificaciones Alternativas de la Música

Instrumentos Electrónicos

3. Cuando la Música sirve como Expresión de principios Físicos y Matemáticos

Progresiones Numéricas

Musicalización de orígenes naturales

Resonancia y Armónicos

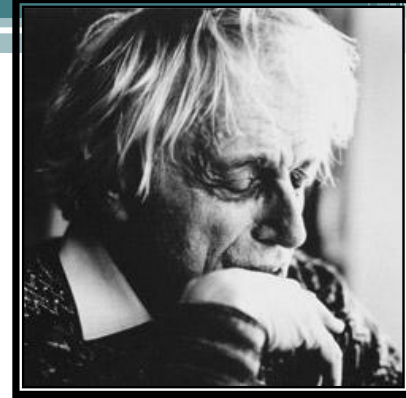
Comportamiento Caótico

Feedback y Disonancia

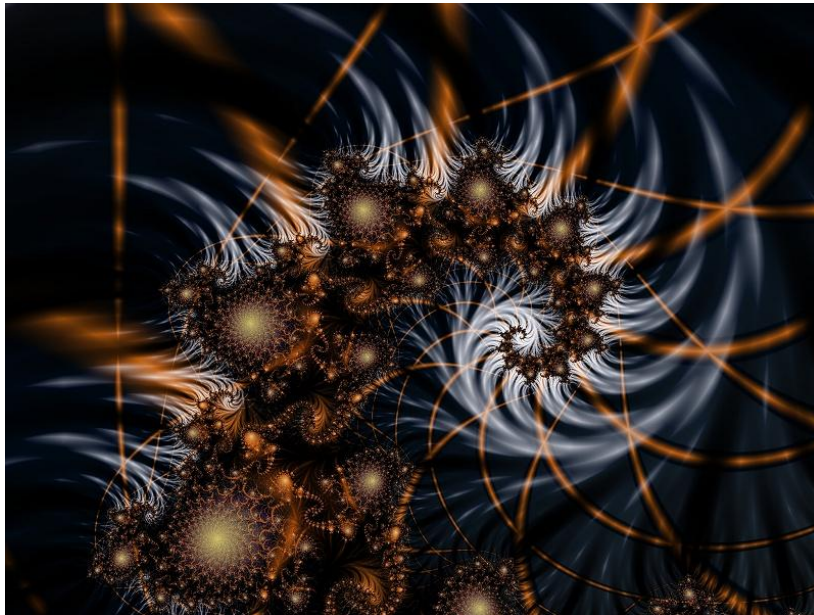
4. Demostración

Codificación Alternativa

György Ligeti (Austriaco, 1923 - 2006)



Lux Aeterna (1966)



Fractal de Mandelbrot

$$\begin{cases} z_0 = 0 & \text{(término inicial)} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c & \text{(relación de inducción)} \end{cases}$$

La repetición recursiva de armonías simples hasta formar texturas sonoras complejas (del mismo modo que se forman los fractales) es un recurso utilizado por Ligeti para su pieza para coro **Lux Aeterna**. Los posteriormente postulados fractales de *Mandelbrot* y la obra de Ligeti se encuentran íntimamente relacionados



Codificación Alternativa

John Cage (Americano, 1912 - 1992)



Music of Changes, Book IV (1988)

Handwritten musical score for "Music of Changes, Book IV" by John Cage. The score is written on two systems of grand staves. The first system includes annotations such as "FOREARM-ARPEGG.", "OSCILL.", "SCRATCH STRINGS", "L. RAVENHURST (PROFESSOR)", and "ACCEL." with a large "104" above it. The second system continues the notation with various rhythmic and dynamic markings.

El proceso de composición empleado por Cage en **Music of Changes** está basado en el *I Ching*:

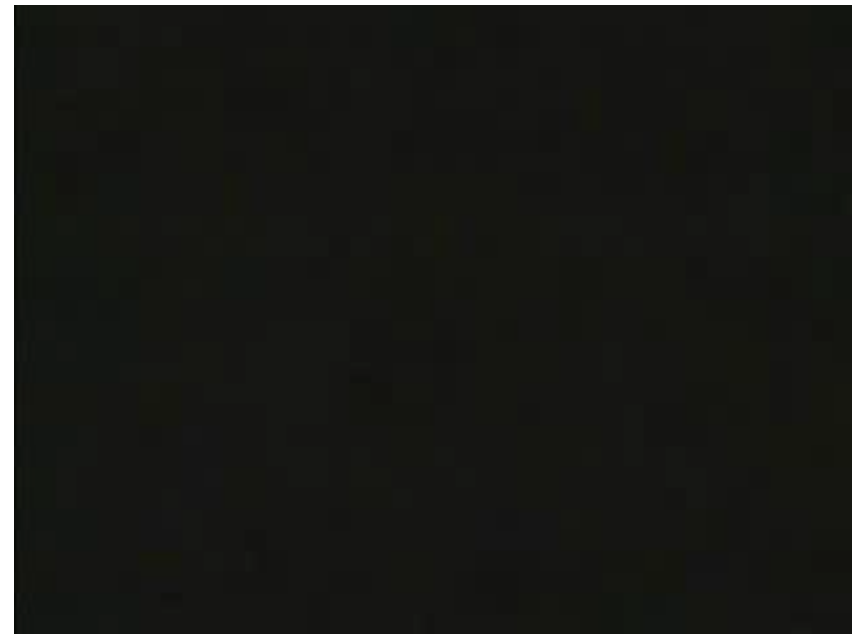
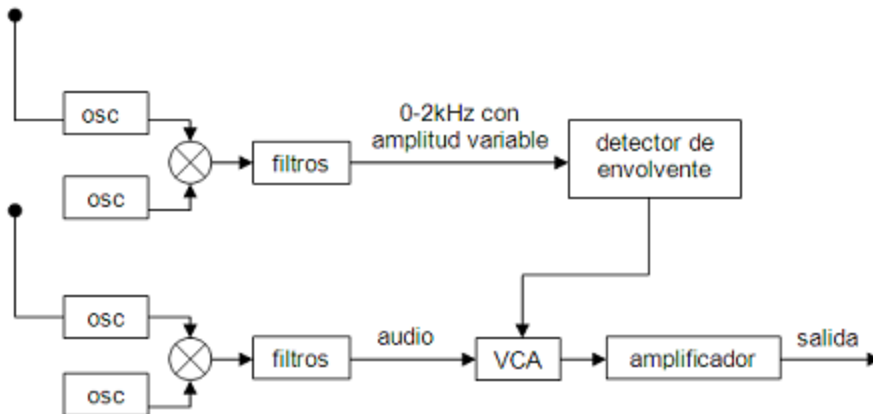
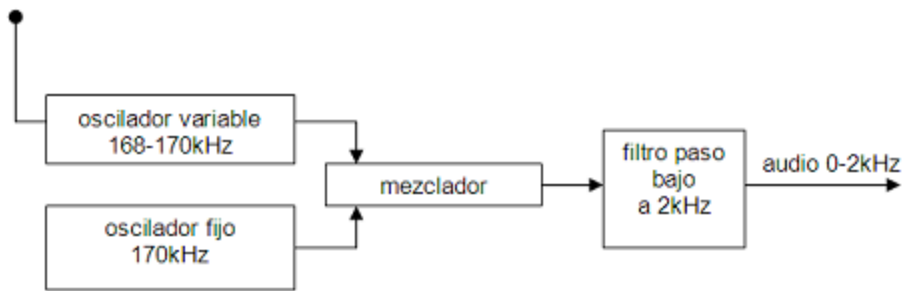
Las decisiones de duración, notas, dinámica, tempo y densidad son libradas al *azar* según la lectura del milenarrio sistema de adivinación chino.



Música de Orígenes no Acústicos

Theremin

Clara Rockmore (Lituana, 1911 – 1998), primera virtuosa del Theremin, ejecutando “Habanera” de Ravel



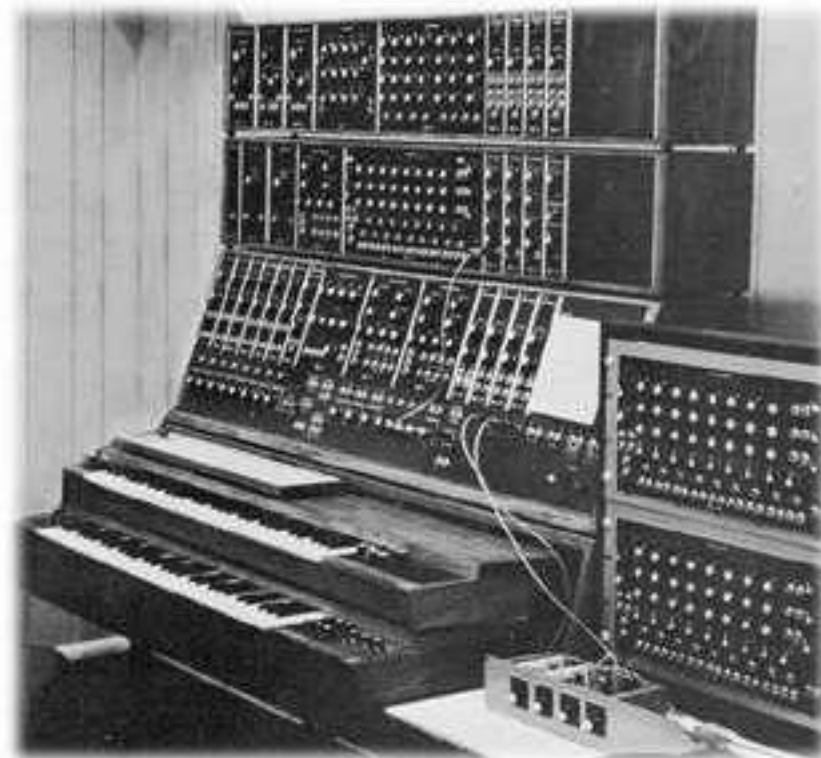
Música de Orígenes no Acústicos

Sintetizadores

Diferentes formas de síntesis del sonido

1. **Substractiva**, por filtrado pasa bajo de una señal electrónica
2. **Aditiva**, combinación de señales armónicas tratando de emular el contenido espectral de una nueva resultante diferente
3. **Granular**, el uso de sonidos artificiales de muy corta duración para crear uno nuevo.
4. **Tabla de Ondas Prestablecidas** en una memoria digital o analógica (mellotrón)
5. **Modulación en Frecuencia**
6. **Modulación en Fase**
7. **Modelado Físico** mediante ecuaciones y algoritmos que representan un proceso físico o matemático (ej: ecuaciones diferenciales pseudo caóticas)
8. **Samples**
9. **Sub armónica**, multiplicación (o división) de la frecuencia fundamental de un sonido artificial para generar uno resultante totalmente diferente.

Moog Modular



[Phonèmes \(1981\)](#) de David Tudor
(Americano, 1926 – 1996)

1. Origen Acústico de la Música - Codificación Standard

Acústica – La Ecuación de Onda

Codificación de la Música

2. Música de Orígenes no Acústicos – Codificación Alternativa

Codificaciones Alternativas de la Música

Instrumentos Electrónicos

3. Cuando la Música sirve como Expresión de principios Físicos y Matemáticos

Progresiones Numéricas

Musicalización de orígenes naturales

Resonancia y Armónicos

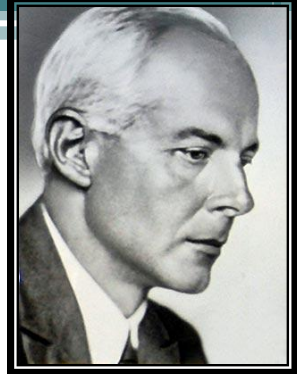
Comportamiento Caótico

Feedback y Disonancia

4. Demostración

Progresiones Numéricas

Béla Bartók (Húngaro, 1881 - 1945)



Music for Strings, Percussion and Celesta, 3rd Movement (1936)

$$F(0) = 0; \quad F(1) = 1; \quad F(n) = F(n-1) + F(n-2) \text{ for } n > 1.$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987...

El tercer movimiento de **Music for Strings, Percussion and Celesta**, el pasaje de apertura guiado por el xilofón usa una estructura rítmica basada en la serie de Fibonacci⁽²⁾ creciente de 1 a 8 y luego decreciente de vuelta a 1

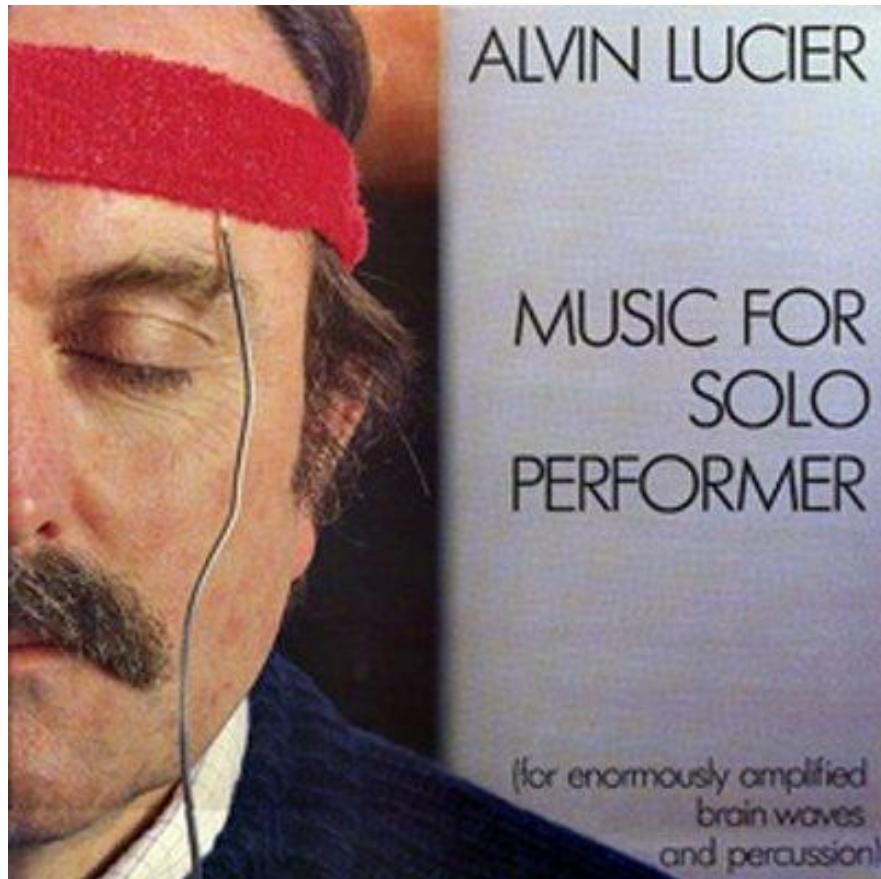
1:1:2:3:5:8:5:3:2:1:1.

⁽²⁾ También usada por los americanos **Tool** en su canción *Laterallus* (2001) aplicada al número de sílabas de la letra de la misma



Música de Orígenes Naturales

Alvin Lucier (Americano, 1931 - presente)



Music for Solo Performer (For Enormously Amplified Brain Waves and Percussion) (1982)

Mediante dos amplificadores ajustados al punto de máxima ganancia Lucier logra reproducir las *ondas Alfa* de su cerebro a través de un encefalograma transformado a sonido, produciendo vibraciones en el rango de los 9Hz a 15Hz, inaudibles para el oído humano.

Aún así las no linealidades de los amplificadores y los instrumentos de percusión movilizados por dichas vibraciones generan sonidos audibles.



Resonancia

Alvin Lucier (Americano, 1931 - presente)



“Estoy sentado en un cuarto distinto del que usted está ahora. Estoy grabando el sonido de mi voz y reproduciendo la grabación una y otra vez hasta que las frecuencias de resonancia del cuarto se refuercen a sí mismas y se destruya toda similitud con mi discurso, quizás con excepción del ritmo.”

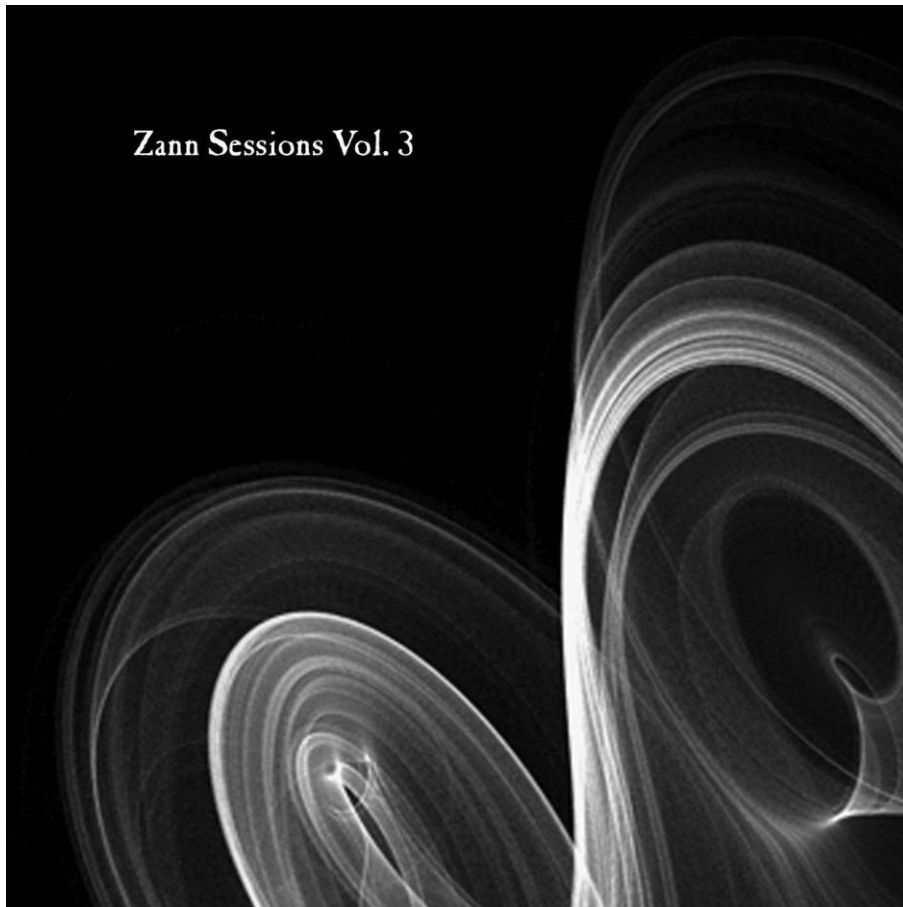
“Lo que va a oír entonces son las frecuencias naturales del cuarto articuladas por el habla. Yo no contemplo esta actividad tanto como una demostración de un hecho físico, sino como una forma de suavizar cualquier irregularidad que mi discurso pueda tener.”



I am Sitting in a Room (1970)

Canto Armónico

Carla Bissioli (Argentina, 1979 - presente)



Zann Sessions Vol. 3, Disharmony Pt. 2 (2009)

Usando sus fosas nasales y su cráneo como caja de resonancia, Bissioli puede generar ondas estacionarias de segundo y tercer orden mediante su voz, técnica denominada *canto armónico*.

Zann Sessions combina esta técnica con la de *I am Sitting in a Room* de Lucier, produciendo una doble resonancia.

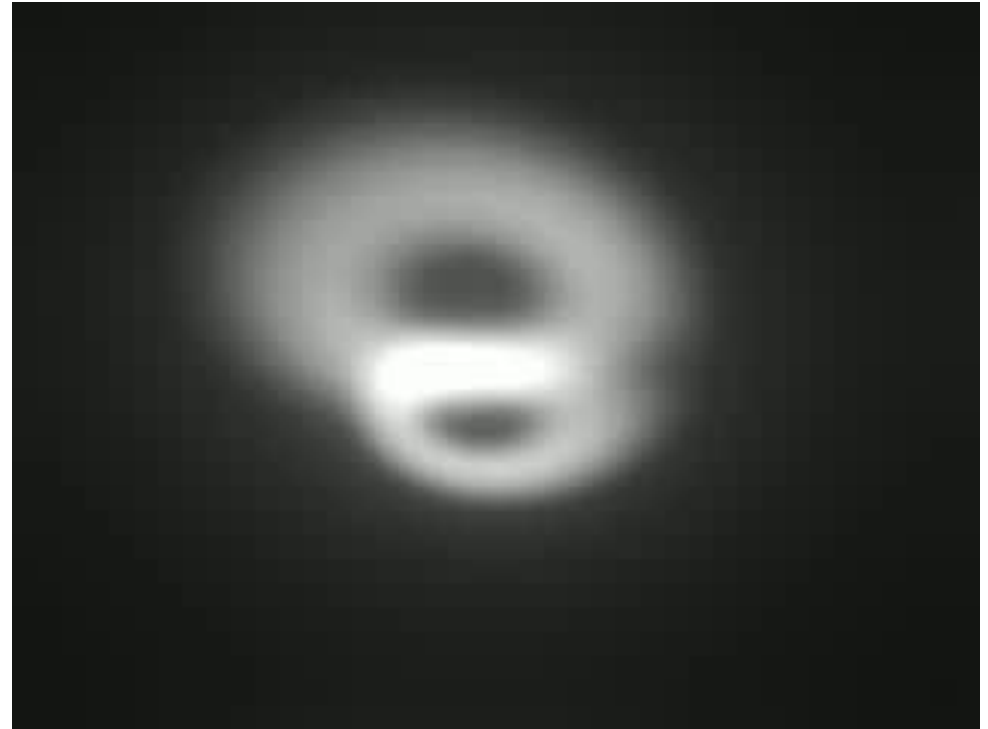


Comportamiento Caótico

Atractores

Atractores Extraños

- Sistemas de ecuaciones diferenciales de 2do y 3er orden cuyas soluciones exhiben algún tipo de comportamiento caótico o pseudo caótico.
- Los atractores son mapas que grafican 2 o 3 parámetros de la solución de dichas ecuaciones en 2 o 3 dimensiones respectivamente.



Atractor de Lorenz

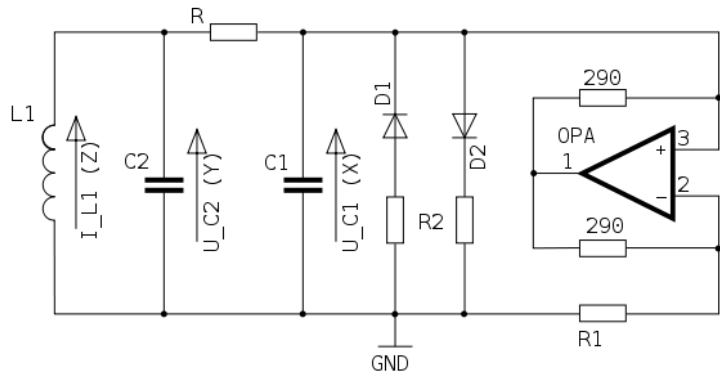
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

x, y, z : coordenadas espaciales.
 t : tiempo.
 σ, ρ, β : parámetros de ajuste del comportamiento caótico

Comportamiento Caótico

Oscilador de Chua

Atractor de Chua

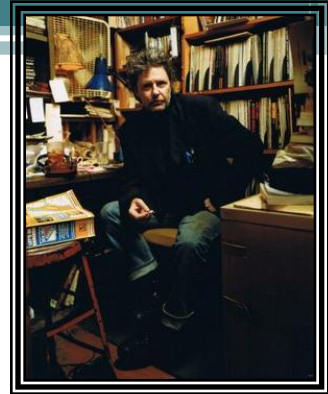


Atractor de Chua,
generado por tensiones V_{C1} y
 V_{C2} , graficadas en modo X-Y
en un osciloscopio.
El sonido es la modulación
directa de un parlante por
medio de V_{C1}



Disonancia

Glenn Branca (Americano, 1948 - presente)



Un acorde se dice “disonante” cuando su tensión demanda una transición directa hacia acordes estables o “consonantes”. Los mismos requieren esfuerzo conciente del espectador por entenderlos y es por eso que se asocian con expresiones de dolor, pena y conflicto.



Symphony No. 13, Drive (2001)



Feedback

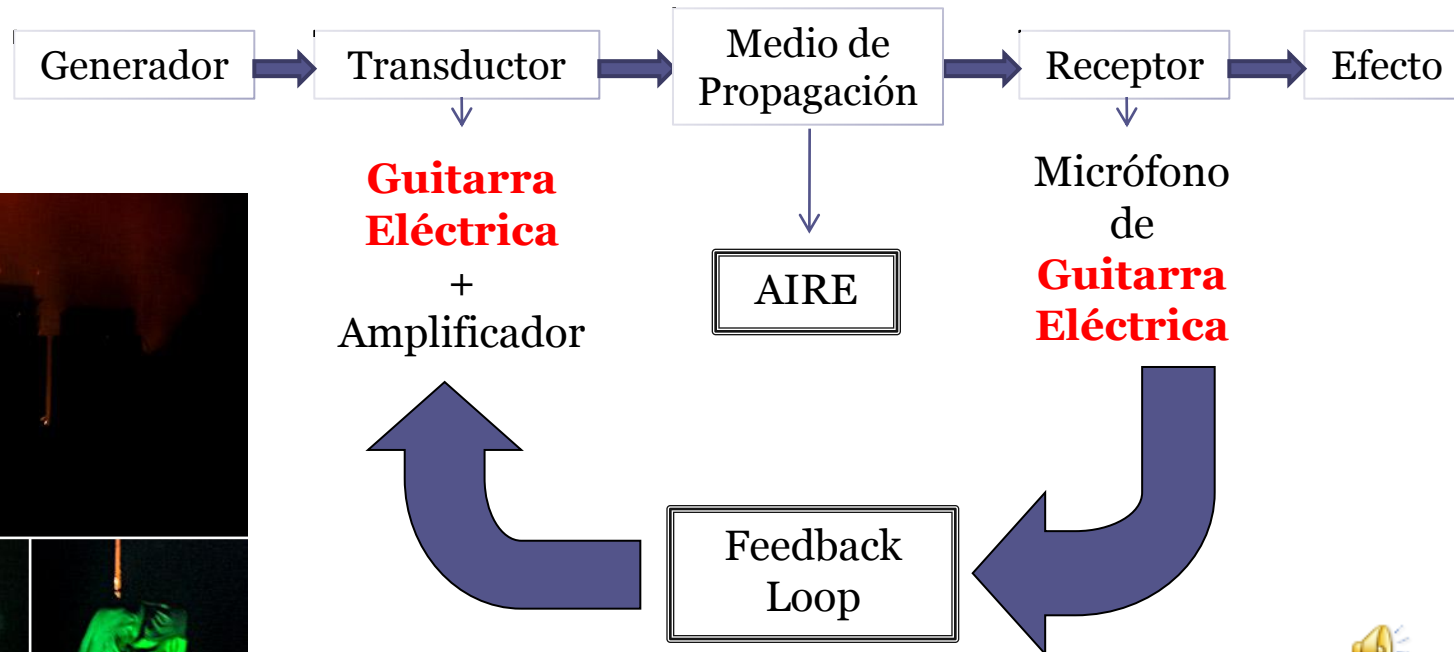
Sunn O))), Stephen O'Malley & Greg Anderson
(Americanos)



Dømkirke, Masks the Ætmospheres (2008)

El uso del Feedback⁽³⁾ positivo (acústico y eléctrico) de parte del dúo Sunn O))), combinado con la resonancia de la nave de la catedral noruega Dømkirke, son usados en el disco homónimo

(3) Usado y abusado en la actualidad por incontables agrupaciones de rock por su efecto perturbador



1. Origen Acústico de la Música - Codificación Standard

Acústica – La Ecuación de Onda

Codificación de la Música

2. Música de Orígenes no Acústicos – Codificación Alternativa

Codificaciones Alternativas de la Música

Instrumentos Electrónicos

3. Cuando la Música sirve como Expresión de principios Físicos y Matemáticos

Progresiones Geométricas (Lygeti, Reich)

Musicalización de orígenes naturales (Lucier)

Resonancia y Armónicos (Lucier, Zann Sessions)

Comportamiento Pseudo Caótico (Chua)

Feedback y Disonancia (Branca)

4. Demostración